ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BRUNO FORTE

Su una particolare classe di funzioni spaziali armoniche ortonormali nel cerchio $z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 265-277

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_265_0>

SU UNA PARTICOLARE CLASSE DI FUNZIONI SPAZIALI ARMONICHE ORTONORMALI NEL CERCHIO $z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$.

di BRUNO FORTE (Pisa)

SOMMARIO: *Con procedimento indiretto si determinano, stabilendo per essi formule ricorrenti, i coefficienti delle combinazioni lineari che trasformano in un sistema ortonormale sul cerchio $x^2 + y^2 \leq a^2$ una certa classe di polinomi, introdotta anni or sono* (1) *per la risoluzione di particolari problemi armonici. La loro conoscenza si è già mostrata utile in alcune questioni concrete* (2).

1. — **PREMESSE.** Si riferisca lo spazio ad una terna cartesiana trirettangola Oxyz; si consideri poi sul piano $z = 0$ il cerchio σ di centro 0 e raggio a. Posto

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \qquad \mu(x, y) = \left(1 + \frac{\varrho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

si pensi distribuita su σ una massa positiva con densità μ^s, essendo s il generico elemento della successione $-1, 1, 3, \ldots 2n-1, \ldots$. Sia $V_s(x, y, z)$ il corrispondente potenziale newtoniano

$$V_s(x, y, z) = \int_\sigma \mu^s \cdot \frac{1}{r}\, d\sigma \qquad (s = -1, 1, 3 \ldots)$$

$$[\mu = \mu(\xi, \eta), \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]$$

le cui determinazioni nei punti di σ sono rappresentate, come è noto (3), da polinomi $\overline{V}_s(x, y)$ di grado $\frac{s+1}{2}$ in ϱ^2. I coefficienti di tali polinomi sono resi calcolabili da formule ricorrenti (4), che li individuano univocamente.

(1) Cfr. nota bibliografica [1].
(2) Cfr. [2].
(3) Cfr. [1], pag. 3.
(4) Cfr. [1], pag. 7.

Allo scopo di avere un efficace strumento per la risoluzione di certi problemi armonici dello spazio e del semispazio, si è ravvisata l'utilità di determinare una classe di funzioni armoniche, che siano combinazioni lineari dei potenziali V_s sopra citati e le cui determinazioni polinomiali su σ costituiscano un sistema ortonormale su σ medesimo.

Per ottenere un'unica formula generale esplicita che consenta il calcolo immediato di *tutti* i coefficienti delle cercate combinazioni lineari, si è seguito un procedimento indiretto, sostanzialmente equivalente al classico procedimento di Schmidt [5] ma che, utilizzando proprietà ben note dei polinomi di Legendre, consente di giungere più rapidamente al risultato. Esso consiste nel considerare anzitutto un sistema di polinomi $\{\overline{\Gamma}_t\}$ $(t = -1, 1, 3, ...)$ di grado $\dfrac{t+1}{2}$ in ϱ^2, ortonormale sul cerchio σ e completo per l'approssimazione delle funzioni di ϱ^2 definite e sommabili su σ medesimo, sistema che è facilmente deducibile da quello dei polinomi di Legendre. Posti poi in relazione i coefficienti, conosciuti, dei due termini di grado più elevato nei polinomi $\{\overline{V}_s\}$ con i corrispondenti nei polinomi $\{\overline{\Gamma}_t\}$, riesce possibile intuire l'espressione di tutti i coefficienti di combinazione, di cui si dimostra successivamente la validità col metodo di induzione completa.

2. — Il sistema di polinomi $\{\overline{\Gamma}_t\}$ ortonormale e completo sul cerchio σ.

Il cambiamento di variabile rappresentato dalla relazione:

$$x = 2\,\frac{\varrho^2}{a^2} - 1 \tag{2-1}$$

trasforma il sistema dei polinomi di Legendre $\{L_t(x)\}$, ortogonale sull'intervallo $(-1, +1)$ e completo per l'approssimazione delle funzioni $f(x)$ definite e sommabili su detto intervallo, in un sistema di polinomi $\{Q_t(\varrho^2)\}$. Il sistema di polinomi $\{Q_t\}$ è ortogonale su σ, è infatti

$$\int_\sigma Q_t \cdot Q_{t'} \cdot d\,\sigma = 2\,\pi \int_0^a Q_t \cdot Q_{t'} \cdot \varrho\, d\,\varrho = \frac{a^2\,\pi}{2} \int_{-1}^{1} L_t \cdot L_{t'} \cdot d\,x = 0 \qquad (t \neq t'), \tag{2-2}$$

è inoltre completo per l'approssimazione delle funzioni di ϱ^2, definite e sommabili sul cerchio σ; basta, per provarlo, ripetere punto per punto il pro-

---

[5] Cfr. [3], pagg. 49, 50, cap. II, § 1, n. 1 e 2.

cedimento ben noto [6] con cui si dimostra la completezza del sistema dei polinomi di Legendre.

È utile per il seguito caratterizzare con un'unica formula, il generico coefficiente dei polinomi $\{Q_t\}$. Per questo si prendano in considerazione l'equazione differenziale

$$(2\text{-}3)\quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left\{\varrho\cdot\left(1-\frac{\varrho^2}{a^2}\right)\cdot\frac{d}{d\varrho}Q_t\right\}+\frac{(t+1)\cdot(t+3)}{a^2}Q_t=0 \qquad (t=-1,1,3\ldots)$$

cui soddisfano i singoli polinomi del sistema $\{Q_t\}$, e la relazione differenziale

$$(2\text{-}4)\qquad \varrho\cdot\frac{d}{d\varrho}(Q_t+Q_{t-2})-(t+1)\cdot(Q_t-Q_{t-2})=0 \qquad (t=-1,1,3,\ldots)$$

che intercorre tra il generico polinomio Q_t e il polinomio Q_{t-2} di grado, rispettivamente, $\frac{t+1}{2}$ e $\frac{t-1}{2}$ in ϱ^2. L'equazione (2-3) e la relazione (2-4) si deducono dalla equazione differenziale [7]

$$(2\text{-}5)\qquad \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}L_t\right\}+\frac{(t+1)\cdot(t+3)}{4}L_t=0$$

e dalla relazione differenziale [8]:

$$(2\text{-}6)\qquad \frac{t+1}{2}\cdot\frac{L_{t-2}-L_t}{1-x}=\frac{d}{dx}(L_t+L_{t-2})$$

relative ai polinomi di Legendre, facendo uso del cambiamento di variabile (2-1) che trasforma questi nei polinomi $\{Q_t\}$.

Posto ora

$$(2\text{-}7)\qquad Q_t=\sum_{0}^{\frac{t+1}{2}}{}_h\, q_{t,h}\,\varrho^{2h}$$

applicando alla (2-4) il principio di identità dei polinomi, si ha:

$$(2\text{-}8)\qquad q_{t,h}=\frac{t+2h+1}{t-2h+1}q_{t-2,h} \qquad \left((0\leq h\leq\frac{t-1}{2}\right)$$

---

[6] Cfr. [3] pagg. 65-68, cap. II, § 4, n. 1, e pag. 82, cap. II, § 8, n. 1.

[7] Cfr. [4], parte II, pag. 157.

[8] Cfr. [4], parte II, pag. 160.

Si consideri poi la relazione differenziale:

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varrho}{a}\cdot\frac{d}{d\varrho}Q_t\right)+\frac{\varrho^3}{a^3}\cdot\frac{d^2}{d\varrho^2}Q_{t-2}+\frac{2t+5}{a}\cdot\frac{\varrho^2}{a^2}\cdot\frac{d}{d\varrho}Q_{t-2}+ \tag{2-9}$$

$$+\frac{(t+1)\cdot(t+3)}{a^2}\cdot\frac{\varrho}{a}\cdot Q_{t-2}=0$$

conseguenza elementare delle (2-3) e (2-4). Da essa si trae la relazione

$$q_{t,\frac{t+1}{2}}=-\frac{4t^2}{(t+1)a^2}q_{t-2,\frac{t-1}{2}} \tag{2-10}$$

In forma più esplicita dalla (2-10) si ha

$$q_{t,\frac{t+1}{2}}=(-1)^{\frac{t+1}{2}}\frac{2^{t+1}}{a^{t+1}}\cdot\frac{t\,!!}{(t+1)\,!!}q_{-1,0} \tag{2-11}$$

mentre la (2-8) si può scrivere nella forma

$$q_{t,h}=\frac{1}{(4h)\,!!}\cdot\frac{(t+2h+1)\,!!}{(t-2h+1)\,!!}\cdot q_{2h-1,h} \tag{2-12}$$

dalla quale discende, in virtù della (2-11) (ove si ponga $t=2h-1$):

$$\boxed{q_{t,h}=(-1)^h\frac{1}{a^{2h}(2h)\,!!^2}\cdot\frac{(t+2h+1)\,!!}{(t-2h+1)\,!!}q_{-1,0}} \tag{2-13}$$

Tale ultima relazione contiene anche la precedente (2-11) e consente, come voluto, il calcolo immediato di tutti i coefficienti $q_{t,h}$ dei polinomi $\{Q_t\}$. I coefficienti $q_{t,h}$ risultano così individuati a meno del fattore, del tutto inessenziale, $q_{-1,0}$. Nel seguito si assumerà, per brevità di calcolo, $q_{-1,0}=1$.

Dal sistema ortogonale $\{Q_t\}$ si passa ora ad un sistema di polinomi in ϱ^2, $\{\overline{\Gamma}_t\}$, ortogonale e normale su σ, ponendo:

$$\overline{\Gamma}_t=\omega_t\cdot Q_t \tag{2-14}$$

e vincolando $\overline{\Gamma}_t$ alla condizione

$$\int_\sigma \overline{\Gamma}_t^2\cdot d\sigma=1 \qquad (t=-1,1,3,\ldots) \tag{2-15}$$

Il fattore di normalizzazione ω_t che figura nella (2·14) si determina facendo ricorso alla (2-4). Da essa infatti si deduce per integrazione, dopo averne moltiplicato primo e secondo membro per Q_t,

$$\int_\sigma \varrho\, Q_t \frac{d}{d\varrho} Q_t\, d\sigma + \int_\sigma \varrho\, Q_t \frac{d}{d\varrho} Q_{t-2}\, d\sigma - (t+1)\int_\sigma Q_t^2\, d\sigma + (t+1) \cdot \tag{2-16}$$

$$\cdot \int_\sigma Q_t\, Q_{t-2}\, d\sigma = 0\ ;$$

di qui, osservato che

$$\int_\sigma \varrho\, Q_t \frac{d}{d\varrho} Q_t\, d\sigma = 2\pi \int_\sigma^a \varrho^2 \frac{1}{2}\frac{d}{d\varrho} Q_t^2\, d\varrho = \pi a^2 - \int_\sigma Q_t^2\, d\sigma \tag{2-17}$$

e tenuta presente l'ortogonalità di Q_t a $\varrho^{2n}\left(0 \leq n \leq \frac{t-1}{2}\right)$ e quindi anche a $\varrho \frac{d}{d\varrho} Q_{t-2}$, si ha

$$\int_\sigma Q_t^2\, d\sigma = \frac{1}{\omega_t^2}\int_\sigma \overline{\Gamma}_t^2\, d\sigma = \frac{\pi a^2}{t+2} \tag{2-18}$$

da cui

$$\boxed{\omega_t = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{t+2}{\pi}}} \tag{2-19}$$

3. — Una formula generale relativa ai coefficienti dei polinomi $\{\overline{V}_s\}$.

Posto:

$$\overline{V}_s = \sum_{h=0}^{\frac{s+1}{2}} a_{s,h}\, \varrho^{2h} \qquad (s = -1, 1, 3, \ldots) \tag{3-1}$$

si può stabilire per il generico coefficiente $a_{s,h}$ la seguente espressione generale

$$\boxed{a_{s\,h} = (-1)^h \frac{1}{a^{2h}} \cdot \frac{s\,!!\,(2h-1)\,!!}{(s-2h+1)\,!!\,(2h)\,!!^2}\, \pi^2 a} \tag{3-2}$$

$$\left(s = -1, 1, 3, \ldots; \qquad h = 0, 1, 2, \ldots \frac{s+1}{2}\right)$$

che parallelamente alla (2-13) assegna il valore del generico coefficiente $a_{s,h}$ in funzione dei due indici s e h.

Per provare la validità della (3-2) si trascrivano le relazioni, già note [9], che intercorrono tra i coefficienti $a_{s,h}$:

$$a_{s,h} = - s \frac{s \cdot a_{s-2,h-1} - (s-2)\, a_{s-4,h-1}}{4\, h^2\, a^2} \qquad \left(h = 1\,,2\,,\dots \frac{s-1}{2}\right) \tag{3-3}$$

$$a_{s,\frac{s+1}{2}} = - \frac{s^2}{(s+1)^2\, a^2}\, a_{s-2,\frac{s-1}{2}} = (-1)^{\frac{s+1}{2}} \frac{s^2}{a^{s+1}\,(s+1)^2}\, \pi^2\, a \tag{3-4}$$

$$a_{s,0} = \frac{s}{s+1}\, a_{s-2,0} = \frac{s}{(s+1)}\, \pi^2\, a\,. \tag{3-5}$$

Per $h = 1$ dalla (3-3) si ha:

$$a_{s,1} = - s \frac{s \cdot a_{s-2,0} - (s-2)\, a_{s-4,0}}{4\, a^2} \tag{3-6}$$

mentre per la (3-5), quando ad s si sostituisca $s - 2$, è

$$a_{s-4,0} = \frac{s-1}{s-2}\, a_{s-2,0} \tag{3-7}$$

e quindi per la (3 6):

$$a_{s,1} = - \frac{s}{4\, a^2}\, a_{s-2,0} \tag{3-8}$$

e quando ad s si sostituisca $s - 2$

$$a_{s-2,1} = - \frac{s-2}{4\, a^2}\, a_{s-4,0} \tag{3-9}$$

Sostituendo (3·7) e successivamente (3·9) in (3·6), si ha:

$$a_{s,1} = \frac{s}{s-1}\, a_{s-2,1} \tag{3-10}$$

che, corrispondentemente alla (3-5), lega i coefficienti dei termini in ϱ^2 nei polinomi $\overline{V}_s$ e $\overline{V}_{s-2}$. Si riconosce ora che la (3-5) e la (3-10) non sono che un caso particolare ($h = 0$ e $h = 1$, rispettivamente) della seguente relazione generale:

$$a_{s,h} = \frac{s}{s-2h+1}\, a_{s-2,h} \tag{3-11}$$

$$\left(s = -1\,,1\,,3\,,\dots; \qquad h = 0\,,1\,,2\,,\dots \frac{s-1}{2}\right)$$

---

[9] Cfr. [1]. pag. 7.

la cui validità può dimostrarsi per induzione completa. A tal fine si supponga verificata la (3·11) quando ad h si sostituisca $h-1$:

$$a_{s,h-1} = \frac{s}{s-2h+3}\, a_{s-2,h-1}\,. \tag{3·12}$$

La (3·12) implica:

$$a_{s-2\,h-1} = \frac{s-2}{s-2h+1}\, a_{s-4,h-1}\,. \tag{3·13}$$

In virtù della (3·12) e della (3·13) la (3·3) si scrive:

$$a_{s,h} = -\,s\,\frac{2h-1}{4h^2a^2}\, a_{s-2,h-1} = -\,\frac{(2h-1)(s-2h+3)}{4h^2a^2}\, a_{s.h-1}\,. \tag{3·14}$$

La (3·14) implica poi:

$$a_{s-2,h} = -\,\frac{(2h-1)(s-2h+1)}{4h^2a^2}\, a_{s-2,h-1}\,. \tag{3·15}$$

Di qui, sostituendo nella

$$a_{s,h} = -\,s\,\frac{2h-1}{4h^2a^2}\, a_{s-2,h-1}\,, \tag{3·16}$$

si ha

$$a_{s,h} = \frac{s}{s-2h+1}\, a_{s-2,h} \qquad \left(h = 0\,,1\,,2\,,\ldots \frac{s-1}{2}\right); \tag{3·17}$$

da tale relazione ricorrente si deduce

$$a_{s,h} = \frac{s!!}{(2h-1)!!\,(s-2h+1)!!}\, a_{2h-1,h} \qquad \left(h = 0\,,1\,,2\,,\ldots \frac{s-1}{2}\right). \tag{3·18}$$

Teniamo ora conto della (3·4), ponendovi $s = 2h-1$:

$$a_{2h-1,h} = (-1)^h \cdot \frac{(2h-1)!!^2}{a^{2h}\,(2h)!!^2}\, \pi^2\, a\,;$$

sostituendo nella (3·18) si ottiene in definitiva la cercata espressione generale di $a_{s,h}$:

$$a_{s,h} = (-1)^h\, \frac{s!!\,(2h-1)!!}{a^{2h}\,(s-2h+1)!!\,(2h)!!^2}\, \pi^2\, a$$

4. — Determinazione dei coefficienti delle combinazioni lineari che trasformano il sistema $\{\overline{V}_s\}$ nel sistema ortogonale e completo $\{\overline{\Gamma}_t\}$.

Ci si propone qui di caratterizzare i coefficienti b_t^s delle combinazioni lineari:

$$\sum_{-1}^{t}{}_s\, b_t^s\, \overline{V}_s = \overline{\Gamma}_t \qquad (t = -1, 1, 3, \ldots) \tag{4-1}$$

che trasformano i primi $\dfrac{t+1}{2}$ polinomi $\overline{V}_s$ nel polinomio $\overline{\Gamma}_t$ del sistema ortonormale e completo su σ precedentemente considerato. Ciò equivale ad individuare in maniera univoca e possibilmente con un'*unica* formula *tutti* gli elementi della matrice triangolare doppiamente infinita:

$$\begin{array}{llllllll}
b_{-1}^{-1} & & & & & & & \\
b_1^{-1} & b_1^1 & & & & & & \\
b_3^{-1} & b_3^1 & b_3^3 & & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
b_t^{-1} & b_t^1 & b_t^3 & \ldots\ldots & b_t^s & \ldots\ldots & b_t^t & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{4-2}$$

ove gli elementi della $\dfrac{t+1}{2}$-ma riga sono i coefficienti che figurano nella (4-1). Confrontando tra loro i coefficienti dei termini di grado $t+1$ in ϱ che compaiono a primo e secondo membro della (4-1), per la (2-11) e la (3-4) (ove si ponga $s = t$), si ha subito:

$$b_t^t = \frac{q_{t,\frac{t+1}{2}}}{a_{t,\frac{t+1}{2}}}\,\omega_t = \frac{2^{t+1}}{\pi^2 a}\,\frac{(t+1)!!}{t!!}\,\omega_t\,, \tag{4-3}$$

relazione che individua tutti i termini della diagonale principale della (4-2). Si può ora trovare l'espressione generale del coefficiente b_t^{t-2} $(t = -1, 1, 3, \ldots)$ confrontando i coefficienti dei termini di grado $t-1$ nella (4-1). Se si tengono presenti le (2-13) e (3-2), si ha:

$$b_t^{t-2}\cdot a_{t-2,\frac{t-1}{2}} + b_t^t\, a_{t,\frac{t-1}{2}} = (-1)^{\frac{t-1}{2}}\,\frac{(t-2)!!^2}{a^{t-1}(t-1)!!^2}\,\pi^2\, a\cdot b_t^{t-2} + \tag{4-4}$$

$$+(-1)^{\frac{t-1}{2}} 2^{t+1} \frac{(t+1)!!}{t!!} \cdot \frac{t!!\,(t-2)!!}{a^{t-1}(t-1)!!^2} \omega_t = q_{t,\frac{t-1}{2}} \omega_t =$$

$$=(-1)^{\frac{t-1}{2}} \frac{1}{a^{t-1}} \cdot \frac{(2\,t)!!}{2\cdot(t-1)!!^2} \omega_t$$

e quindi

(4·5) $$b_t^{t-2} = -\,2^{t-1} \frac{(t-1)!!\cdot(t+2)}{(t-2)!!} \cdot \frac{1}{\pi^2 a}$$

Ricavate così, elementarmente, le espressioni di b_t^t e b_t^{t-2}, si osservi che esse possono ottenersi per particolari valori di s (per $s=t$ e, rispettivamente, $s=t-2$) dalla seguente espressione generale:

(4·6) $$\boxed{b_t^s = (-1)^{\frac{t+s}{2}+1} \frac{(t+s+2)!!\,(t+2)}{(t-s)!!\,s!!\,(s+2)!!} \cdot \frac{1}{\pi^2 a} \omega_t}$$

della quale proveremo la validità facendo uso del metodo di induzione completa. Per dimostrare la (4·6) basta far vedere che i valori da essa forniti per i coefficienti b_t^s sono soluzioni del sistema di equazioni lineari:

(4·7) $$\sum_{2h-1}^{t}{}_s\, b_t^s \cdot a_{s,h} = q_{t,h}\,\omega_t \qquad \left(h=0,1,2,\dots\frac{t+1}{2}\right)$$

ottenute eguagliando i coefficienti dei termini simili nella (4·1). Si supporrà perciò che i valori forniti dalla (4·6) rendano soddisfatte le eqnazioni

(4·8) $$\sum_{2h-1}^{t-2}{}_s\, b_{t-2}^s \cdot a_{s,h} = q_{t-2,h}\,\omega_{t-2}$$

(4·9) $$\sum_{2h+1}^{t}{}_s\, b_t \cdot a_{s,h+1} = q_{t,h+1}\,\omega_t$$

e si dimostrerà che per essi risulta, di conseguenza, soddisfatta anche la (4·7), ovvero che è, identicamente,

(4·10) $$(-1)^{\frac{t+1}{2}+h} \omega_t\,(t+2)\,(2\,h-1)!! \sum_{2h-1}^{t}{}_s (-1)^{\frac{s+1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(t+s+2)!!}{(t-s)!!\,(s+2)!!\,(s-2\,h+1)!!} = a^{2h}\,(2\,h)!!^2\, q_{t,h}\,\omega_t$$

ottenuta esplicitando la (4·7) tramite le (4·6) e (3·2).

Per conseguire più agevolmente lo scopo conviene tradurre la (4-10), facendo uso della (2-13), in una relazione tra i noti coefficienti $q_{t,\frac{s+1}{2}}$; si ha così

$$(4\text{-}11) \qquad (-1)^{\frac{t+1}{2}+h}(t+2)(2h-1)!!\sum_{2h-1}^{t}{}_s \cdot \frac{(s+1)!!^2 \cdot a^{s-2h+1}}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}} = (2h)!!^2 q_{t,h}$$

Si tratterà quindi di dimostrare la validità di quest'ultima, assumendo, per ipotesi, che sia:

$$(4\text{-}12) \qquad (-1)^{\frac{t-1}{2}+h} t\cdot(2h-1)!!\sum_{2h-1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 a^{s-2h+1}}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t-2,\frac{s+1}{2}} = (2h)!!^2 q_{t-2,h}$$

$$(4\text{-}13) \qquad (-1)^{\frac{t+1}{2}+h+1}(t+2)\cdot(2h+1)!!\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 a^{s-2h-1}}{(s+2)!!(s-2h-1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}} = (2h+2)!!^2 q_{t,h+1}$$

ottenute operando sulle (4-8) e (4-9), analogamente a quanto si è fatto per la (4-7).

Nella ipotesi che $\frac{t+1}{2}+h$ sia pari, alla (4-7) si può dare ancora la forma:

$$(4\text{-}14) \qquad (t+2)(2h-1)!!\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 a^{s-2h+1}}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}} = (2h)!!^2 q_{t,h} - \frac{(t+2)(2h)!!^2}{2h+1} q_{t,h} = -\frac{(t-2h+1)(2h)!!^2}{2h+1} q_{t,h}$$

e ricordando che è:

$$(4\text{-}15) \qquad q_{t,h} = -\frac{a^2(2h+2)^2}{(t+2h+3)(t-2h+1)} q_{t,h+1}$$

si dovrà, per dimostrare la (4-7) nella ipotesi $\frac{t+1}{2}+h$ pari, provare, in definitiva, che è:

$$(4\text{-}16) \qquad (t+2)(2h+1)!!\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2(t+2h+3)a^{s-2h-1}}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}} = (2h+2)!!^2 q_{t,h+1}$$

e quindi, confrontando questa con la (4 13):

$$\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,(t+2h+3)\,a^{s-2h-1}}{(s+2)!!\,(s-2h+1)!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}} = \tag{4-17}$$

$$= -\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,a^{s-2h-1}}{(s+2)!!\,(s-2h-1)!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

ovvero:

$$\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,(t+s+4)\,a^s}{(s+2)!!\,(s-2h+1)!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}} = 0 \tag{4-18}$$

Si osservi ora che le ipotesi tradotte dalle (4-12) e (4-13) si possono anche porre nella forma:

$$-t\sum_{2h-1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,a^s}{(s+2)!!\,(s-2h+1)!!}\,q_{t-2,\frac{s+1}{2}} = \frac{a^{2h-1}\,(2h)!!^2}{(2h-1)!!}\,q_{t-2,h} \tag{4-19}$$

$$-(t+2)\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,a^s}{(s+2)!!\,(s-2h-1)!!}\,q_{t,\frac{s+1}{2}} = \frac{a^{2h+1}\,(2h+2)!!^2}{(2h+1)!!}\,q_{t,h+1} \tag{4-20}$$

mentre, con procedimento identico a quello seguito per dedurre la (4-18) dalla (4-11), dalla (4-12) si ha:

$$\sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,(t-s-2)\,a^s}{(s+2)!!\,(s-2h+1)!!}\,q_{t-2,\frac{s+1}{2}} = 0 \tag{4-21}$$

Operando successivamente sulla (4-20), come segue, si ha:

$$-t\sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,a^s}{(s+2)!!\,(s-2h+1)!!}\,q_{t-2,\frac{s+1}{2}} = \frac{(2h)!!^2\,a^{2h-1}}{(2h-1)!!}\,q_{t-2,h} + \tag{4-22}$$

$$+\frac{t\cdot(2h)!!^2\,a^{2h-1}}{(2h+1)!!}\,q_{t-2,h} = \frac{(t+2h+1)(2h)!!^2\,a^{2h-1}}{(2h+1)!!}\,q_{t-2,h} =$$

$$= -\frac{(2h+2)!!^2\,a^{2h+1}}{(t+2h+3)(2h+1)!!}\,q_{t,h+1}$$

si moltiplichi ora primo e secondo membro di tale relazione per -1, e primo e secondo membro della (4-20) per $\dfrac{1}{t+2h+3}$, si eguaglino quindi i primi membri delle relazioni che così si ottengono, si avrà con ciò:

$$t\sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2\,a^s}{(s+2)!!\,(s-2h+1)!!}\,q_{t-2,\frac{s+1}{2}} = \tag{4-23}$$

$$= - \frac{t+2}{t+2h+3} \sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 a^s}{(s+2)!!(s-2h-1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

e sommando questa, membro a membro, con l'identità:

(4-24)
$$-\frac{1}{2} \sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+2) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t-2,\frac{s+1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1))!!} q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

si avrà:

(4-25)
$$\frac{1}{2} \sum_{2h+1}^{t-2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s-2) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t-2,\frac{s+1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(t-2h+1)}{(t+2h+3)} \sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+4) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}}$$

e quindi, in definitiva, ricordando la (4-21) e che per ipotesi è $h \neq \frac{t+1}{2}$, quanto si voleva dimostrare:

$$\sum_{2h+1}^{t}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t+s+4) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t,\frac{s+1}{2}} = 0$$

Si riconosce poi, facilmente, che, agli effetti della completa riprova della validità della (4-7) quando ai b_t^s si attribuiscano i valori assegnati dalle relazioni generali (4-6), l'ipotesi della parità di $\frac{t+1}{2} + h$ non è restrittiva; infatti, dimostrata la validità della (4-18) è simultaneamente dimostrata, in virtù delle:

$$(t+s+4)\, q_{t,\frac{s+1}{2}} = (t-s+2)\, q_{t+2,\frac{s+1}{2}}$$

la seguente identità:

$$\sum_{2h+1}^{t+2}{}_s \frac{(s+1)!!^2 (t-s+2) a^s}{(s+2)!!(s-2h+1)!!} q_{t+2,\frac{s+1}{2}} = 0$$

ove $\frac{t+3}{2} + h$ è dispari e che corrisponde alla (4-18) nel caso dispari.

5. — La particolare classe di funzioni armoniche nello spazio, ortonormali sul cerchio σ.

La generica funzione

$$\Gamma_t(x, y, z) = \sum_{-1}^{t}{}_s\, b_t^s \cdot V_s(x, y, z) = \sum_{-1}^{t}{}_s\, b_t^s \int_\sigma \mu^s \frac{1}{r}\, d\sigma \tag{5·1}$$

combinazione lineare delle funzioni armoniche $\overline{V_s}$, considerate in (1), secondo i coefficienti b_t^s, caratterizzati in (4), si identifica su σ con il polinomio $\overline{\Gamma}_t(\varrho^2)$. Il sistema formato dalle funzioni $\{\Gamma_t\}$ è quindi la cercata classe di funzioni armoniche nello spazio, ortonormali sul cerchio $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$.

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] - C. CATTANEO: « *Sul calcolo di alcuni potenziali e sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi armonici* », Atti del Sem. Matem. e Fisico della Università di Modena, Vol. III, 1948-49.

[2] - C. CATTANEO: « *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto* », Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, Vol. VI, Fasc. 1-2, 1952.

[3] - R. COURANT AND D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publ. Inc., New-York, 1953.

[4] G. VITALI e G. SANSONE: *Moderna Teoria delle funzioni di variabile reale*, II ed., Zanichelli, Bologna, 1946.