Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

P. Cartier

Remarques sur le théorème de Birkhoff-Witt

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_1_0>

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE BIRKHOFF-WITT

par P. CARTIER (Paris)

1. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'anneau commutatif A. On notera $T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle du A-module $\mathfrak{g}$, algèbre graduée par les sous-modules $T_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}$ (n facteurs) (cf. Bourbaki, Algèbre ch. III, Hermann, Paris). On posera $J_1(\ ) = (0)$ et, pour $n \geq 2$, on notera $J_n(\mathfrak{g})$ le sous-module de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme :

$$(1) \quad x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1} \otimes (x_p \otimes x_{p+1} - x_{p+1} \otimes x_p - [x_p, x_{p+1}]) \otimes x_{p+2} \otimes \cdots \otimes x_m$$

pour $1 \leq p < m \leq n$ et $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{g}$. Enfin, l'on appellera $J(\mathfrak{g})$ la réunion de la suite croissante des sous-modules $J_n(\mathfrak{g})$ de $T(\mathfrak{g})$, idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$.

Ceci étant posé, nous rappellerons le théorème suivant, dû à M. Lazard (Publ. Sci. Univ. Alger, A, I, n⁰ 2, 1954, pp. 281-294) :

THÉORÈME : *Si le module $\mathfrak{g}$ est limite inductive d'une famille de modules $\mathfrak{g}_\alpha$ dont chacun est somme directe de sous-modules monogènes, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété suivante :*

$$(\mathrm{P}): \qquad J(\mathfrak{g}) \cap (T_1(\mathfrak{g}) + \ldots + T_n(\mathfrak{g})) = J_n(\mathfrak{g}) \qquad \text{pour } n \geq 1$$

COROLLAIRE 1 (Birkhoff-Witt) : *Si le module $\mathfrak{g}$ est libre, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède la propriété* (P).

COROLLAIRE 2 : *Si l'anneau A est principal, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété* (P).

Nous nous proposons de montrer que le corollaire 2 est valable sous l'hypothèse plus faible que l'anneau A est un anneau de Dedekind. Pour ce faire, nous aurons besoin de rappeler les propriétés élémentaires des anneaux de fractions.

2. — Soit A un anneau commutatif, que, pour simplifier, nous supposerons sans diviseurs de 0. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on note $A_\mathfrak{p}$ le sous-anneau du corps des fractions de A formé des éléments a/s avec $a \in A$ et $s \in A - \mathfrak{p}$; si M est un A-module quelconque, on notera $M_\mathfrak{p}$ le $A_\mathfrak{p}$-module $A_\mathfrak{p} \otimes_A M$ et ε l'application A-linéaire $x \longrightarrow 1 \otimes x$ de M dans $M_\mathfrak{p}$. Les énoncés suivants sont alors valables :

1) Si A est un anneau de Dedekind et si $\mathfrak{p} \neq (0)$, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est principal.

2) Si le A-homomorphisme $f\colon M \longrightarrow N$ est injectif (resp. surjectif), il en est de même du $A_\mathfrak{p}$-homomorphisme $1 \otimes f\colon M_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}$.

D'après la propriété 2), on peut donc, pour tout sous-module N d'un A-module M, identifier $N_\mathfrak{p}$ à un sous-module de $M_\mathfrak{p}$.

3) Avec l'identification précédente, on a $(N \cap N')_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} \cap N'_\mathfrak{p}$, quels que soient les sous-modules N et N' de M.

4) Si M, N, N' sont trois A-modules tels que $M \supset N \supset N'$ et si l'on a $N_\mathfrak{p} = N'_\mathfrak{p}$ pour tout idéal *maximal* $\mathfrak{p}$ de A, on a $N = N'$

5) Il existe un isomorphisme unique de $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$ sur $(M \otimes_A N)_\mathfrak{p}$ qui applique $\varepsilon(m) \otimes \varepsilon(n)$ sur $\varepsilon(m \otimes n)$.

3. — Soit de nouveau $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'*anneau de Dedekind* A. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le $A_\mathfrak{p}$-module $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie, déduite de celle de $\mathfrak{g}$ par extension des scalaires. D'après 5), on peut identifier les modules $(T_n(\mathfrak{g}))_\mathfrak{p}$ et $T_n(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$ et par suite, les modules $T(\mathfrak{g})_\mathfrak{p}$ et $T(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$; de plus, comme le $A_\mathfrak{p}$-module $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ est engendré par $\varepsilon(\mathfrak{g})$ et que les éléments de la forme (1) dépendent linéairement de chacun des x_i, dans l'identification précédente, le module $J_n(\mathfrak{g})_\mathfrak{p}$ est identifié à $J_n(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$.

Comme l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est principal d'après 1) pour $\mathfrak{p} \neq (0)$, le théorème de Lazard fournit l'égalité suivante :

$$J_n(\mathfrak{g}_\mathfrak{p}) = J(\mathfrak{g}_\mathfrak{p}) \cap \left(\sum_{i=1}^{n} T_i(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})\right) \tag{2}$$

D'après les identifications précédentes et la propriété 3) précédente la formule (2) s'écrit aussi :

$$J_n(\mathfrak{g})_\mathfrak{p} = \left(J(\mathfrak{g}) \cap \left(\sum_{i=1}^{n} T_i(\mathfrak{g})\right)\right)_\mathfrak{p}. \tag{3}$$

Comme, dans la formule (P), le sous-module $J_n(\mathfrak{g})$ est toujours trivialement contenu dans le membre de gauche, la formule (3) et la propriété (4) montrent que *l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'anneau de Dedekind A vérifie la propriété* (P) (1).

4. — Pour terminer, nous allons montrer par un contre-exemple que la propriété (P) n'est pas vérifiée pour toute algèbre de Lie (2).

La propriété (P) implique la formule:

$$J(\mathfrak{g}) \cap T_1(\mathfrak{g}) = (0)$$

et par suite, comme $J(\mathfrak{g})$ est l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, la propriété (P) implique la propriété suivante;

(P') *Il existe une application linéaire* injective f *de* $\mathfrak{g}$ *dans une algèbre associative* U *vérifiant l'identité:*

$$f([x, y]) = f(x) f(y) - f(y) f(x) \tag{4}$$

C'est à cette propriété (P') que nous allons donner un contre-exemple.

A = algèbre extérieure à trois générateurs x_i sur le corps à 2 éléments (3).

$\mathfrak{a}$ = algèbre de Lie sur A de base $\{e_i, e_{ij}\}$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ avec $[e_i, e_j] = e_{ij}$ pour $i \neq j$, les autres crochets étant nuls, en convenant que $e_{ij} = e_{ji}$ pour $i > j$.

$\mathfrak{h}$ = idéal de $\mathfrak{a}$ engendré par $u = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$.

On a $x_i^2 = 0$, mais $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ dans A. Dans $\mathfrak{a}$, on a $[x, [y, z]] = 0$ donc l'identité de Jacobi est vérifiée; de plus $\mathfrak{h}$ est, comme module, engendré par u et les $[u, e_i] = x_j e_{ki} - x_k e_{ij}$ $((ijk)$ permutation de $(123))$.

Soit f une application linéaire de $\mathfrak{a}$ dans une algèbre associative U vérifiant l'identité (4) et soit $v = \sum_{i<j} x_i x_j e_{ij}$. On a:

$$f(v) = \sum_{i<j} x_i x_j f(e_{ij}) = \sum_{i<j} x_i x_j (f(e_i) f(e_j) + f(e_j) f(e_i)) = f(u)^2$$

donc, si f est nulle sur $\mathfrak{h}$, on aura $f(v) = 0$. Cependant v n'appartient

(1) La démonstration prouve en fait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'anneau A a la propriété (P) si cette propriété est possédée par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}$ sur l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A.

(2) Un contre-exemple plus compliqué est dû à Chirchov, dont on trouvera la référence dans l'article cité de M. Lazard.

(3) On rappelle qu'en caractéristique 2, une algèbre extérieure est commutative.

pas à $\mathfrak{h}$: soit φ la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définie par $\varphi(e_i) = 0$ et $\varphi(e_{ij}) = x_k$ ((ijk) permutation de (123)). On aura $\varphi(u) = 0$, $\varphi([u , e_i]) = = x_j^2 - x_k^2 = 0$, donc $\varphi(\mathfrak{h}) = (0)$, mais par contre :

$$\varphi(v) = \sum_{i<j} x_i\, x_j\, \varphi(e_{ij}) = 3\, x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 \neq 0.$$

On a donc prouvé que *toute application linéaire* f' *de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}/\mathfrak{h}$ *dans* U *qui vérifie l'identité* (4) *annule l'élément non nul* $\bar{v} = v \bmod \mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$.