ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BRUNO FORTE

Sul problema ergodico ristretto nella statistica dei sistemi olonomi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 1 (1959), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_1_1_0>

SUL PROBLEMA ERGODICO RISTRETTO NELLA STATISTICA DEI SISTEMI OLONOMI

di Bruno Forte (Pisa)

1. — Premesse. Si consideri un sistema olonomo ad n gradi di libertà, il cui generico stato si può quindi supporre assegnato dai valori di una n-pla di coordinate lagrangiane $(q_1, \ldots, q_n)$ e dai corrispondenti momenti cinetici $(p_1, \ldots, p_n)$.

Sia Ω il luogo dei punti $\omega \equiv (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ dello spazio R^{2n} delle $2n$-ple di numeri reali, cui corrispondono stati possibili per il sistema in esame. Il moto di quest'ultimo si supponga poi caratterizzato dalle classiche equazioni di Hamilton [1]:

$$\text{(1-1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d q_h}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \frac{d p_h}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{aligned} \right. \qquad (h = 1, \ldots, n).$$

Sulla funzione H, hamiltoniana del dato sistema, si formulino le seguenti ipotesi:

a) che sia indipendente dal tempo esplicito,

b) che sia di classe C^1 in Ω, sia cioè definita e continua in Ω insieme alle sue derivate prime.

In virtù di queste ipotesi vale per il problema di Cauchy relativo al sistema (1-1) un teorema di esistenza ed unicità della soluzione; con ciò ad ogni punto $\omega \in \Omega$ ed in corrispondenza ad ogni valore della variabile temporale t viene ad essere associato uno ed un sol punto $\omega_t = T_t\,\omega$, che individua lo stato del sistema all'istante t, nel moto relativo allo stato iniziale caratterizzato in Ω dal punto ω.

Si supporrà infine che per ogni valore di t nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ ω_t appartenga ad Ω, che cioè Ω sia invariante per tutte le trasformazioni biunivoche e continue T_t sopra considerate ovvero, equivalentemente, che Ω sia luogo di traiettorie complete.

Sia $f(\omega)$ una generica funzione definita e sommabile in Ω e sia:

$$\bar{f} = \frac{\int_\Omega f(\omega)\, M(\omega)\, d\,\omega}{\int_\Omega M(\omega)\, d\,\omega} \tag{1-2}$$

la sua *media in fase o statistica* rispetto alla funzione di distribuzione $M(\omega)$ (1) e relativa all'insieme Ω.

È classicamente noto [2] che uno dei problemi basilari della meccanica statistica è quello di riconoscere quale relazione possa intercorrere tra la media in fase, definita dalla (1-2), e la media temporale definita dalla relazione:

$$\widehat{f} = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\omega_t)\, d\,t\,, \tag{1-3}$$

quando tale limite esista finito.

Il problema citato, comunemente noto come *problema ergodico*, è stato risolto nella forma seguente:

1) si è provato che per ogni funzione $f(\omega)$ definita e sommabile in Ω esiste, finito, il limite

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\omega_t)\, d\,t\,,$$

in corrispondenza a quasi tutte (2) le traiettorie di Ω [3]. Si può così definire per ogni $f(\omega)$ siffatta la media temporale.

---

(1) che, per la richiesta invarianza della media statistica rispetto al gruppo di trasformazioni T_t, dovrà essere un integrale del sistema (1-1).

(2) cioè a meno di un insieme Ω_0 di traiettorie complete per il quale sia:

$$\int_{\Omega_0} M(\omega)\, d\,\omega = 0\,.$$

2) nella ipotesi che il gruppo abeliano G delle trasformazioni T_t goda della transitività metrica ([3]) si è dimostrato inoltre (*teorema ergodico individuale* di D. G. Birkhoff [4]) che tra la media temporale $\widehat{f}$ e la media in fase $\overline{f}$ sussiste la semplice relazione di eguaglianza $\widehat{f} = \overline{f}$, in corrispondenza a quasi tutte le traiettorie di Ω ([2]).

A proposito di quest'ultimo risultato è bene ricordare che la transitività metrica di G è condizione *necessaria e sufficiente* perchè la media temporale di *ogni* funzione $f(\omega)$ definita e sommabile in Ω abbia lo stesso valore in corrispondenza a quasi tutte le traiettorie in Ω, risultando quindi eguale alla sua media in fase [5].

L'ipotesi di transitività metrica, con la quale il problema ergodico è stato risolto, traduce una proprietà poco comune e comunque difficile da verificare. Ciò risulta e dalla complessità degli esempi di sistemi per i quali esiste, nel rispettivo spazio delle fasi, un insieme invariante che soddisfa a tale ipotesi, e dalla circostanza che per sistemi molto semplici, quale l'oscillatore elementare, non è possibile trovare un insieme, luogo di traiettorie complete del rispettivo punto rappresentativo, che la soddisfi, ad eccezione del caso particolare in cui Ω coincida con una delle traiettorie {[3], [6]}.

Il carattere restrittivo della proprietà in questione è tuttavia largamente compensato dal fatto che la transitività metrica assicura l'eguaglianza delle medie temporali alle medie in fase per *ogni* funzione sommabile e quindi per una classe di funzioni assai ampia rispetto agli scopi della meccanica statistica. Si può anzi affermare che per non volere limitare la classe delle funzioni per le quali valga l'eguaglianza $\widehat{f} = \overline{f}$ si giunge a dare una condizione necessaria e sufficiente così restrittiva.

Utile ed opportuno si manifesta a questo punto un suggerimento di P. G. Bordoni ([4]), che induce a prendere in considerazione la classe $\mathcal{F}_f$ delle funzioni $\varphi_f(\omega)$ definite e sommabili in Ω e funzionalmente dipendenti da una data funzione $f(\omega)$, pure definita e sommabile in Ω, e a risolvere quindi il problema ergodico nell'ambito più ristretto rappresentato da questa classe di funzioni. Tale problema, che chiameremo *problema ergodico ristretto* (alla classe $\mathcal{F}_f$), si traduce nella ricerca di condizioni almeno sufficienti sulla funzione generatrice $f(\omega)$ della classe $\mathcal{F}_f$ atte ad assicurare la

---

([3]) con ciò intendendosi che tutti i sottoinsiemi di Ω invarianti per le trasformazioni T_t abbiano come misura relativa a quella di Ω, 0 o 1. Questa ipotesi è del tutto identica a quella che alcuni autori chiamano irriducibilità metrica dell'insieme invariante Ω.

([4]) lavoro in corso di pubblicazione.

eguaglianza:

$$\widehat{\varphi_f} = \overline{\varphi_f} \text{ per ogni } \varphi_f(\omega) \in \mathcal{F}_f\,. \tag{1-4}$$

Nel presente lavoro ci si propone di indicare una condizione sufficiente per la validità del teorema ergodico nel problema ristretto; teorema che, con tale ipotesi, verrà dimostrato nel § 2. Ci si preoccupa poi, nel § 3, di illustrare il significato meccanico di detta condizione. Essa verrà quindi esaminata, sempre nel § 3, alla luce della condizione necessaria, formulata da P. G. Bordoni (4), per la validità della (1-4) nel problema ristretto. Verranno anche posti in risalto quei casi particolari nei quali la condizione sufficiente, formulata nel § 2, risulta anche necessaria alla validità del teorema ergodico (5).

2. — CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ERGODICO RISTRETTO AD UNA CLASSE DI FUNZIONI $\mathcal{F}_f$. Sia $f(\omega)$ una funzione definita in Ω e tale che:

a) detta (H, f) la sua parentesi di Poisson (6), la sua reciproca $1/(H, f)$ sia una funzione definita in Ω ed ivi di classe L^2.

Indicati poi con η_1 e η_2, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore della data funzione $f(\omega)$, si supponga ancora che:

b) essa assuma in Ω tutti i valori compresi tra η_1 e η_2, cioè definisca una applicazione di Ω sull'intervallo (η_1, η_2) dello spazio R^1 dei numeri reali.

Si considerino quindi gli insiemi W_1 e W_2 dei punti (7) di Weierstrass della $f(\omega)$ relativi, rispettivamente, al suo estremo inferiore η_1 ed al suo estremo superiore η_2; alla (a) e (b) si aggiunga, inoltre, l'ipotesi che:

c) il gruppo continuo di trasformazioni T_t, caratterizzato dalle soluzioni del sistema di equazioni (1-1), subordini su W_1 e, rispettivamente, su W_2 un gruppo discreto di trasformazioni, che verranno qui indicate con T_n^1 e T_n^2. Le prime T_n^1, operando su W_1, associano al generico suo punto ω_{η_1} la totalità, per ipotesi discreta (numero finito o infinità numerabile),

---

(5) nei quali casi figura, ad esempio, l'oscillatore elementare.

(6) definita, come al solito, dalla relazione:

$$(H, f) = \sum_1^n{}_h \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} - \frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} \right\}.$$

(7) appartenenti a Ω o alla sua frontiera, potendo Ω essere aperto.

delle successive posizioni occupate in W_1 da quell'elemento rappresentativo dello stato del sistema in esame che allo istante $t = 0$ si trova in ω_{η_1}; analogamente le seconde T_n^2, che operano su W_2, associano al generico suo punto ω_{η_2} la totalità delle successive posizioni occupate in W_2 da quell'elemento che all'istante iniziale si trova in ω_{η_2}. Si supporrà cioè, in breve, che quasi tutte le traiettorie in Ω abbiano un numero finito o una infinità numerabile di punti in comune con W_1 e W_2, rispettivamente. Si supporrà infine $n \to +\infty$ per almeno uno dei due gruppi discreti T_n^2 e T_n^2 (8).

Si consideri quindi la totalità $\mathcal{F}_f$ delle funzioni $\varphi_f(\omega)$ funzionalmente dipendenti dalla $f(\omega)$ e, come tali, definite nell'intervallo (η_1, η_2) ed ivi di classe L^2 (9). Si intende qui provare per ogni funzione $\varphi_f(\omega) \in \mathcal{F}_f$ il seguente *teorema ergodico individuale:*

TEOREMA: Nella ipotesi che sia

$$1/(H, f) \in \mathcal{F}_f \tag{i}$$

la media temporale di ogni funzione $\varphi_f(\omega) \in \mathcal{F}_f$ è eguale per quasi tutte le traiettorie in Ω e si identifica, di conseguenza [5], con la sua media in fase.

Per provarlo si fissi l'attenzione sul generico elemento ω che all'istante $t = 0$ si trovi in W_1. Siano t' e t'' due istanti successivi relativi al transito di tale elemento, rispettivamente, per W_1 e W_2; posto:

$$\psi(\eta) = t' + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{1}{(H, f)}\, d\eta \tag{2-1}$$

in virtù del teorema di integrazione per sostituzione di De Vallée Poussin [7], certamente valido per le ipotesi formulate sulle funzioni $\varphi_f(\omega)$ (10), si ha:

$$\int_{t'}^{t''} \varphi_f(\omega_t)\, dt = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi_f[\psi(\eta)] \frac{1}{(H, f)}\, d\eta = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi(\eta) \frac{1}{(H, f)}\, d\eta \tag{2-2}$$

---

(8) questa condizione equivalente all'imporre ai successivi istanti di transito dell'elemento ω per W_1 (o W_2) di essere una infinità numerabile $\{t'_n\}$ con $t'_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, può essere sostituita con una ipotesi meno restrittiva; questa consiste nel supporre che comunque si fissi un istante $\overline{t'}$ si possa trovare un valore, finito o meno, t' del tempo t, con $|t'| > |\overline{t'}|$, in corrispondenza al quale l'elemento ω transita per W_1 (W_2).

(9) il che assicurerà l'integrabilità del prodotto $\varphi_f(\eta) \dfrac{1}{(H, f)}$ sull'intervallo (η_1, η_2).

(10) cfr. la nota (9).

Detto t''_n l'istante dell'n-simo transito dell'elemento considerato per W_2 ([11]), si consideri ora la media temporale

$$\frac{1}{t''_n} \int_0^{t''_n} \varphi_f(\omega_t)\, d\, t \tag{2-3}$$

della generica funzione $\varphi_f(\omega)$ relativa alla sua traiettoria e all'intervallo di tempo $(o,\ t''_n)$. L'integrale che figura nella espressione di tale media si può riguardare come somma di più integrali del tipo

$$\int_{\Delta t_i} \varphi_f(\omega_t)\, d\, t \tag{2-4}$$

ove Δt_i è l'intervallo di tempo, contenuto in $(o,\ t''_n)$, che intercorre tra due successivi istanti di transito dell'elemento ω per W_1 e W_2. Per la (2-2) si avrà perciò:

$$\int_{\Delta t_i} \varphi_f(\omega_t)\, d\, t = \pm \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi_f(\eta) \frac{1}{(H, f)}\, d\, \eta \tag{2-5}$$

valendo il segno superiore se nell'intervallo di tempo Δt_i l'elemento ω partendo da un punto di W_1 perviene in un punto di W_2, il segno inferiore in caso contrario. Se si indica allora con m_n la differenza tra il numero di volte che l'elemento considerato passa, nell'intervallo di tempo (o, t''_n), dall'insieme W_1 a W_2 e il numero di volte che nel medesimo intervallo di tempo passa da W_2 a W_1 si avrà perciò:

$$\int_0^{t''_n} \varphi_f(\omega_t)\, dt = \Sigma_i \int_{\Delta t_i} \varphi_f(\omega_t)\, dt = m_n \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi_f(\eta) \frac{1}{(H, f)}\, d\eta \tag{2-6}$$

e quindi:

$$\frac{1}{t''_n} \int_0^{t'_n} \varphi_f(\omega_t)\, dt = \frac{m_n}{t''_n} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi_f(\eta) \frac{1}{(H, f)}\, d\eta\,. \tag{2-7}$$

([11]) Si suppone qui, per maggiore chiarezza, che gli istanti successivi nei quali l'elemento ω transita per W_2 siano una infinità numerabile, ovvie risultano le modifiche da apportare al procedimento dimostrativo nella ipotesi che ciò si verifichi solo per quanto concerne gli istanti di transito per W_1.

D'altra parte per la funzione $\varphi_f^*(\omega) = 1$ ovunque in Ω, funzione certamente appartenente alla classe $\mathcal{F}_f$ sopra considerata, in base alla (2-7) è:

$$1 = \frac{m_n}{t_n''} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{(H, f)} d\eta, \tag{2-8}$$

e da questa risulta:

$$\frac{m_n}{t_n''} = \frac{1}{\displaystyle\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{(H, f)} d\eta},$$

da cui in definitiva si ha:

$$\frac{1}{t_n''} \int_0^{t_n''} \varphi_f(\omega_t)\, dt = \frac{\displaystyle\int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi_f(\eta) \frac{1}{(H, f)} d\eta}{\displaystyle\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{(H; f)} d\eta}. \tag{2-9}$$

Dalla esistenza del limite ([12]):

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi_f(\omega_t)\, dt \tag{2-10}$$

segue che esso non può che eguagliare il valore dell'integrale a secondo membro della (2-9) ed essere di conseguenza indipendente dalla traiettoria dell'elemento ω, cui si riferisce tale limite e il primo membro della (2-9). Ciò rende acquisito il teorema ergodico sopra enunciato. Per la discussione del significato e della portata delle ipotesi per esso formulate si rinvia al successivo § 3.

3. — Breve esame delle ipotesi relative al teorema ergodico nel problema ristretto. Detto I il generico insieme misurabile nell'intervallo (η_1, η_2) riconosciamo intanto che le ipotesi (*a*), (*b*), (*c*) e (*i*) del pa-

---

([12]) vedi quanto detto all'ottavo capoverso dal § 1, e, specificatamente la citazione [3].

ragrafo precedente, sulle quali vogliamo fermare la nostra attenzione, implicano la seguente proprietà:

Non si può trovare

1) un sottoinsieme misurabile I dell'intervallo (η_1, η_2),

2) un sottoinsieme invariante (13) Ω' in Ω di misura positiva,

tali che

1') sia vuota l'intersezione di Ω' con l'immagine W_I dell'insieme I per il tramite della f^{-1} (14),

2') sia positiva la misura di W_I.

Infatti le ipotesi anzidette assicurano che la media temporale della particolare funzione della classe $\mathcal{F}_f$ così definita:

$$\begin{cases} \delta_I(\omega) = 1 & \text{per} \quad \omega \in W_I \\ \delta_I(\omega) = 0 & \text{per} \quad \omega \in \Omega - W_I \end{cases}$$

ha il medesimo valore in corrispondenza a quasi tutte le traiettorie in Ω. Tale valore coincide con quello assunto, in corrispondenza all'insieme I, dalla funzione di insieme:

$$\mu(I) = \frac{\int_I \frac{1}{(H, f)} d\eta}{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{(H, f)} d\eta} \tag{3-1}$$ (15)

e, per la sua indipendenza dalla singola traiettoria in corrispondenza alla quale è calcolato [5], si identifica con la media in fase della funzione $\delta_I(\omega)$ considerata e quindi con il rapporto tra l'estensione di W_I e quella di Ω. D'altra parte l'esistenza in $\Omega - W_I$, ove $\delta_I(\omega)$ vale 0, di un sottoinsieme invariante di misura positiva implica la eguaglianza a zero delle medie temporali di detta funzione in corrispondenza a tutte le traiettorie di un sottoinsieme di Ω (Ω') di misura positiva e quindi la esistenza di un insieme di traiettorie (Ω'), di misura positiva, relativamente alle quali la media temporale di una funzione della classe $\mathcal{F}_f$ non coincide con la media in fase; ciò, per quanto stabilito, è assurdo.

---

(13) cioè luogo di traiettorie complete.

(14) luogo dei punti ω in Ω per i quali è $f(\omega) \in I$.

(15) che è una misura di probabilità definita sull'anello dei sottoinsiemi W_I di Ω, immagini di sottoinsiemi misurabili I dell'intervallo (η_1, η_2).

Come si vede dalla dimostrazione, la proprietà enunciata è una diretta conseguenza della validità di un teorema ergodico ed è perciò, come del resto ha anche riconosciuto P. G. Bordoni (4), una condizione *necessaria* per quest'ultimo (16); essa è quindi una conseguenza indiretta delle ipotesi (*a*), (*b*), (*c*) e (*i*). Si può tuttavia osservare che tale condizione necessaria è una diretta conseguenza di dette ipotesi e, specificatamente, di quella (la (*c*)) riguardante il gruppo delle trasformazioni T_t quando si postuli, ulteriormente, la continuità della funzione $f(\omega)$, generatrice della classe $\mathcal{F}_f$, in tutti i punti di Ω salvo, al più, nei punti di W_1 e W_2. Infatti, in tale caso, la funzione generatrice $f(\omega_t)$, pensata come funzione del tempo in corrispondenza alla generica traiettoria Γ di Ω, per le ammesse ipotesi di regolarità del moto in esame (16), è continua in tale variabile (esclusi al più quei valori di t per i quali sia $\omega_t \in W_1$ ovvero $\omega_t \in W_2$) e quindi assume tutti i valori compresi nell'intervallo (η_1, η_2); di qui l'asserto.

D'altra parte dette ipotesi ed in particolare la (*i*) sono sufficienti ma *non* necessarie per la validità di un teorema ergodico individuale nel problema in questione; si possono dare infatti esempi di sistemi e di classi di funzioni $\mathcal{F}_f$ per i quali pur non essendo soddisfatte alcune di dette ipotesi sussiste l'eguaglianza delle medie temporali alle medie in fase (17).

Questa circostanza, seppure limita, come c'era del resto da attendersi, la portata dei risultati conseguiti, non ne intacca l'utilità, poichè le condizioni imposte e in particolare la (*i*) sono di facile applicabilità per la determinazione, in corrispondenza ad un dato sistema meccanico, di classi di funzioni per le quali le medie temporali coincidano con le rispettive medie in fase. Non si può poi trascurare il significato fisico della condizione (*i*), dal quale, peraltro, ha preso spunto il presente lavoro, anche se nel tradurlo non si può evitare di far uso di un linguaggio non del tutto ortodosso; per riconoscere tale significato si noti che, sotto ipotesi di sufficiente regolarità della funzione generatrice $f(\omega)$, gli insiemi W_η dei punti di Ω per i quali è $f(\omega) = \eta$ sono ipersuperficie (regolari) in Ω, dette allora $\Sigma_{\bar{\eta}}$ e $\Sigma_{\bar{\eta}+\Delta\eta}$ quelle tra tali ipersuperficie che sono caratterizzate, rispettivamente, dai valori $\bar{\eta}$ e $\bar{\eta} + \Delta\eta$ della $f(\omega)$, poichè per essa ed in corrispondenza alla generica traiettoria e al suo generico punto è:

$$df = \left\{ \sum_1^n {}_h \frac{\partial f}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial f}{\partial p_h} \dot{p}_h \right\} dt = (H, f)\, dt$$

(16) vedi il paragrafo introduttivo 1.

(17) che possono, tra l'altro, facilmente essere dedotti prendendo in considerazione uno degli esempi di sistemi [8] per i quali il gruppo continuo di trasformazioni T_t gode della transitività metrica e, in relazione con esso, una funzione $f(\omega)$ per la quale sia $1/(H,f) \notin \mathcal{F}_f$; la transitività metrica assicurerà l'eguaglianza delle medie temporali alle medie in fase per le funzione $\varphi_f \in \mathcal{F}_f$ pur non essendo soddisfatta la ipotesi (*i*).

la quantità:

$$1/(H\,,f) = 1/\text{grad } H \times \text{grad} f$$

rappresenta, a meno del fattore $\Delta\eta$ e a meno di infinitesimi superiore. quando sia calcolata in corrispondenza al generico punto di Σ_{η}^{-}, il tempo impiegato dal punto rappresentativo dello stato del sistema, a partire dall'istante in cui occupa tale posizione su Σ_{η}^{-}, per pervenire su $\Sigma_{\eta+\Delta\eta}^{-}$, in generale detto tempo dipenderà dalla particolare posizione di partenza scelta su Σ_{η}^{-}, varierà cioè da traiettoria a traiettoria in Ω; per le ipotesi (i), essendo $1/(H, f)$ costante su Σ_{η}^{-}, esso avrà lo stesso valore in corrispondenza alle diverse traiettorie che traversano la ipersuperficie Σ_{η}^{-}.

Proprio il significato fisico della condizione (i) pone in luce come essa possa essere oltrechè sufficiente anche necessaria alla validità di un teorema ergodico in taluni casi particolari.

Si consideri, ad esempio, un sistema per il quale tutte le soluzioni delle corrispondenti equazioni hamiltoniane (1-1) sono periodiche e di eguale periodo [18] e ci si limiti a quelle funzioni generatrici $f(\omega)$ per le quali le trasformazioni subordinate dalle T_t sulle corrispondenti varietà Σ_η (luogo dei punti $\omega \in \Omega$ per i quali è $f(\omega) = \eta$) si riducono alla identità; in tal caso la condizione (i) è necessaria per l'eguaglianza delle medie temporali alla media in fase per ogni funzione $\varphi_f(\omega) \in \mathcal{F}_f$. Per riconoscerlo si fissi l'attenzione su una qualunque di tali varietà, sia essa Σ_a; sia poi Σ_b una seconda di dette varietà relativa ad un valore $b \neq a$ della data funzione $f(\omega)$. Si consideri quindi la funzione $\delta_f(\omega) \in \mathcal{F}_f$ così definita: eguale a 1 nei punti della regione delimitata da Σ_a, da Σ_b e dalla frontiera di Ω, eguale a 0 altrove. Sia ora A un punto, del resto generico, di Σ_a e Γ_A la traiettoria che passa per esso, si indichi poi con B il punto in cui questa traiettoria incontra la varietà Σ_b. Distinto infine con τ il periodo del moto in esame, la media temporale della particolare funzione $\delta_f(\omega)$ considerata, calcolata in corrispondenza alla traiettoria Γ_A, è data dalla relazione:

$$\widehat{\delta_f} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \delta_f(\omega_t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_{\widehat{AB}} \frac{df}{(H\,,f)} \tag{3-2}$$

e rappresenta il rapporto tra il tempo di permanenza del punto rappresentativo del moto in esame nella regione sopra caratterizzata, ove $\delta_f(\omega)$ è eguale a 1, e il periodo del moto stesso.

---

[18] come è nel caso di un oscillatore elementare.

Se si ammette l'eguaglianza delle medie temporali di ogni funzione $\varphi_f(\omega) \in \mathcal{F}_f$ alla rispettiva media in fase per quasi tutte le traiettorie in Ω, se ne deduce in particolare che il valore dell'integrale:

$$\int_{\widehat{BA}} \frac{df}{(H,f)} \tag{3-4}$$

e quindi, applicando il teorema della media, della quantità:

$$\overline{\frac{1}{(H,f)}}(b-a),$$

è indipendente dalla particolare traiettoria prescelta e quindi dal punto A su Σ_a. Si ha così che $\overline{\frac{1}{(H,f)}}$, cioè il valore medio della funzione $\frac{1}{(H,f)}$ su Γ_A rispetto alla funzione $f(\omega)$, non dipende dal punto A; l'arbitrarietà che vi è nella scelta del secondo valore b della funzione generatrice $f(\omega)$ e quindi della varietà Σ_b assicura poi che proprio $\frac{1}{(H,f)}$ non dipende dal punto A e quindi assume lo stesso valore in corrispondenza al generico punto di Σ_a; di qui la necessarietà della condizione (i).

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] - T. Levi-Civita e U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Razionale,* Zanichelli, Bologna (1951).

[2] - D. G. Birkhoff: *Recent contribution to the ergodic theory,* Nat. Acad. Sci. Proc., vol. 18, pp. 279-282 (mar. 1932), in coll. con B. O. Koopman.
D. G. Birkhoff: *Probability and physical systems,* Bull. Amer. Math Soc., vol. 38, pp. 361-379, (Giu. 1932).

[3] - E. Hopf: *Ergodentheorie, Ergebnisse der Math.,* Springer Verlag, Berlino (1937).

[4] . D. G. Birkhoff: *Proof of the ergodic theorem,* Nat. Acad. Sci. Proc., vol. 17, pp. 650-655, (dic. 1931).

[5] - A. I. Khintchin: *Mathematical foundations of statistical Mechanics,* Dover Publ. Inc. Co., New York (1949).

[6] - A. C. Zaanen: *An introduction to the theory of integration,* North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1958).

[7] - L. Tonelli: *Fondamenti di calcolo delle variazioni,* Zanichelli, Bologna (1921).

[8] - D. G. Birkhoff: *What is the ergodic theorem?,* Amer. Math. Mo., vol. 49, pp. 222-226, (1942).