ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA PASSAQUINDICI

Sulla stabilità dei polinomi e delle matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 1 (1959), p. 77-88

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_1_77_0>

SULLA STABILITÀ DEI POLINOMI E DELLE MATRICI

di MARIA PASSAQUINDICI (Como)

In queste pagine [1] esponiamo in primo luogo alcune condizioni sufficienti perchè una matrice reale di ordine $n > 2$ definita od a radici caratteristiche tutte a parte reale non positiva rimanga tale variandone opportunamente gli elementi. Queste condizioni sono conseguenze di noti teoremi di LÉVY-HADAMARD, MÜLLER, OSTROWSKY, nonchè della rappresentazione dello spettro di una matrice sul piano complesso entro sistemi di cerchi o di ovali di Cassini [2].

Utilizzando il risultato del § 5 della nostra nota in collaborazione col prof. CHERUBINO, cit. [12], abbiamo potuto assegnare anche dei criteri di sufficienza perchè un polinomio stabile (o di HURWITZ), cioè a radici con parti reali tutte non positive, rimanga tale dopo aver incrementato uno o più coefficienti. Un importante risultato di S. FAEDO, cit. [13], permette di ampliare notevolmente la portata di condizioni simili.

Infine, sempre a mezzo del § 5 della Nota cit. [12], abbiamo assegnato un criterio sufficiente perchè alterando dello stesso conveniente incremento gli elementi di una o più righe e colonne di una matrice, ne venga conservata la preesistente stabilità del polinomio carattaristico.

---

(1) In questo lavoro sono esposti i risultati della seconda parte della mia tesi di laurea. La prima parte si trova nella Nota citata in (12). Ringrazio il prof. S. CHERUBINO per l'incoraggiamento che mi ha dato nel corso della ricerca.

(2) Alcuni di questi teoremi ed osservazioni li abbiamo trovati nel trattato di *Calcolo delle Matrici* del prof. S. CHERUBINO cit. (3); altre in un *Mémorial* di M. PARODI cit. (9) ed in due Note di A. OSTROWSKI cit. (10) e (11).

§ 1. Sulle matrici definite positive.

1. Consideriamo due matrici quadrate reali $A = [a_{rs}]$ e $M = [\mu_{rs}]$ di ordine n e la loro somma $A' = [a_{rs} + \mu_{rs}]$. Un noto teorema (3) ci dice che A' è definita positiva, cioè i suoi minori principali di tutti gli ordini hanno determinante positivo, se:

$$a_{rr} + \mu_{rr} > 0\,; \quad a_{rr} + \mu_{rr} > \sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | a_{rs} + \mu_{rs} |\,; \quad r = 1, \dots, n \tag{1.1}$$

oppure se:

$$a_{rr} + \mu_{rr} > 0\,; \quad a_{rr} + \mu_{rr} > \sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | a_{sr} + \mu_{sr} |\,; \quad r = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Quindi, essendo $a_{rr} + \mu_{rr} \geqq | \mu_{rr} | - | a_{rr} |$, $a_{rr} + \mu_{rr} \geqq | a_{rr} | - | \mu_{rr} |$: *Affinchè A' sia definita positiva è sufficiente che:*

$$\mu_{rr} > -a_{rr}\,; \quad r = 1, \dots, n \tag{1.3}$$

con l'aggiunta di una delle seguenti n-uple di diseguaglianze:

$$| \mu_{rr} | - \sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | \mu_{sr} | > \sum_{s=1}^{n} | a_{sr} |\,; \quad r = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

$$| \mu_{rr} | - \sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | \mu_{rs} | > \sum_{s=1}^{n} | a_{rs} |\,; \quad r = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

$$\sum_{s=1}^{n} | \mu_{rs} | < | a_{rr} | - \sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | a_{rs} |\,; \quad r = 1, \dots, n. \tag{1.6}$$

$$\sum_{s=1}^{n} | \mu_{sr} | < | a_{rr} | - \sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | a_{sr} |\,; \quad r = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

È evidente che per le (1.3)-(1.6) e (1.3)-(1.7) è necessario che la matrice A soddisfi rispettivamente alle condizioni:

$$\sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | a_{rs} | < | a_{rr} |\,; \quad r = 1, \dots, n \tag{α}$$

$$\sum_{s \neq r}^{s=1,\dots,n} | a_{sr} | < | a_{rr} |\,; \quad r = 1, \dots, n \tag{β}$$

---

(3) CHERUBINO S.: *Calcolo delle Matrici* [Monografia del C. N. R., Roma, Cremonese (1957)]: Cap. III, § 2, n. 10, pag. 214.

ciascuna delle quali (teorema di LÉVY-HADAMARD) [4] assicura la non singolarità di A. Le condizioni (1.4) e (1.5) necessitano che:

$$(\alpha') \qquad |\mu_{rr}| > \sum_{s\neq r}^{s=1,\dots,n} |\mu_{sr}|\,; \quad r = 1,\dots,n$$

$$(\beta') \qquad |\mu_{rr}| > \sum_{s\neq r}^{s=1,\dots,n} |\mu_{rs}|\,; \quad r = 1,\dots,n$$

e quindi che anche M sia non singolare.

OSSERVAZIONE 1ª: Se $M = \mu\,[1]$ [5], $\mu > 0$, le condizioni (1.3)-(1.6) e (1.3)-(1.7), ponendo $\varepsilon'' = \max |a_{rr}|$, se $a_{rr} < 0$, e $\varepsilon''' = \min a_{rr}$, se $a_{rr} > 0$, si riducono a:

$$(1.8) \qquad \mu > \max(\varepsilon'', -\varepsilon''') = \varepsilon''$$

$$(1.9) \qquad \mu < \frac{1}{n}\left(|a_{rr}| - \sum_{s\neq r}^{s=1,\dots,n} |a_{rs}|\right); \quad r = 1,\dots,n$$

$$(1.10) \qquad \mu < \frac{1}{n}\left(|a_{rr}| - \sum_{s\neq r}^{s=1,\dots,n} |a_{sr}|\right); \quad r = 1,\dots,n\,.$$

Indicando con ε_1' il secondo membro della diseguaglianza (1.9) e con ε_2' quello di (1.10), le condizioni (1.8)-(1.9) e (1.8)-(1.10) si scrivono:

$$(1.11) \qquad \varepsilon'' < \mu < \varepsilon_1'$$

$$(1.12) \qquad \varepsilon'' < \mu < \varepsilon_2'\,.$$

Le condizioni (1.4) e (1.5), nel caso di $M = \mu\,[1]$, $\mu > 0$, sono evidentemente assurde. Se ne deduce che:

$A' = A + \mu\,[1]$, $\mu > 0$, *è definita positiva se* μ *soddisfa a* (1.11) *oppure a* (1.12).

OSSERVAZIONE 2ª: Se A e M sono reali e simmetriche, anche $A' = A + M$ è reale e simmetrica. Per essa le condizioni (1.3)-(1.4) e (1.3)-(1.6) coincidono rispettivamente con le (1.3)-(1.5) e (1.3)-(1.7).

---

(4) ibidem, n. 9, pag. 212.

(5) [1] è la matrice i cui elementi sono tutti eguali a 1.

Se A e M sono emisimmetriche, oppure antisimmetriche, oppure emi-antisimmetriche, le condizioni sono le stesse che per A e M simmetriche, perchè esse riguardano unicamente i moduli degli elementi di A e di M.

§ 2. **Matrici a polinomio caratteristico stabile** (6).

2. La matrice A supponiamola reale e irriducibile. Siano soddisfatte le condizioni:

$$(2.1) \qquad a_{ss} < 0, \quad |\, a_{ss} \,| \geqq \sum_{r \neq s}^{r=1,\dots,n} |\, a_{sr} \,| \,; \quad s = 1, \dots, n$$

oppure

$$(2.2) \qquad a_{ss} < 0, \quad |\, a_{ss} \,| \geqq \sum_{r \neq s}^{r=1,\dots,n} |\, a_{rs} \,| \,; \quad s = 1, \dots, n$$

dove, tanto nel primo che nel secondo gruppo di relazioni, vale almeno una volta il segno $>$. Le (2.1) o le (2.2) ci assicurano (7) che la matrice A, ossia il suo polinomio caratteristico det $[z\, I - A]$, è stabile, cioè ha le radici caratteristiche tutte a parte reale non positiva. Consideriamo la matrice A' del § 1, con $M = [\mu_{rs}]$ eventualmente ad elementi non principali complessi. A' può essere *irriducibile o riducibile.*

Nel primo caso, affinchè A' abbia radici caratteristiche a parte reale non positiva è sufficiente che sia:

$$(2.3) \qquad \mu_{ss} < -\, a_{ss}\,; \quad \sum_{r=1}^{n} \mathrm{mod}\, \mu_{rs} \leqq |\, a_{ss} \,| - \sum_{r \neq s}^{r=1,\dots,n} |\, a_{rs} \,| \,; \quad s = 1, \dots, n$$

oppure

$$(2.4) \qquad \mu_{ss} < -\, a_{ss}\,; \quad \sum_{r=1}^{n} \mathrm{mod}\, \mu_{sr} \leqq |\, a_{ss} \,| - \sum_{r \neq s}^{r=1,\dots,n} |\, a_{sr} \,| \,; \quad s = 1, \dots, n$$

valendo nelle seconde parti, almeno una volta il segno $<$.

---

(6) Un polinomio si dice stabile se le sue radici sono tutte a parte reale negativa (o almeno non positiva). Una matrice a polinomio caratteristico stabile la diremo pure essa *stabile.*

(7) Cfr. CHERUBINO S.: op. cit. cap. III; § 1, n. 12, h; pag. 216 (v. anche aggiunte e le correzioni a pag. 242).

Ovvero anche :

$$(2.5)\qquad \mu_{ss} < -a_{ss}\,,\quad |\,\mu_{ss}\,| - \sum_{r\neq s}^{r=1,\dots,n} \operatorname{mod} \mu_{sr} \geqq \sum_{r=1}^{n} |\,a_{sr}\,|\,;\quad s = 1,\dots,n$$

oppure

$$(2.6)\qquad \mu_{ss} < -a_{ss}\,,\quad |\,\mu_{ss}\,| - \sum_{r\neq s}^{r=1,\dots,n} \operatorname{mod} \mu_{rs} \geqq \sum_{r=1}^{n} |\,a_{rs}\,|\,;\quad s = 1,\dots,n$$

valendo, nelle seconde parti, almeno una volta il segno $>$.

Bisogna tener presente che se A deve soddisfare alle (α) o (β) del § 1 nelle (2.3) e (2.4) il segno $<$ non può valere per quegli indici s per cui in (2.2) e (2.1) rispettivamente vale l'uguale. Però il segno $<$ deve valere almeno una volta. Analogamente se la matrice M soddisfacesse alle (α') o (β').

OSSERVAZIONE 1ª. Se $M = \mu\,[1]$, indicando :

$$\varepsilon' = \min(-a_{ss}),\ \varepsilon'' = \min \frac{1}{n}\left(|\,a_{ss}\,| - \sum_{r\neq s}^{r=1,\dots,n} |\,a_{rs}\,|\right),\ \varepsilon''' = \min \frac{1}{n}\left(|\,a_{ss}\,| - \sum_{r\neq s}^{r=1,\dots,n} |\,a_{sr}\,|\right)$$

le condizioni (2.3) e (2.4) diventano rispettivamente :

$$(2.3')\qquad -\varepsilon'' \leqq \mu < \min(\varepsilon', \varepsilon'')$$

$$(2.4')\qquad -\varepsilon''' \leqq \mu < \min(\varepsilon', \varepsilon''').$$

OSSERVAZIONE 2ª. Se A' è riducibile, mentre A è sempre irriducibile, le condizioni sufficienti si riducono alle (2.5), (2.6) in cui però non vale mai il segno uguale.

Se $M = \mu\,[1]$ non si ha alcuna condizione sufficiente perchè le (2.5) e (2.6), in cui non vale mai il segno eguale, darebbero diseguaglianze assurde, essendo $n \geq 2$.

OSSERVAZIONE 3ª. Se non si fa alcuna ipotesi sulla riducibilità o meno di A, nelle (2.1) e (2.2) occorre avere il solo segno $>$. Anche ora A' può essere irriducibile o riducibile. Nel 1º caso le condizioni sufficienti affinchè A' abbia radici caratteristiche a parte reale non positiva sono ancora le (2.3) o le (2.4) oppure le (2.5) o le (2.6) sempre con almeno una volta il segno $>$.

Se $M = \mu\,[1]$ le condizioni sufficienti sono ancora una delle (2.3′) e (2.4′).

OSSERVAZIONE 4ª. Se, valendo ancora per A le (2.1) oppure le (2.2) in cui vale solo il segno $>$, A' è riducibile, le condizioni sufficienti affinchè essa abbia le radici caratteristiche a parte reale non positiva si riducono a una delle (2.3), (2.4), (2.5), (2,6) in cui non vale mai il segno $=$.

Se $M = \mu\,[1]$, le condizioni sono ancora una delle (2.3′), (2·4′) in cui non vale mai il segno $=$.

3. Le radici caratteristiche di A (che ora supponiamo complessa) per la nota rappresentazione dello spettro nel piano di ARGAND-GAUSS [8], sono interne ai cerchi di centro a_{rr} ed aventi raggio:

$$a'_r = a_r - \operatorname{mod} a_{rr} = \sum_{r \neq s}^{s=1,\ldots,n} \operatorname{mod} a_{rs}\,; \quad r = 1, \ldots, n$$

le cui equazioni si scrivono:

$$\operatorname{mod}(a_{rr} - z) \leqq a'_r\,; \quad r = 1, \ldots, n\,. \tag{2.7}$$

Ponendo $z = a + i\,b$, $a_{rr} = a'_{rr} + i\,a''_{rr}$, sostituendo in (2.7) e quadrando, si ottiene:

$$a'^2_{rr} - a'^2_r \leqq -(a''_{rr} - b)^2 - a^2 + 2a\,a'_{rr}\,. \tag{2.8}$$

Se ne deduce che:

a) la matrice A non può avere radici caratteristiche a parte reale positiva se:

$$a'_{rr} < 0\,,\ |\,a'_{rr}\,| > a'_r\,; \quad r = 1, \ldots, n \tag{2.9}$$

e che:

b) se si sopprime la condizione $a'_{rr} < 0$, lasciando le altre, la matrice A non può avere radici caratteristiche a parte reale zero.

In a) e in b) può sostituirsi a'_r con $b'_r = \sum_{r \neq s}^{s=1,\ldots,n} \operatorname{mod} a_{rs}$.

4. Le radici caratteristiche di A sono interne alle $\frac{n(n-1)}{2}$ ovali di CASSINI (teor. di BAUER) [9]:

$$\operatorname{mod}(a_{rr} - z) \operatorname{mod}(a_{kk} - z) \leqq a'_r\,a'_k\,; \quad r, k = 1, \ldots, n\,;\ r \neq k \tag{2.10}$$

dove a'_r e a'_k si possono sostituire con b'_r e b'_k.

---

(8) CHERUBINO S.: op. cit., cap. III, § 3, n. 14, p. 218.

(9) Cfr. PARODI M.: *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées* [Mémorial Sciences Math., fascicule CXVIII (1952)] pp. 32-33.

Con le stesse posizioni di cui al n. 3 si ottiene, sostituendo $z = a + ib$ in (2.10) ed elevando a quadrato, che:

a) la matrice A non può avere radici caratteristiche a parte reale positiva se:

$$a'_{kk} < 0\,,\ a'_{kk}\, a'_{rr} > a'_r\, a'_k\,;\quad r, k = 1, \ldots, n\,;\ r \neq k \tag{2.11}$$

b) se si sopprime la condizione $a'_{kk} < 0$, *lasciando le altre, la matrice A non può avere radici caratteristiche a parte reale zero.*

5. Consideriamo ora la matrice A, reale o complessa, e l'altra $A' = [(a + i\,b)\,I - A]$ con $a + i\,b$ numero complesso. Per un teorema di OSTROWSKI (10), condizione necessaria e sufficiente affinchè A' sia regolare è che esistano n costanti α_r reali e positive ed n costanti λ_r non negative ($r = 1, \ldots, n$), per le quali si abbia:

$$\text{(2.12)}\quad \operatorname{mod}(a + ib - a_{kk}) \geqq \alpha_k\,;\qquad \text{(2.12}')\quad m_k \leqq \lambda_k\,;\qquad \text{(2.12}'')\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\alpha_k + \lambda_k} < 1$$

essendo m_k il massimo modulo degli elementi della riga k-ma di A, escluso quello principale; $k = 1, \ldots, n$.

Ponendo $a_{kk} = a'_{kk} + i\,a''_{kk}$, sostituendo in (2.12) ed elevando a quadrato, si ottiene che:

a) la matrice A′ non ha radici caratteristiche a parte reale positiva se:

$$|\,a'_{kk}\,| \geqq \alpha_k\,;\ a'_{kk} < 0\,;\ m_k \leqq \lambda_k\,;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\alpha_k + \lambda_k} < 1\,;\ k = 1, \ldots, n \tag{2.13}$$

b) se si sopprime la condizione $a'_{kk} < 0$, *lasciando le altre, la matrice A non avrà radici caratteristiche a parte reale zero.*

6. Consideriamo la matrice A' di cui al numero precedente. Per un altro teorema di OSTROWSKI (11) si ha che $\det A' \neq 0$ se esistono numeri reali a'_r, b'_r, α pei quali:

a) (2.14) $\operatorname{mod}(a_{kk} - a - ib) > a_k'^{\alpha}\, b_k'^{(1-\alpha)}\,;\ 0 \leq \alpha \leq 1\,;\ k = 1, \ldots, n$

b) (2.15) $\operatorname{mod}(a_{kk} - a - ib)\operatorname{mod}(a_{rr} - a - ib) > a_k'^{\alpha}\, a_r'^{\alpha}\, b_k'^{(1-\alpha)}\, b_r'^{(1-\alpha)}\,;$
$0 \leq \alpha \leq 1\,;\ k \neq r\,;\ k, r = 1, \ldots, n\,.$

---

(10) A. OSTROWSKI: *Sur les conditions générales pour la régularité des matrices* [Rend., Roma, Serie V, vol. X, fasc. 1-2 (1951)] pp. 156-168.

(11) A. OSTROWSKI: *Ueber des Nichtverschwinden einer klasse von determinanten und die Lokalisierung der caratterischen Wurzeln von Matrizen* [Composito Matematica, 1951], cit. (3) nella Nota prec. dell'A.

Con le stesse posizioni di cui al n. 5, sostituendo in (2-14) e (2.15) ed elevando a quadrato, si ottiene che:

a) A' non ha radici caratteristiche a parte reale positiva se:

1) $$a'_{kk} < 0, \ | a'_{kk} | > a'^{\alpha}_{k} b'^{(1-\alpha)}_{k}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad k = 1, \ldots, n$$

oppure se:

2) $$a'_{kk} < 0, \ a'_{kk} a'_{rr} > a'^{\alpha}_{r} a'^{\alpha}_{k} b'^{(1-\alpha)}_{r} b'^{(1-\alpha)}_{k}; \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \ k \neq r; \ k, r = 1, \ldots, n$$

b) se si sopprime la condizione $a'_{kk} < 0$, lasciando le altre, la matrice A non avrà radici caratteristiche a parte reale zero.

§ 3. Condizioni perchè un polinomio di HURWITZ resti tale incrementandone i coefficienti.

7. Un polinomio di grado n, a coefficienti reali:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{3.1}$$

lo diciamo *stabile* se le sue radici hanno tutte le parti reali negative. Segue subito che in tal case è certo $a_n > 0$. Le condizioni necessarie e sufficienti perchè il polinomio (3.1) sia stabile furono date da HURWITZ; perciò i polinomi stabili si dicono anche « di HURWITZ ». Queste condizioni consistono nella positività dei determinanti dei minori principali delle prime $1, 2, \ldots, n$ righe della matrice di ordine n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Da qui in poi supporremo che il polinomio (3.1) sia di HURWITZ. Aumentiamo di ν il coefficiente a_i, lasciando invariati gli altri. Si vogliono trovare condizioni sufficienti perchè il polinomio così modificato sia ancora di HURWITZ.

Per questo occorre e basta che ν renda positivi i valori assunti da un un certo numero k di polinomi, dedotti dalla stabilità di (3.1) quando a_i è sostituito da $a_i + \nu$.

Ponendo $i = 2h$, se i è pari; $i = 2h + 1$, se i è dispari, si trova facilmente $k = n - h$.

Questi k polinomi sono di vari gradi. È facile constatare, applicando la regola di sviluppo dei determinanti a termini polinomi, e tenendo presente la particolare formazione di (3.2), che precisamente si ha:

a) per n pari e per $a_i + \nu \,(i = 1, \ldots, n)$ gli $h = \frac{n}{2}$ polinomi vanno dal 1^0 grado al grado $\frac{n}{2}$.

b) per n dispari e per $a_{2h+1} + \nu \left(h = 0, \ldots, \frac{n-1}{2}\right)$ i gradi vanno da 1 ad $\frac{n+1}{2}$, mentre per $a_{2h} + \nu \left(h = 1, \ldots, \frac{n}{2}\right)$ si hanno gradi da 1 ad $\frac{n-1}{2}$.

In definitiva: *affinchè il polinomio di partenza resti di* HURWITZ, *aumentando a_i di ν, occorre e basta che ν renda positivi un sistema di polinomi di grado $\leqq \frac{n+1}{2}$. Avendo supposto che il polinomio dato è già di* HURWITZ, *in questo sistema di polinomi i termini noti saranno tutti positivi* (perchè coincidono con uno dei determinanti che esprimono le condizioni di HURWITZ) *e si può allora trovare* (12) *un intervallo $(-\mu, \mu)$, $\mu > 0$, tale che scegliendo ν in esso, il polinomio rimanga stabile.*

8. Consideriamo di nuovo il polinomio di HURWITZ (3.1); prendiamo $a_0 = 1$ ed aumentiamo tutti i suoi coefficienti di una stessa quantità ν. Ponendo $a'_i = a_i + \nu$, $i = 1, \ldots, n$, il polinomio (3.1) diviene:

$$f'(x) = x^n + a'_1 x^{n-1} + \ldots + a'_n . \tag{3.3}$$

Affinchè questo sia di HURWITZ è necessario e sufficiente che siano verificate le condizioni indicate poco fa: si devono cioè rendere positivi n polinomi in ν, i cui termini noti sono tutti positivi, per l'ipotesi che (3.1) è di HURWITZ.

I loro gradi vanno da 1 a $n - 1$, due di essi (precisamente il 2^0 e il 3^0) avendo lo stesso grado 2. Questo fatto è facilmente verificabile, tenendo pre-

(12) S. CHERUBINO e M. PASSAQUINDICI: *Sui sistemi di diseguaglianze lineari e su alcune loro applicazioni* [Ann. Sc. Norm. Sup.; s. III, vol. XII, (1958) pp. 31-53]; § 5; n. 12, pp. 52-53.

sente lo sviluppo dei determinanti a termini polinomi e che $a_0 = 1$. Ci troviamo di nuovo nelle condizioni del caso precedente, e possiamo perciò determinare un intervallo $(-\mu, \mu)$, $\mu \geqq 0$, in cui poter prendere ν in modo che (3.3) resti di HURWITZ come il polinomio di partenza. Così pure se sostituiamo solo una parte dei coefficienti a_i con $a_i + \nu$.

9. In quel che si è detto nei numeri 7 e 8 i coefficienti cambiati ricevono tutti lo stesso incremento ν. Un notevole risultato, ottenuto recentemente dal prof. S. FAEDO [13], ci permette di variare uno o più coefficienti con incrementi anche diversi, contenuti in uno stesso intervallo $(-\mu, \mu)$. Cioè i coefficienti variati a_i diventano a'_i e soddisfano, insieme agli a_i, alle limitazioni:

$$a_i - \nu = \alpha_i \leqq a'_i \leqq \beta_i = a_i + \nu . \tag{3.4}$$

Basta servirsi delle due tabelle $(\overline{R})$ ed (R) indicate dal FAEDO, costruite con le α_i e β_i in modo analogo alle tabelle di ROUTH. Si ottiene da ciascuna tabella un gruppo di polinomi in ν (ogni gruppo è di n polinomi) la cui positività, per $|\nu| \leqq \mu$, e μ conveniente, garantisce la stabilità del polinomio (3.1) variato con le (3.4). Per l'ipotesi che (3.1) sia già di HURWITZ e poichè per $\nu = 0$ questi polinomi si riducono ai termini della prima colonna della tabella di ROUTH, essi hanno termini noti tutti positivi.

Facciamo qualche considerazione sui loro gradi.

Le prime due righe delle tabelle $(\overline{R})$ e (R), opportunamente combinate, danno origine alle terze righe delle tabelle $(\overline{R})$ e (R), che a loro volta, combinate con le seconde righe delle tabelle stesse, danno origine alle quarte righe delle due tabelle e così via. Ricordando che le due prime righe di dette tabelle hanno gli elementi che sono polinomi di primo grado in ν, ne viene che i gradi dei $2n$ polinomi, che devono essere positivi, sono:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

cioè:

il 1^0 e l'$(n+1)$-mo polinomio hanno grado 1
il 2^0 e l'$(n+2)$-mo polinomio hanno grado 2
il 3^0 e l'$(n+3)$-mo polinomio hanno grado 3
. . . .
l'n^0 è il $2n$-mo polinomio hanno grado uguale alla somma dei gradi dei polinomi $(n-1)$-mo e $(n-2)$-mo [oppure $(2n-1)$-mo e $(2n-2)$-mo]

---

[13] S. FAEDO: *Un nuovo problema di stabilità per le equazioni algebriche a coefficienti reali* [Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, VII, 1953] pp. 53-64. Vedi in particolare il teor. IV a pag. 61.

Osserviamo poi che gli elementi corrispondenti delle due tabelle hanno gli stessi gradi; non solo, ma i coefficienti delle potenze dispari di ν nei polinomi della tabella $(\bar{R})$ sono uguali a quelli corrispondenti dei polinomi della tabella (R), ma di segno contrario, mentre i coefficienti delle potenze pari di ν nei polinomi della tabella $(\bar{R})$ sono uguali in valore assoluto e segno a quelli corrispondenti dei polinomi della tabella (R).

Ne segue che la tabella dei coefficienti dei polinomi in ν da considerare nel caso più generale è proprio la A del § 5 della Nota cit. ([12]) ossia rientriamo nel n. 8.

§ 4. Condizioni perchè una matrice a polinomio caratteristico stabile resti ancor tale incrementando gli elementi di essa.

10. Consideriamo una matrice reale costante $A = [a_{rs}]$ di ordine n ed il suo polinomio caratteristico, che supporremo di HURWITZ:

$$\det [z\, I - A] = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \ldots + (-1)^n \det A \, . \tag{4.1}$$

Aggiungiamo ad ogni elemento di $r \leqq n$ righe di A la quantità ν. Si ottiene una matrice A', il cui polinomio caratteristico è:

$$\det [z\, I - A'] = z^n - \sigma'_1 z^{n-1} + \sigma'_2 z^{n-2} - \ldots + (-1)^n \det A' \, . \tag{4.2}$$

Si vede subito, utilizzando la nota proprietà dei determinanti a elementi polinomi, che i coefficienti σ'_i si riducono a somme di determinanti di ordine i, in cui compare una riga aumentata di ν.

Precisamente si ha:

$$\sigma'_i = \sigma_i + \tau_i \, \nu \tag{4.3}$$

dove τ_i è la somma dei determinanti dei minori principali di ordine i di A in cui le righe, ottenute aumentando i loro elementi di ν, vengono sostituite, una alla volta, da righe aventi tutti gli elementi uguali a 1. I coefficienti di (4.2) sono perciò tutti di 1^0 grado in ν. Ne segue che le condizioni di HURWITZ per (4.2) sono polinomi dei rispettivi gradi $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ in ν che vogliamo positivi per $-\mu < \nu < \mu$, $\mu \geqq 0$ opportuno. I termini noti di questi polinomi sono tutti positivi, perchè si è supposto che il polinomio caratteristico di A sia di HURWITZ. Ci ritroviamo perciò ancora nelle condizioni dei due casi precedenti.

11. Supponiamo ora di aggiungere ad ogni elemento di un certo numero $r < n$ di righe e di colonne, occupanti gli stessi posti in A, la quantità ν. Il polinomio caratteristico di questa nuova matrice ha i coefficienti σ_i' che si riducono a una somma di determinanti di ordine i per quali si ha:

$$\sigma_1' = \sigma_i + \tau_i \nu + \eta_i \nu^2 \tag{4.4}$$

dove τ_i è la somma dei determinanti dei minori principali di ordine i, in cui una colonna (ordinatamente la $1^a, 2^a, \ldots, i^{ma}$) viene sostituita con un'altra i cui elementi sono 1 oppure 0, secondo che l'elemento corrispondente in σ_i era stato aumentato o no di ν; η_i è la somma dei determinanti dei minori principali di ordine i, con le colonne sostituite due per volta, in tutti i modi possibili, con altre i cui elementi sono 1 oppure 0 secondo che gli elementi corrispondenti in σ_i erano stati o no aumentati di ν.

Scrivendo le condizioni di HURWITZ, si hanno n polinomi di gradi rispettivi $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$, con i termini noti positivi, da rendere essi stessi positivi per ν in un intervallo opportuno $(-\mu, \mu)$, $\mu \geqq 0$, intervallo che si trova come nei tre casi precedentemente considerati, servendosi del risultato del § 5 della Nota cit. [12].