ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

U. BARBUTI

Sul problema della esistenza di misure invarianti rispetto a trasformazioni misurabili di uno spazio in sè

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 1-2 (1961), p. 105-114

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_1-2_105_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL PROBLEMA DELLA ESISTENZA DI MISURE INVARIANTI RISPETTO A TRASFORMAZIONI MISURABILI DI UNO SPAZIO IN SÈ (*)

Nota di U. BARBUTI (a Pisa)

L'esistenza di misure invarianti, rispetto a trasformazioni misurabili di uno spazio in sè, è presupposta nella quasi totalità delle proposizioni che s'incontrano nella teoria ergodica (1) e il problema della esistenza di tali misure ebbe una prima notevole soluzione, nel caso di trasformazioni biunivoche e bicontinue di uno spazio metrico in sè, da parte di N. Kryloff e N. Bogoliouboff (2) in un fondamentale lavoro di interesse fisico matematico. Successivamente J. C. Oxtoby e S. M. Ulam (3) migliorarono il risultato di detti autori, utilizzando un'applicazione del classico teorema di Banach sul prolungamento dei funzionali lineari.

Con questo lavoro discutiamo di nuovo la tecnica di Oxtoby e Ulam alla luce di alcuni recenti risultati (4) della teoria del prolungamento di misure in reticoli a struttura normale, conseguendo, in tal modo, estensioni di quel teorema che si ritengono degne di nota.

1. Sia $\mathcal{B}$ un δ-anello di sottoinsiemi (5) di un prefissato insieme sostegno S. Sia T una trasformazione (puntuale) di S in sè, *misurabile* rispetto a $\mathcal{B}$, vale a dire:

(1) $$T^{-1} X \in \mathcal{B} \text{ (6), per ogni } X \in \mathcal{B}.$$

(*) Questo lavoro fa parte della realizzazione del programma del gruppo di ricerca, n° 20, del C. N. R. (1960-61).

(1) Per una recentissima trattazione delle teorie ergodiche si veda [1].

(2) Cfr. [2].

(3) Cfr. [3].

(4) Cfr. la monografia [4] e il lavoro [5].

(5) Cioè un anello chiuso rispetto alla formazione di intersezioni numerabili dei suoi elementi; si noti che esso risulta anche condizionatamente σ-completo.

(6) Si veda [6], a p. 162, oppure [7], a p. 5. $T^{-1}X$ indica l'estensione reciproca di X rispetto a T.

Una misura μ su $\mathcal{B}$ è detta *invariante*, rispetto a T, se

(2) $\mu(T^{-1}X) = \mu(X)$ (7), per ogni $X \in \mathcal{B}$.

2. Suppongasi che $\mathcal{R}$ sia un reticolo di sottoinsiemi di S relativamente $\cup$-normale ($\cap$-normale) e condizionatamente σ-completo (δ-completo) (8), sia inoltre $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi contenente $\mathcal{R}$. Ci sarà utile la proposizione:

I. *Al fine di riconoscere che la misura μ su $\mathcal{B}$ è invariante rispetto a T, è sufficiente verificare la* (2) *su $\mathcal{R}$.*

Suppongasi $\mathcal{R}$ relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo. Fissato $X \in \mathcal{B}$, esiste (9) un $Y \in \mathcal{R}$ tate che $X \subseteq Y$ e $\mu(Y) < \mu(X) + \varepsilon$; risulta anche $T^{-1}X \subseteq T^{-1}Y$ e poichè per ipotesi è $\mu(T^{-1}Y) = \mu(Y)$, si ha $\mu(T^{-1}X) < \mu(X) + \varepsilon$; ossia, tenuto conto della arbitrarietà di ε, $\mu(T^{-1}X) \leq \leq \mu(X)$.

Sia, d'altro canto, $\mathcal{R}'_Y$ il reticolo complementare di $\mathcal{R}_Y$; esiste ancora un $Y' \in \mathcal{R}'_Y$ tale che per esso risulta $Y' \subseteq X$ e $\mu(Y') > \mu(X) - \varepsilon$. Si ha anche $T^{-1}Y' \subseteq T^{-1}X$; dico, inoltre, che $\mu(T^{-1}Y') = \mu(Y')$. Infatti risulta $Y' = Y - Z$ con $Z \in \mathcal{R}_Y$ e $T^{-1}Y' = T^{-1}Y - T^{-1}Z$ (con $T^{-1}Y \supseteq T^{-1}Z$), onde $\mu(T^{-1}Y') = \mu(T^{-1}Y) - \mu(T^{-1}Z) = \mu(Y) - \mu(Z) = \mu(Y')$. Si ha dunque: $\mu(T^{-1}X) \geq \mu(T^{-1}Y') = \mu(Y') > \mu(X) - \varepsilon$, e, per l'arbitrarietà di ε $\mu(T^{-1}X) \geq \mu(X)$; si ha cioè la (2).

Analogamente si ragiona se $\mathcal{R}$ è relativamente $\cap$-normale e δ-completo.

3. Vale anche la seguente proposizione:

II. *Sia $\mathcal{R}$ un reticolo d'insiemi contenente l'insieme vuoto come elemento; sia ν una funzione reale finita su $\mathcal{R}$ e tale da risultare;*

a) *non decrescente e nulla sull'insieme vuoto,*

---

(7) Cfr. [7], a p. 7.

(8) Per la nomenclatura usata in questa nota si veda F. Cafiero in [4]. Un reticolo d'insiemi $\mathcal{R}$ è detto relativamente $\cup$-normale ($\cap$-normale) se contiene l'insieme vuoto come elemento e se per ogni $X \in \mathcal{R}$, e $Y \in \mathcal{R}$, $Y \subseteq X$, esistono una successione $\{Y_n\}_{n \in N}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ d'insiemi appartenenti al sottoreticolo $\mathcal{R}_X$ ed una successione d'insiemi $\{Y'_n\}_{n \in N}$ appartenenti al reticolo $\mathcal{R}'_X$, complementare di $\mathcal{R}_X$, per i quali è:

$$Y_n \subseteq Y'_n \subseteq Y_{n+1} \quad (Y_n \supseteq Y'_n \supseteq Y_{n+1}), \quad n \in N, \quad \lim_n Y_n = Y.$$

Un reticolo d'insiemi $\mathcal{R}$ è poi detto condizionatamente σ-completo (δ-completo) se è chiuso rispetto alla formazione di unioni (intersezioni) numerabili d'insiemi di $\mathcal{R}$ contenuti in insiemi di $\mathcal{R}$.

(9) Cfr., per quel che segue, in [4], a p. 203, la definizione, ivi data, di misurabilità.

b) *finitamente additiva e subadditiva;*
allora la funzione definita per ogni $X \in \mathfrak{R}$ *con:*

$$(3) \qquad \mu(X) = \inf \left(\sum_{n \in N} \nu(X_n),\ X_n \in \mathfrak{R},\ \bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X \right)$$

$$N = (1, 2, \ldots),$$

ove $\{X_n\}$ *è un'arbitraria successione, gode delle proprietà a), b) e inoltre risulta:*

c) *numerabilmente subadditiva su* $\mathfrak{R}$ (¹⁰).

La a) segue facilmente per μ dalla validità della a) medesima per ν.

Proviamo la b). Siano $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ due insiemi di $\mathfrak{R}$ e siano $\{X_n^{(1)}\}_{n \in N}$ $\{X_n^{(2)}\}_{n \in N}$ due successioni, appartenenti ad $\mathfrak{R}$ e tali che $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X^{(1)}$, $\bigcup_{n \in N} X_n^{(2)} \supseteq X^{(2)}$. Posto $X_n = X_n^{(1)} \cup X_n^{(2)}$, risulta $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X^{(1)} \cup X^{(2)}$ e inoltre per la finita subadditività di ν:

$$\sum_{n \in N} \nu(X_n^{(1)} \cup X_n^{(2)}) \leq \sum_{n \in N} \nu(X_n^{(1)}) + \sum_{nN} \nu(X_n^{(2)}).$$

Dalla definizione di μ e dal fatto che le successioni $\{X_n^{(1)}\}$, $\{X_n^{(2)}\}$ sono qualunque segue:

$$\mu(X^{(1)} \cup X^{(2)}) \leq \mu(X^{(1)}) + \mu(X^{(2)}).$$

Quest'ultima disuguaglianza prova la finita subadditività di μ; inoltre essa può invertirsi, se $X^{(1)} \cap X^{(2)} = \emptyset$. Sia infatti $\{X_n\}_{n \in N}$ una successione di $\mathfrak{R}$ tale che $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X^{(1)} \cup X^{(2)}$. Si ponga $X_n^{(1)} = X_n \cap X^{(1)}, X_n^{(2)} = X_n \cap X^{(2)}$, $n \in N$; risulterà $X_n^{(1)} \cap X_n^{(2)} = \emptyset$.

Per le a), b) valevoli per ν, si ha:

$$\sum_{n \in N} \nu(X_n) \geq \sum_{n \in N} \nu(X_n \cap (X^{(1)} \cup X^{(2)}) = \sum_{n \in N} \nu(X_n^{(1)}) + \sum_{n \in N} \nu(X_n^{(2)}).$$

Per la definizione di μ e per essere $\{X_n\}$ una successione qualunque, segue: $\mu(X^{(1)} \cup X^{(2)}) \geq \mu(X^{(1)}) + \mu(X^{(2)})$; quest'ultima prova la b) per μ. Proviamo ora la c). Sia $X \in \mathfrak{R}$ e $\{X^{(n)}\}$, $n \in N$, una successione d'insiemi di $\mathfrak{R}$ tali che $\bigcup_{n \in N} X^{(n)} \supseteq X$. Fissato $\varepsilon > 0$, associamo, per la definizione di μ e utilizzando l'assioma della scelta, ad ogni $X^{(n)}$ una successione $\{X_k^{(n)}\}_{k \in N}$

(¹⁰) Cioè risulta: $\mu(X) \leq \sum_{n \in N} \mu(X_n)$ se X, $X_n \in \mathfrak{R}$ e $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X$.

d'insiemi di $\mathcal{R}$, tali che:

$$X^{(n)} \subseteq \bigcup_{k\in N} X_k^{(n)} \text{ e } \sum_{k\in N} \nu(X_k^{(n)}) < \mu(X^{(n)}) + \varepsilon/2^n,\ n \in N.$$

Avremo $X \subseteq \bigcup_{k;n\in N} X_k^{(n)}$ e, sommando rispetto all'indice n la disuguaglianza su scritta:

$$\sum_{k,n\in N} \nu(X_k^{(n)}) \leq \sum_{n\in N} \mu(X^{(n)}) + \varepsilon.$$

Tenuto conto della definizione di μ e della arbitrarietà di ε, segue dall'ultima disuguaglianza la c) e la proposizione è così provata.

4. Suppongasi ancora $\mathcal{R}$ un reticolo relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo, $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi contenente $\mathcal{R}$.

Sia ν una funzione su $\mathcal{R}$ godente delle proprietà a), b) della proposizione II. La funzione μ definita in (3) gode delle proprietà a), b) e c) e, a causa della struttura normale di $\mathcal{R}$, è univocamente prolungabile (11) in una misura $\bar{\mu}$ su $\mathcal{B}$. È opportuno osservare allora che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè $\bar{\mu}$ sia non identicamente nulla è che esista almeno un insieme $C \in \mathcal{B}$ tale che per esso risulti*:

$$\inf\left[\sum_{n\in N} \nu(X_n),\ X_n \in \mathcal{R},\ \bigcup_{n\in N} X_n \supseteq C\right] > 0. \tag{4}$$ (12)

OSSERVAZIONE.

Allo scopo di indicare un caso. utile nel seguito, nel quale la (4) si trova verificata, diamo la seguente definizione: diremo che l'insieme $C \in \mathcal{B}$

---

(11) Si veda in (5) la proposizione A.

(12) Poichè $\mathcal{R}$ è relativamente $\cup$-normale e condizionatamente σ-completo, risulta (cfr. la nota (9)), $\bar{\mu}(C) = \inf_{C \subseteq X \in \mathcal{R}} \mu(X)$. Per la definizione (3) di μ si ha:

$$\bar{\mu}(C) = \inf_{C\subseteq X\in\mathcal{R}} [\inf\{\sum_{n\in N} \nu(X_n),\ X_n \in \mathcal{R},\ \bigcup_{n\in N} X_n \supseteq X\}]$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\bar{\mu}(C) = \inf[\sum_{n\in N} \nu(X_n),\ X_n \in \mathcal{R},\ \bigcup_{n\in N} X_n \supseteq C] \tag{*}$$

e, per la (4), $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla.

Viceversa se $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla, allora esiste un $C \in \mathcal{R}$ tale che $\bar{\mu}(C) > 0$; per la detta struttura di $\mathcal{R}$ esiste una successione d'insiemi $X_n \in \mathcal{R}$ tali che $\bigcup_{n\in N} X_n \supseteq C$ e per i quali vale la (4).

è *compatto* relativamente ad $\mathcal{R}$, se ogni ricoprimento numerabile di C con insiemi di $\mathcal{R}$ contiene un ricoprimento finito. Vale osservare allora che:

Se C è un compatto relativamente ad $\mathcal{R}$ e se risulta:

$$\inf_{C \subseteq X \in \mathcal{R}} \nu(X) > 0, \tag{5}$$

allora è verificata la (4) [13], *cioè μ è non identicamente nulla su $\mathcal{B}$.*

5. Sia $\mathcal{R}$ un reticolo d'insiemi di S, contenente l'insieme vuoto come elemento, $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello contenente $\mathcal{R}$ e T una trasformazione di S in sè, misurabile rispetto a $\mathcal{B}$. Vale la proposizione:

III. *Se ν è finita su $\mathcal{R}$, se T è invertibile, se, inoltre, $T^{-1} X \in \mathcal{R}$ e $TX \in \mathcal{R}$ quando $X \in R$: allora, se ν è invariante su $\mathcal{R}$, tale risulta su $\mathcal{B}$ la μ definita in* (3).

Siano $X, X_n \in \mathcal{R}$, $n \in N$, $\bigcup_{n \in N} X_n \supseteq X$. Risulterà $T^{-1} X \subseteq T^{-1} (\bigcup_{n \in N} X_n) = \bigcup_{n \in N} T^{-1} X_n$. È dunque:

$$\mu(T^{-1} X) \leq \sum_{n \in N} \nu(T^{-1} X_n).$$

Per essere $\nu(T^{-1} X_n) = \nu(X_n)$, è anche:

$$\mu(T^{-1} X) \leq \sum_{n \in N} \nu(X_n),$$

dalla definizione di μ segue:

$$\mu(T^{-1} X) \leq \mu(X). \tag{6}$$

Per la ipotesi fatta risulta allora, ragionando sulla T^{-1} come si è fatto sulla T, per la (6), $\mu(TX) \leq (X)$.

Se ora partiamo dall'insieme $T^{-1} X \in \mathcal{R}$, risulta ancora $\mu(X) \leq \mu(T^{-1} X)$ che, confrontata con la (6), dà la tesi.

---

[13] Per la compattezza di C, segue l'esistenza di un numero finito Y_i, $i \leq m$, d'insiemi della successione $\{X_n\}_{n \in N}$, che figura nella (*) (nota (12)), tali che $\bigcup_{i \leq m} Y_i \supseteq C$. Posto $\bigcup_{i \leq m} Y_i = X$, per la finita sub-additività di ν, risulta:

$$\bar{\mu}(C) = \inf \left[\sum_{i \in m} \nu(Y_i), \bigcup_{i \leq m} Y_i \supseteq C \right] \geq \inf_{C \leq X \in \mathcal{R}} \nu(X).$$

È dunque per la ipotesi (5) $\bar{\mu}(C) > 0$.

6. Può ora provarsi il seguente teorema d'esistenza di misure invarianti:

IV. *Sia $\mathcal{R}$ un reticolo relativamente* U*-normale e condizionatamente σ-completo di sottoinsiemi di S, $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello contenente $\mathcal{R}$; sia T una trasformazione di S in sè, misurabile rispetto a $\mathcal{B}$, tale che $T^{-1} X \in \mathcal{R}$ e $TX \in \mathcal{R}$ se $X \in \mathcal{R}$. Esiste allora una misura limitata su $\mathcal{B}$, invariante rispetto a T e non nulla, se esiste un compatto C relativamente ad $\mathcal{R}$ ed un punto $x^0 \in S$ per cui è:*

$$\lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_C (T^k x^0) > 0, \tag{7}$$

ove χ_C è la funzione caratteristica di C e T^k la iterata k^{ma} di T.

Consideriamo con Oxtoby e Ulam lo spazio di Banach S^* delle successioni limitate di numeri reali $\xi = \{\xi_n\}_{n \in N}$ ed osserviamo che, in virtù di un classico teorema di Banach, è possibile costruire un funzionale lineare $L(\xi)$ su S^* che rispetta le condizioni seguenti ([14])

1⁰) $\lim_n{}' \xi_n \leq L(\xi) \leq \lim_n{}'' \xi_n$ ([15])

2⁰) Posto $\xi = \{\xi_n\}_{n \in N}$ e $\xi' = \{\xi_{n+1}\}_{n \in N}$, risulta: $L(\xi) = L(\xi')$.

3⁰) $L(\xi)$ può essere scelto in modo che, per una prescritta successione $\xi^0 = \{\xi_n^0\}_{n \in N}$, sia $L(\xi^0) = \lim_n{}'' \xi_n^0$.

Ciò premesso, in corrispondenza ad ogni $X \in \mathcal{R}$, consideriamo la successione ξ il cui termine generale è:

$$\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_X (T^k x^0), \tag{8}$$

ove il punto x^0 soddisfa la (7). Poniamo poi:

$$\nu(X) = L(\xi). \tag{9}$$

Dico che la funzione ν gode delle proprietà a), b) ([16]) della proposizione II.

([14]) Cfr. [3] alle pp. 561-562.

([15]) Si osservi che la 1⁰) assicura che $L(\xi)$ si restringe al $\lim_n \xi_n$ sulla varietà lineare delle successioni convergenti.

([16]) Si noti che la funzione ν può definirsi su qualsiasi famiglia di sottoinsiemi di S e le proprietà *a*), *b*) sono in ogni caso verificate. Notiamo però che ν può non godere della proprietà *c*), vale a dire può non essere numerabilmente subadditiva. Valga l'esempio seguente. Sia S l'insieme dei reali tali che $0 < x < 1$ e sia $Tx = x^2$. Fissato un qualunque $x^0 \in S$, la successione $T^k x^0$ converge a zero, se k tende all'infinito. Esaminando le (9), (8) Se infatti $X^{(1)} \leq X^{(2)}$ sono due insiemi di $\mathcal{R}$, sarà $\chi_{X^{(1)}} \leq \chi_{X^{(2)}}$ e conseguentemente dette $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ le due successioni definite dalla (8) con $X^{(1)}, X^{(2)}$, risulta $\xi_n^{(1)} \leq \xi_n^{(2)}$, $n \in N$, e, per la linearità di L, anche $L(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) = L(\xi^{(1)}) - L(\xi^{(2)})$. Dalla proprietà 1⁰) e dalla (9) segue $\nu(X^{(1)}) \leq \nu(X^{(2)})$; è poi ovvio che $\nu(\varnothing) = 0$.

Per la proprietà b) basta osservare che se $X^{(1)}, X^{(2)}$ sono disgiunti è $\chi_{X^{(1)} \cup X^{(2)}} = \chi_{X^{(1)}} + \chi_{X^{(2)}}$, se non sono disgiunti è invece $\chi_{X^{(1)} \cup X^{(2)}} \leq \chi_{X^{(1)}} + \chi_{X^{(2)}}$. Conseguentemente per la (9), la linearità di $L(\xi)$ ed ancora per la proprietà 1⁰) segue la finita additività e subadditività di ν.

Osserviamo ora che la ν è invariante su $\mathcal{R}$ [17]. Infatti è: $\chi_{T^{-1}X}(T^k x^0) = \chi_X(T^{k+1} x^0)$ e, considerata la successione ξ, il cui termine generale è definito in (8) e la ξ' il cui termine generale è:

$$\xi'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{T^{-1}X}(T^k x^0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_X(T^{k+1} x^0),$$

risulta subito dalla proprietà 2⁰) e dalla definizione di ν che $\nu(T^{-1}X) = \nu(X)$, per ogni $X \in \mathcal{R}$.

Consideriamo ora su $\mathcal{R}$ la funzione μ definita in (3). Per la proposizione II essa godrà delle proprietà a), b), c); per essere ν invariante su $\mathcal{R}$ rispetto a T e, godendo T delle medesime ipotesi della proposizione III, anche μ riuscirà invariante su $\mathcal{R}$. Se consideriamo allora il prolungamento $\bar{\mu}$ di μ su $\mathcal{B}$ [18], per la proposizione I, anche $\bar{\mu}$ sarà invariante rispetto a T. Per provare completamente il teorema basta mostrare che la (7) assicura che $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla. Per questo osserviamo che se $X \in \mathcal{R}$ e $X \supseteq C$, per la proprietà 3⁰) di L, la ν soddisfa la condizione:

$$\nu(X) \geq \nu(C)^{(19)} = \lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_C(T^k x^0).$$

Per la osservazione fatta al n⁰ 4 risulta allora che $\bar{\mu}$ è non identicamente nulla.

---

e la proprieta 1⁰) di L, si noti che risulta $\nu(X) = 0$ se esiste un intero n tale che, preso $x \in X$, risulta $x > \frac{1}{n}$, mentre $\nu(S) = 1$. Se dunque prendiamo una successione $\{X_n\}$ d'insiemi di S tali che risulti 1⁰ $x > \frac{1}{n}$ se $x \in X_n$, $n \in N$, 2⁰ $\bigcup_{n \in N} X_n = S$, avremo $\sum_{n \in N} \nu(X_n) = 0$, mentre $\nu(S) = 1$.

(17) È cioè $\nu(T^{-1}X) = \nu(X)$ per ogni $X \in \mathcal{R}$. Si noti che la invarianza di ν resta verificata se ν è supposta definita su di una qualunque famiglia di sottoinsiemi di S.

(18) Cfr. la nota (11).

(19) Si ricordi quanto è stato detto nella prima parte nella nota (16).

Dalla proposizione IV ora provata segue il corollario:

Sia S è uno spazio topologico perfettamente normale e $\mathscr{B}$ la famiglia dei borelliani di S, sia T una trasformazione di S in sè, biunivoca e bicontinua; affinchè esista una misura invariante rispetto a T e non nulla è sufficiente che esista un compatto C ed un punto $x_0 \in S$ per i quali risulti verificata la (7) (20).

7. Una più semplice costruzione di una misura invariante e, con essa, un più diretto legame tra tale misura e il valore del funzionale L (21), in quanto evita il ricorso alla funzione μ, definita in (3), può ottenersi partendo da un reticolo $\mathscr{R}$ relativamente $\bigcap$-normale, δ-completo e condizionatamente perfetto (22) di sottoinsiemi di S. Supponiamo soltanto che T risulti misurabile rispetto $\mathscr{B}$, essendo al solito $\mathscr{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi contenente $\mathscr{R}$. Per ogni $X \in \mathscr{R}$ si consideri ancora la $\nu(X)$ definita in (9); quest'ultima gode delle proprietà a), b) ed è invariante su $\mathscr{R}$ (23). Essendo poi $\mathscr{R}$ condizionatamente perfetto riesce per ν valida la proprietà:

c′) *ν è continua verso il basso sull'insieme vuoto* (24).

Le condizioni a), b), c′) sono sufficienti perchè ν possa essere prolungata in una misura $\overline{\mu}$ su $\mathscr{B}$ (25); poichè poi ν è invariante su $\mathscr{R}$, utilizzando ancora la proposizione I, segue che μ è invariante, rispetto a T.

Segue dunque il teorema:

V. *Sia $\mathscr{R}$ un reticolo relativamente $\bigcap$-normale, δ-completo e condizionatamente perfetto di sottoinsiemi di S, sia T una trasformazione misurabile rispetto al più piccolo δ-anello d'insiemi $\mathscr{B}$ contenente $\mathscr{R}$, allora esiste su $\mathscr{B}$ una*

---

(20) Basterà assumere in S il reticolo degli aperti $\mathscr{R}$ che risulta relativamente $\bigcup$-normale e condizionatamente σ-completo per essere la topologia su S perfettamente normale. Ricordiamo che spazio topologico perfettamente normale significa spazio normale nel quale ogni chiuso è un $\mathscr{G}_\delta$.

(21) L'interesse di questo più diretto legame va veduto nella circostanza che, se la successione ξ definita in (8) ha limite, allora il valore del funzionale $L(\xi)$ coincide con questo limite (cfr. la nota (15)); un tale limite rappresenta poi, per n grande, il «soggiorno medio» di $T^k x^0$ sull'insieme X.

(22) Un reticolo $\mathscr{R}$ d'insiemi è detto perfetto se ogni filtro $\mathscr{F}$ primo su $\mathscr{R}$ è determinato da un punto $x \in S$; cioè se esiste un $x \in S$ tale che $X \in \mathscr{F}$ se e solo se $x \in X$. Un filtro $\mathscr{F}$ è un insieme di elementi di $\mathscr{R}$ tali che: 1° se $X \in \mathscr{F}$ e $Y \in \mathscr{F}$, allora $X \cap Y \in \mathscr{F}$, 2° se $X \in \mathscr{F}$, $Y \in \mathscr{F}$ e $X \subseteq Y$, allora $Y \in \mathscr{F}$. Un filtro proprio è poi detto primo se, supponendo che $X \cup Y \in \mathscr{F}$, ciò implica $X \in \mathscr{F}$ oppure $Y \in \mathscr{F}$. Può provarsi che: ogni filtro primo è massimale, vale a dire e proprio e non contenuto propriamente in alcun filtro proprio. Noi diciamo poi che $\mathscr{R}$ è un reticolo condizionatamente perfetto se ogni reticolo $\mathscr{R}_X$ $(X \in \mathscr{R})$ è perfetto.

(23) Si veda la nota (17).

(24) Cioè $\nu(X_n) \to 0$ se X_n tende, non crescendo, all'insieme vuoto; è questa una facile conseguenza dell'essere $\mathscr{R}$ condizionatamente perfetto.

(25) Cfr. [8], alle pp. 152-154.

misura limitata, invariante rispetto a T, che risulta non nulla, se esiste almeno un punto $x^0 \in S$ ed un insieme $C \in \mathcal{R}$ per i quali risulta verificata la (7).

Basta per l'ultima affermazione della tesi osservare semplicemente che, per la proprietà 3^0) del funzionale L, risulta:

$$\nu(C) = L(\xi^0) = \lim_n{}'' \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_C(T^k x^0) > 0.$$

La proposizione precedente ammette il corollario:

Sia S uno spazio di Hausdorff, perfettamente normale e $\mathcal{B}$ il minimo δ-anello d'insiemi, contenente il reticolo dei compatti (26), *sia T misurabile rispetto a $\mathcal{B}$; affinchè esista una misura invariante rispetto a T e non nulla, è sufficiente che esista un compatto C ed un punto x^0 per i quali valga la* (7).

Chiudiamo osservando che i procedimenti su esposti, che utilizzano il ricorso a teoremi di prolungamento per misure, possono essere impiegati a provare l'esistenza di misure invarianti, rispetto a famiglie di trasformazioni misurabili, dipendenti da un parametro continuo e formanti gruppo rispetto ad esso; basterà a tal uopo sostituire alla media (8) una media integrale (27).

---

(26) Il reticolo degli insiemi compatti di uno spazio topologico di Hausdorff è condizionatamente perfetto. Sia infatti $\mathcal{F}$ un filtro primo su $\mathcal{R}_X$. La intersezione C degli insiemi del filtro non è vuota perchè se fosse vuota, essendo gli insiemi del filtro chiusi (perchè compatti in un compatto) esisterebbe una famiglia finita, contenuta nel filtro, con intersezione vuota; conseguentemente il filtro $\mathcal{F}$ non sarebbe proprio e quindi neppure primo, contro il supposto. Sia ora $x \in C$; dico che tale punto determina $\mathcal{F}$. Sia $Y \in \mathcal{R}_X$ e tale che $x \in Y$, risulta $Y \in \mathcal{F}$; se infatti ciò non accadesse, si consideri il filtro $\mathcal{F}$ generato da $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ (si dà per $\mathcal{F}_0$ la regola: $Z \in \mathcal{F}_0$ se solo se $Z \in \mathcal{R}_X$ e $Z \supseteq X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k \cap Y$, ove $X_i\, (i \leq k)$ sono insiemi di $\mathcal{R}_X$). Poichè $\mathcal{F}$ è massimale perchè primo (vedi nota (23)) è allora $\mathcal{F}_0 = \mathcal{R}_X$, quindi $\emptyset \in \mathcal{F}_0$; si ha cioè che esistono un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$ per i quàli è $\emptyset = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k \cap Y$, ciò è manifestamente assurdo perchè $x \in X_i\ (i \leq k)$, $x \in Y$.

(27) Cfr. Oxtoby e Ulam in [3], a. p. 564.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. JACOBS, *Neure Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*, Springer-Verlag, (1960), Berlin.

[2] N. KRYLOFF e N. BOGOLIOUBOFF, *La Theorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systémes dinamiques de la mécanique non linéaire*; Annals of Math. (2), 38 (1937) pp. 63-113.

[3] J. C. OXTOBY e S. M. ULAM, *On the existence of measure invariant under a transformation ;* Annals of Math. Vol. 40, (1939).

[4] F. CAFIERO, *Misura e Integrazione Collezione « Monografie Matematiche »* a cura del C.N.R. Ed. Cremonese, Roma (1959).

[5] U BARBUTI, *Sul prolungamento di misure da reticoli a struttura normale*; (nota in corso di stampa sui: Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei).

[6] P. R. HALMOS, *Measure Theory*; D. Van Nostrand Co., Inc., New York (1951).

[7] P. R. HALMOS, *Lectures on ergodic theory ;* Pubblications of the Mathematical Society of Japan (1956).

[8] U. BARBUTI, *Teoremi di prolungamento per misure da reticoli d'insiemi*; « Ricerche di Matematica » V. VII, (1956) pp. 145-162.