

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FERNANDO BERTOLINI

**Le funzioni misurabili di ultrafiltro come elementi di un
reticolo lineare numerabilmente completo**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 15,
n° 1-2 (1961), p. 115-127*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_1-2_115_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

LE FUNZIONI MISURABILI DI ULTRAFILTRO COME ELEMENTI DI UN RETICOLO LINEARE NUMERABILMENTE COMPLETO

Nota di FERNANDO BERTOLINI (a Roma)

Sono noti parecchi teoremi di rappresentazione per reticoli lineari, tra i quali uno dei più significativi è il seguente :

I. *Qualunque reticolo lineare archimedeo (in particolare, \aleph_0 -completo) e dotato d'unità di FREUDENTHAL può esser immerso, a meno d'isomorfismi, nel reticolo lineare costituito dalla totalità delle applicazioni di un opportuno insieme nell'insieme dei numeri reali impropri⁽¹⁾.*

Nella presente nota, dopo aver osservato che :

II. *Dato un reticolo booleano \aleph -completo (con $\aleph \geq \aleph_0$), la totalità delle funzioni misurabili d'ultrafiltro « finite » relative ad esso costituisce un reticolo relativamente \aleph -completo e dotato d'unità di FREUDENTHAL (reticolo lineare generato dal dato reticolo booleano),*

dimostriamo che, viceversa,

III. *Qualunque reticolo lineare relativamente \aleph -completo e dotato di unità di FREUDENTHAL (con $\aleph \geq \aleph_0$) è isomorfo al reticolo lineare generato da un opportuno reticolo booleano \aleph -completo.*

I due teoremi II e III rappresentano, assieme, un perfezionamento del teorema I, e vanno confrontati con risultati di BIRKHOFF, PEIRCE, GOFFMAN ed altri, relativi ad *anelli* o, più in generale a *gruppi*, dotati d'ordinamento reticolare (lattice-ordered rings, lattice-ordered groups)⁽²⁾. Il teorema II è dimostrato al n. 3, il III al n. 4; al n. 1 si dimostra tra l'altro co-

(1) Cfr. [12], teor. 2.23 a pag. 515, e teor. 3.11 a pag. 519; altri teoremi di rappresentazione sono dimostrati in [18], [13], [14], [1]; vedi anche [7], cap. IV, pp. 96-110. Per reticoli lineari normati, vedi [11] e [10].

(2) Cfr. [4], [8], [9].

me, introducendo una opportuna topologia nell'insieme \mathcal{A} degli ultrafiltri d'un reticolo booleano \mathcal{A} \aleph_0 -completo, le funzioni misurabili « finite » d'ultrafiltro relative ad \mathcal{A} risultano esser null'altro che le applicazioni continue dello spazio \mathcal{A} nello spazio dei numeri reali impropri, per le quali l'immagine inversa di $\pm \infty$ è ovunque non densa⁽³⁾; ai nn. 1, 2 si introducono nozioni sussidiarie.

1. Generalità sui reticoli booleani. Per reticolo *booleano* s'intende un reticolo distributivo e complementato, dotato di minimo e di massimo elemento. In un tale reticolo, come in qualunque altro, indicheremo con \leq la relazione d'ordine, con O l'elemento minimo, con I l'elemento massimo, con \wedge e con \bigwedge l'operazione d'interferenza (= massimo comune minorante), con \vee e con \bigvee l'operazione di congiunzione (= minimo comune maggiorante), con \perp l'operazione di complemento relativo, $x \perp y$ essendo un elemento z verificante le condizioni: $z \wedge y = O$, $z \vee y = x \vee y$ ⁽⁴⁾; quando occorra distinguere tra reticoli diversi, questi simboli verranno contrassegnati con il nome del reticolo cui si riferiscono, a guisa di indice. Dato un numero cardinale $\aleph \geq \aleph_0$, si dice che un reticolo è [relativamente] \aleph -completo, o che è un \aleph -reticolo, quando risulta dotata d'interferenza e congiunzione qualunque famiglia [limitata] d'elementi del reticolo, purchè di potenza non superiore a \aleph ⁽⁵⁾.

Per *ultrafiltro* d'un dato reticolo booleano s'intende un insieme a di elementi del reticolo, verificante le condizioni seguenti:

$O \notin a$; $I \in a$; se è $A_1 \in a$ ed $A_2 \in a$, allora è anche $A_1 \wedge A_2 \in a$, e viceversa; se è $A_1 \in a$ od $A_2 \in a$, allora è anche $A_1 \vee A_2 \in a$, e viceversa (A_1, A_2 essendo due elementi arbitrari del reticolo)⁽⁶⁾.

Dato un reticolo booleano \mathcal{A} , indicheremo con \mathcal{A} l'insieme degli ultrafiltri di \mathcal{A} , con ω l'applicazione $\omega: A \rightarrow \{a: A \in a \in \mathcal{A}\}$ per $A \in \mathcal{A}$, con $\omega \mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi di \mathcal{A} descritta da ωA al variar di A in \mathcal{A} ; tale famiglia risulta ovviamente chiusa rispetto alle operazioni (binarie) d'intersezione, unione e differenza: essa verrà assunta come base d'aperti per l'ambiente \mathcal{A} . Si ha il classico teorema di STONE:

1.1. *L'applicazione ω è un isomorfismo della struttura $\langle \mathcal{A}, \leq, O, I, \wedge, \vee, \perp \rangle$ sulla struttura $\langle \omega \mathcal{A}, \subset, \emptyset, \mathcal{A}, \cap, \cup, - \rangle$; l'insieme \mathcal{A} risulta uno*

⁽³⁾ Cfr. con [19].

⁽⁴⁾ In un reticolo la relazione \leq è transitiva, riflessiva, antisimmetrica, le due operazioni \wedge e \vee sono commutative, associative, e verificano l'identità: $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$; in un reticolo distributivo le due operazioni (binarie) \vee e \wedge sono anche distributive l'una rispetto all'altra; in un reticolo booleano il complemento relativo tra due elementi esiste sempre ed è unico.

⁽⁵⁾ Un reticolo è detto *completo*, quando è \aleph -completo quale che sia \aleph .

⁽⁶⁾ Cfr. [3], pag. 166.

spazio topologico normale, compatto, totalmente sconnesso, nel quale $\omega \mathcal{A}$ rappresenta la totalità degli insiemi che sono simultaneamente aperti e chiusi ⁽⁷⁾.

Dato un reticolo booleano \mathcal{A} , chiamiamo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni a valori reali impropri, continue nell'insieme \mathcal{A} , infinite al più su un sottinsieme ovunque non-denso di \mathcal{A} ; chiamiamo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni a valori reali impropri definite in \mathcal{A} , e verificanti la seguente condizione: per ciascuna di esse, f , e per ciascun numero reale λ , esiste un elemento $A_f(\lambda)$ di \mathcal{A} tale che sia $\{a: f(a) < \lambda\} \subset \omega A_f(\lambda) \subset \{a: f(a) \leq \lambda\}$, con $O = \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k)$, $I = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_f(k)$ [funzioni misurabili finite d'ultrafiltro]; è chiaro che, se è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, è pure, per ogni $a \in \mathcal{A}$, $f(a) = \inf \{\lambda: A_f(\lambda) \in a\}$ ⁽⁸⁾.

Tra le due classi di funzioni $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sussistono le relazioni seguenti:

1.2. $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Data una funzione f della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, per ogni numero reale λ si ha: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f\left(\lambda - \frac{1}{k}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{a: f(a) \leq \lambda - \frac{1}{k}\right\} = \{a: f(a) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{a: f(a) < \lambda - \frac{1}{k}\right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f\left(\lambda - \frac{1}{k}\right)$, da cui risulta che l'insieme $\{a: f(a) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f\left(\lambda - \frac{1}{k}\right)$ è aperto; ciò dimostra che la funzione f è continua in \mathcal{A} . In secondo luogo, se si ha $A \in \mathcal{A}$, $\omega A \subset \{a: f(a) = -\infty\}$, si avrà anche $\omega A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \omega A_f(-k)$, quindi $A \leq A_f(-k)$ per $k = 1, 2, \dots$, quindi $O \leq A \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) = O$, $\omega A = \emptyset$; ne segue che l'insieme $\{a: f(a) = -\infty\}$ non contiene aperti non vuoti, e quindi è ovunque non denso. In modo analogo si vede che anche l'insieme $\{a: f(a) = +\infty\}$ è ovunque non denso, e ciò completa la dimostrazione ⁽⁹⁾.

Reciprocamente:

1.3. Se il reticolo booleano \mathcal{A} è \aleph_0 -completo, allora è: $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(i) Sia una funzione $f \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ed un numero reale λ . L'insieme $\{a: f(a) < \lambda\}$ è aperto, quindi è unione di certi elementi della famiglia $\omega \mathcal{A}$, i quali, comunque si fissi il numero naturale k , costituiscono un ricopri-

⁽⁷⁾ Cfr. [16], pag. 155, teor. 18.6; in quel contesto *vollkompakt*, da me tradotto *compatto* secondo l'uso più recente, è equivalente al *bicompatto* di P. ALEXANDROFF e P. URYSONN, com'è dimostrato in [16], pag. 99, teor. 12.4.

⁽⁸⁾ Cfr. [2], pag. 244, [3], pag. 172; cfr. anche *Ortsfunktion*, in [5].

⁽⁹⁾ Questo risultato è, sostanzialmente, dimostrato in [2], pag. 237, teor. VI.

mento aperto dell'insieme $\left\{a : f(a) \leq \lambda - \frac{1}{k}\right\}$; ma quest'ultimo è compatto, dunque è ricoperto anche da un numero finito di tali elementi di $\omega \mathcal{A}$, la cui unione sarà ancora un elemento di $\omega \mathcal{A}$, chiamiamolo $\omega A_f^{(k)}(\lambda)$, verificante la relazione: $\left\{a : f(a) \leq \lambda - \frac{1}{k}\right\} \subset \omega A_f^{(k)}(\lambda) \subset \{a : f(a) < \lambda\}$. Pertanto, posto $A_f(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_f^{(k)}(\lambda)$, avremo: $\{a : f(a) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f^{(k)}(\lambda) \subset \omega A_f(\lambda)$.

Analogamente, per ogni numero naturale k , si costruisce un elemento $B_f^{(k)}(\lambda)$ di \mathcal{A} , verificante la condizione: $\left\{a : f(a) \geq \lambda + \frac{1}{k}\right\} \subset \omega B_f^{(k)}(\lambda) \subset \{a : f(a) > \lambda\}$; pertanto, posto $B_f(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} B_f^{(k)}(\lambda)$, avremo $\{a : f(a) > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega B_f^{(k)}(\lambda) \subset \omega B_f(\lambda)$.

D'altra parte, dati ad arbitrio due numeri naturali h e k , si ha $\omega A_f^{(h)}(\lambda) \cap \omega B_f^{(k)}(\lambda) \subset \{a : f(a) < \lambda\} \cap \{a : f(a) > \lambda\} = \emptyset$, quindi $A_f^{(h)}(\lambda) \wedge B_f^{(k)}(\lambda) = O$, da cui $A_f(\lambda) \wedge B_f(\lambda) = \bigvee_{h=1}^{\infty} \bigvee_{k=1}^{\infty} [A_f^{(h)}(\lambda) \wedge B_f^{(k)}(\lambda)] = O$, e pertanto $\omega A_f(\lambda) \cap \omega B_f(\lambda) = \emptyset$.

Si conclude che è $\{a : f(a) < \lambda\} \subset \omega A_f(\lambda) \subset \{a : f(a) \leq \lambda\}$, ossia che f è una funzione misurabile d'ultrafiltro.

(ii) Nell'insieme aperto $\omega \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \omega A_f(-k)$ si avrà poi identicamente $f(a) = -\infty$, e quindi dovrà essere $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) = \emptyset$ (l'unico insieme aperto e ovunque non denso è appunto l'insieme vuoto), da cui segue $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) = O$. In modo analogo si dimostra che è $\bigvee_{k=1}^{\infty} A_f(k) = I$, e ciò completa la dimostrazione del teorema (10).

Aggiungiamo ancora le seguenti osservazioni, supponendo \mathcal{A} un reticolo booleano \mathfrak{N}_0 -completo. In primo luogo, se è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, è anche $-f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $A_{-f}(\lambda) = I \setminus A_f(-\lambda)$ (11). In secondo luogo, se è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ed α è un numero reale positivo, è anche $\alpha f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $A_{\alpha f}(\lambda) = A_f\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ (12). In terzo luogo, se è $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, si ha anche $f + g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $f \vee g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $f \cap g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, potendosi porre $A_{f+g}(\lambda) = \bigvee_{r+s<\lambda} [A_f(r) \wedge A_g(s)]$, ovvero anche

(10) Un risultato analogo è enunciato in [17] a proposito degli « omomorfismi reali », a pag. 155.

(11) Cfr. [2], teor. IV (1), pag. 233.

(12) Dimostrazione immediata, in quanto $\alpha f(a) < \lambda$ quando e solo quando $f(a) < \lambda/\alpha$.

$A_{f+g}(\lambda) = \bigwedge_{r+s>\lambda} [A_f(r) \vee A_g(s)]$, dove gl'indici r ed s sono da prender razionali,
 $A_{f \cup g}(\lambda) = A_f(\lambda) \wedge A_g(\lambda)$, $A_{f \cap g}(\lambda) = A_f(\lambda) \vee A_g(\lambda)$ ⁽¹³⁾.

2. Generalità sui reticoli lineari. Per reticolo *lineare* s'intende un insieme lineare sul corpo reale, che contemporaneamente sia un reticolo, e verifichi le condizioni seguenti:

(i) se è $x \leq y$, allora è anche $x + z \leq y + z$, e viceversa,

(ii) se è $x \geq 0$ ed $\alpha \geq 0$, allora è anche $\alpha x \geq 0$,

dove x, y, z sono vettori ed α uno scalare arbitrari. In generale indichiamo con 0 sia lo zéro scalare che il vettore nullo; inoltre, per ogni vettore x , si pone: $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x^+ + x^-$, risultando $x = x^+ - x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$. Due vettori x ed y verranno detti *tra loro ortogonali* (in simboli $x \perp y$) quando è $|x| \wedge |y| = 0$ ⁽¹⁴⁾.

Per *unità* di FREUDENTHAL, o semplicemente *unità*, d'un reticolo lineare si intende un vettore positivo (ossia > 0) che sia ortogonale al solo vettore nullo; una tale unità verrà indicata con 1 (coerentemente, con uno stesso simbolo s'indicherà sia un numero reale, sia il prodotto di questo numero per la data unità ⁽¹⁵⁾). Si chiama *base* d'un reticolo lineare dotato d'unità 1 l'insieme dei vettori u verificanti la condizione: $u \wedge (1 - u) = 0$; è chiaro che tale condizione è verificata dai vettori 0 ed 1, e che qualunque vettore u la verifichi dev'essere intermedio fra questi: $0 \leq u \leq 1$.

Sui reticoli lineari son ben noti i seguenti teoremi elementari:

2.1. Ogni reticolo lineare è un reticolo distributivo ⁽¹⁶⁾.

2.2. La base \mathcal{A} d'un reticolo lineare \mathcal{L} , dotato d'unità 1, è sempre un reticolo booleano, ove si assuma in \mathcal{A} come relazione d'ordine $\leq_{\mathcal{A}}$ quella

(13) Cfr. [2], teor. III e teor. IV (3), pag. 232-233. Da notare che *direttamente* la funzione $f + g$ è definita solo dove f e g non siano simultaneamente infinite e di segno opposto, quindi in un insieme denso su \mathcal{Q} ed aperto; tuttavia, ponendo $(f + g)(a) = \inf\{\lambda: \bigvee_{r+s<\lambda} [A_f(r) \wedge A_g(s)] \in a\}$, la definizione di $f + g$ si prolunga in modo coerente su tutto l'insieme \mathcal{Q} , ed invariante rispetto alle possibili scelte delle «scale» $\{A_f(\lambda)\}$, $\{A_g(\lambda)\}$. Notiamo che $f \cup g [f \cap g]$ rappresenta la funzione che nel generico ultrafiltro a ha valore eguale al maggiore [al minore] dei due valori $f(a)$ e $g(a)$.

(14) Cfr. ad es. [6] — testo scolastico, a cui rinviamo per tutte le nozioni elementari sui reticoli lineari — pag. 52 e sgg.

(15) Si noti che l'applicazione $\alpha \rightarrow \alpha \cdot 1$ è un isomorfismo dell'insieme dei numeri reali (pensato come reticolo lineare, in modo ovvio) sulla varietà lineare generata dal vettore 1, pensata anch'essa come reticolo lineare, immerso a quello dato: perciò dalla identificazione tra α e $\alpha \cdot 1$ non può sorgere equivoco.

(16) Cfr. [6], pag. 55, teor. 2.1.6.

subordinata dalla relazione $\leq_{\mathcal{L}}$ definita in \mathcal{L} ; per il reticolo \mathcal{A} si ha poi: $O_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{L}}$, $I_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{L}}$, $u \wedge_{\mathcal{A}} v = u \wedge_{\mathcal{L}} v$, $u \vee_{\mathcal{A}} v = u \vee_{\mathcal{L}} v$, $I_{\mathcal{A}} \vdash_{\mathcal{A}} u = 1_{\mathcal{L}} - u$, dove u e v sono due arbitrari elementi di \mathcal{A} ⁽¹⁷⁾.

2.3. *Due basi d'un medesimo reticolo lineare \mathfrak{N}_0 -completo, relative a due diverse unità, sono sempre reticoli tra loro isomorfi* ⁽¹⁸⁾.

Si ha inoltre:

2.4. *La base d'un reticolo lineare relativamente \mathfrak{N} -completo e dotato d'unità è un reticolo booleano \mathfrak{N} -completo.*

Sia \mathcal{L} il reticolo lineare in esame, 1 una sua unità, \mathcal{A} la base ad essa relativa; sia $\{u_i\}$ una famiglia d'elementi di \mathcal{A} , avente potenza non superiore a \mathfrak{N} , e poniamo $v_i = 1 - u_i$ per ogni indice i ; ovviamente anche la famiglia $\{v_i\}$ è contenuta in \mathcal{A} ed ha potenza non superiore a \mathfrak{N} . Ponendo poi $u = \bigvee u_i$, $v = \bigwedge v_i$ avremo $0 \leq u \wedge v = \bigvee u_i \wedge \bigwedge v_i = \bigvee [u_i \wedge \bigwedge v_i] \leq \bigvee (u_i \wedge v_i) = 0$, $1 \geq u \vee v = \bigvee u_i \vee \bigwedge v_i = \bigwedge [v_i \vee \bigvee u_i] \geq \bigwedge (v_i \vee u_i) = 1$, quindi $u \wedge v = 0$, $u + v = u \vee v = 1$; ne segue $u \in \mathcal{A}$, $v \in \mathcal{A}$. Ciò basta a provare l'asserto, in quanto la relazione tra le due famiglie $\{u_i\}$ e $\{v_i\}$ è simmetrica ⁽¹⁶⁾.

3. **Il reticolo lineare generato da un \mathfrak{N} -reticolo booleano.** Sia dato ora un reticolo booleano \mathcal{A} , l'insieme dei suoi ultrafiltri \mathcal{U} , l'insieme $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ delle sue funzioni misurabili finite d'ultrafiltro. Si ha:

3.1. *Se il reticolo booleano \mathcal{A} è \mathfrak{N} -completo, con $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{N}_0$, allora la classe di funzioni $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ costituisce un reticolo lineare relativamente \mathfrak{N} -completo e dotato d'unità.*

Che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sia un reticolo lineare è conseguenza immediata delle 1.2, 1.3, e delle osservazioni finali del n. 1; dimostriamo ch'esso è relativamente \mathfrak{N} -completo. Sia $\{f_i\}$ una famiglia di funzioni della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, di potenza non superiore a \mathfrak{N} , minorata dalla funzione f' e maggiorata dalla f'' , entrambe appartenenti ad $\mathcal{M}(\mathcal{A})$; poniamo: $B^*(\lambda) = \bigwedge A_{f_i}(\lambda)$, $B_*(\lambda) = \bigvee A_{f_i}(\lambda)$, $f^*(a) = \inf \{\lambda : B^*(\lambda) \in a\}$, $f_*(a) = \inf \{\lambda : B_*(\lambda) \in a\}$, per ogni $a \in \mathcal{U}$. Con queste posizioni si ha $B^*(\lambda) \leq A_{f_i}(\lambda)$ per ogni i e per ogni numero reale λ , da cui segue $f^*(a) \geq f_i(a)$ per ogni i e per ogni $a \in \mathcal{U}$; viceversa, detta g una funzione della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ che maggiori la famiglia $\{f_i\}$, avremo, per ogni i e per ogni coppia λ, μ di numeri reali con $\lambda < \mu$, $A_g(\lambda) \leq A_{f_i}(\mu)$, quindi $A_g(\lambda) \leq B^*(\mu)$, quindi ancora $f^*(a) \leq g(a)$ per ogni $a \in \mathcal{U}$; è banale infine che

⁽¹⁷⁾ Cfr. [6], pag. 106, teor. 1.1.3.

⁽¹⁸⁾ Cfr. [6] pag. 109, teor. 1.2.2.

sia $\{a: f^*(a) < \lambda\} \subset \omega B^*(\lambda) \subset \{a: f^*(a) \leq \lambda\}$. Analogamente si dimostra che f_* è la massima funzione misurabile d'ultrafiltro che minori la famiglia di funzioni $\{f_i\}$; la limitazione $f' \leq f_* \leq f^* \leq f''$ assicura poi che gl'insiemi $\{a: |f^*(a)| = +\infty\}$ e $\{a: |f_*(a)| = +\infty\}$ sono ovunque non-densi.

È poi immediato che la funzione identica ad uno in \mathcal{A} sia una unità per il reticolo lineare $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, e che la funzione identica a zero sia il vettore nullo dello stesso reticolo; coerentemente, le indicheremo con 1 e 0, rispettivamente; diremo che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è il reticolo lineare generato dal reticolo booleano \mathcal{A} , ed indicheremo con $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ la base di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ relativa alla unità 1. Si ha inoltre:

3.2. Qualunque \aleph_0 -reticolo booleano è isomorfo alla base del reticolo lineare ch'esso genera⁽¹⁹⁾.

Questa proprietà è conseguenza immediata della seguente:

3.3. Gli elementi della base $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ sono tutte e sole le funzioni caratteristiche, entro l'ambiente \mathcal{A} , degli insiemi della classe $\omega \mathcal{A}$.

(i) Se u è la funzione caratteristica d'un insieme della classe $\omega \mathcal{A}$, $1 - u$ risulta la funzione caratteristica dell'insieme complementare, anch'esso della classe $\omega \mathcal{A}$, e quindi $u \wedge (1 - u) = 0$; dunque $u \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.

(ii) Sia, viceversa, $u \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, e poniamo $v = 1 - u \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$; la condizione $u \wedge v = 0$ si traduce nella seguente:

$$A_u(\lambda) \vee A_v(\lambda) = 0 \quad \text{per } \lambda < 0, \quad A_u(\lambda) \vee A_v(\lambda) = I \quad \text{per } \lambda > 0,$$

mentre la condizione $u \vdash v = 1$ si traduce prima nella $u \vee v = 1$, poi nella

$$A_u(\lambda) \wedge A_v(\lambda) = 0 \quad \text{per } \lambda < 1, \quad A_u(\lambda) \wedge A_v(\lambda) = I \quad \text{per } \lambda > 1.$$

Da queste relazioni si deduce che: per $\lambda < 0$ si ha $A_u(\lambda) = A_v(\lambda) = 0$; per $\lambda > 1$ si ha $A_u(\lambda) = A_v(\lambda) = I$; per $0 < \lambda < 1$ si ha $A_u(\lambda) = I \vdash A_v(\lambda)$ e quindi, dovendo tanto $A_u(\lambda)$ che $A_v(\lambda)$ essere non decrescenti rispetto a λ , $A_u(\lambda) = A_u\left(\frac{1}{2}\right)$. Si conclude che u è la funzione caratteristica dello insieme $\omega A_u\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Il teorema di rappresentazione. Sia ora \mathcal{L} un reticolo lineare relativamente \aleph -completo, con $\aleph \geq \aleph_0$, e dotato d'unità 1; sia \mathcal{A} la base del

(19) Per il teorema 2.3, è inutile specificare di quale base concreta si tratti.

reticolo \mathcal{L} , relativa alla unità menzionata, \mathcal{A} la totalità degli ultrafiltri di \mathcal{A} , $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ il reticolo lineare generato da \mathcal{A} , $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ la base del reticolo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ definita al n. 3. In base ai lemmi 2.4 e 3.1, si ha:

4.1. *Il reticolo lineare $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è relativamente \aleph -completo.*

In secondo luogo, dato un elemento x del reticolo \mathcal{L} ed un numero reale λ , consideriamo l'elemento $L(x, \lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \in \mathcal{L}$, nonchè l'elemento $M(x, \lambda) = 1 - L(x, \lambda)$; in base alla dimostrazione del teorema 3.3 a pag. 13 di [15] si ha $L(x, \lambda) \wedge M(x, \lambda) = 0$, e quindi $L(x, \lambda) \in \mathcal{A}$. Perciò, ponendo

$$(\tau x)(a) = \inf \{ \lambda : \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \in a \} \quad \text{per } a \in \mathcal{A},$$

si definisce una funzione τx misurabile d'ultrafiltro relativa ad \mathcal{A} . D'altronde, in base alla dimostrazione del teor. 1.3.2. (1), (2) a pag. 114 di [6], si ha $L(x, \lambda) \leq L(x, \mu)$ per $\lambda < \mu$, ed inoltre $0 = \bigwedge_{h=1}^{\infty} L(x, -h)$, $1 = \bigvee_{h=1}^{\infty} L(x, h)$ ⁽²⁰⁾; pertanto:

4.2. *Dato in \mathcal{L} l'elemento x , la funzione τx appartiene alla classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $A_{\tau x}(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+]$ per ogni numero reale λ .*

Dimostriamo ora che:

4.3 *Dati in \mathcal{L} gli elementi x e y , si ha: $\tau x + \tau y = \tau(x + y)$.*

(i) Dato ad arbitrio un numero reale λ , siano r ed s due numeri razionali aventi somma maggiore di λ . Avremo, successivamente,

$$\begin{aligned} (\lambda - x - y)^+ &\leq (r + s - x - y)^+ = [(r - x) + (s - y)]^+ = \\ &= \{[(r - x) \wedge (s - y)] + [(r - x) \vee (s - y)]\}^+ \leq 2[(r - x) \vee (s - y)]^+ \quad (21), \end{aligned}$$

quindi

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x - y)^+] \leq \bigvee_{k=1}^{\infty} \{1 \wedge 2k[(r - x) \vee (s - y)]^+\},$$

⁽²⁰⁾ In base alla 1.3.1., pag. 113, di [6], $L(x, \lambda)$ coincide con l'elemento ivi chiamato e_1^x .

⁽²¹⁾ In ogni reticolo lineare si ha: $p + q = (p \wedge q) + (p \vee q)$, $2(p^+) = (2p)^+$; cfr. [6], pag. 53, teor. 2.1.3 (3), e pag. 56, teor. 2.1.7 (5).

quindi

$$\begin{aligned} & \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k (\lambda - x - y)^+] \leq \bigwedge_{r+s>\lambda} \bigvee_{k-1}^{\infty} \{1 \wedge 2k [(r-x) \vee (s-y)]^+\} = \\ = & \bigwedge_{r+s>\lambda} \bigvee_{k-1}^{\infty} \{1 \wedge k [(r-x) \vee (s-y)]^+\} = \bigwedge_{r+s>\lambda} \{ \bigvee_{h-1}^{\infty} [1 \wedge h (r-x)^+] \vee \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k (s-y)^+] \} \quad (22), \end{aligned}$$

quindi

$$A_{\tau(x+y)}(\lambda) \leq \bigwedge_{r+s>\lambda} [A_{\tau x}(r) \vee A_{\tau y}(s)] = A_{\tau x + \tau y}(\lambda),$$

ed infine

$$\tau x + \tau y \leq \tau(x + y).$$

(ii) Dato ad arbitrio un numero reale λ , siano r ed s due numeri razionali aventi somma minore di λ . Avremo, successivamente,

$$\begin{aligned} [(r-x) \wedge (s-y)]^+ & \leq 2 [(r-x) \wedge (s-y)]^+ = \{[(r-x) \wedge (s-y)] + [(r-x) \wedge (s-y)]\}^+ \leq \\ & \leq \{[(r-x) \wedge (s-y)] + [(r-x) \vee (s-y)]\}^+ = [(r-x) + (s-y)]^+ = \\ & = (r + s - x - y)^+ \leq (\lambda - x - y)^+ \quad (21), \end{aligned}$$

quindi

$$\bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k (\lambda - x - y)^+] \geq \bigvee_{k-1}^{\infty} \{1 \wedge k [(r-x) \wedge (s-y)]^+\},$$

quindi

$$\begin{aligned} & \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k (\lambda - x - y)^+] \geq \bigvee_{r+s<\lambda} \bigvee_{k-1}^{\infty} \{1 \wedge k [(r-x) \wedge (s-y)]^+\} = \\ & = \bigvee_{r+s<\lambda} \bigvee_{k-1}^{\infty} \{[1 \wedge k (r-x)^+] \wedge [1 \wedge k (s-y)^+]\} = \\ = & \bigvee_{r+s<\lambda} \bigvee_{k-1}^{\infty} \bigvee_{h-1}^{\infty} \{[1 \wedge k (r-x)^+] \wedge [1 \wedge h (s-y)^+]\} = \\ = & \bigvee_{r+s<\lambda} \{ \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k (r-x)^+] \wedge \bigvee_{h-1}^{\infty} [1 \wedge h (s-y)^+] \} \quad (23), \end{aligned}$$

(22) In qualunque \aleph_0 -reticolo si ha: $\bigvee_{k-1}^{\infty} p_k \vee \bigvee_{k-1}^{\infty} q_k = \bigvee_{k-1}^{\infty} (p_k \vee q_k)$; cfr. [16], pag. 6, teor. 1.4.

(23) Si tenga presente che in qualunque \aleph_0 -reticolo distributivo, se le due successioni $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ sono non decrescenti, si ha $p_h \wedge q_k \leq p_{h+k} \wedge q_{h+k}$, e quindi $\bigvee_{h-1}^{\infty} p_h \wedge \bigvee_{k-1}^{\infty} q_k = \bigvee_{h-1}^{\infty} \bigvee_{k-1}^{\infty} (p_h \wedge q_k) \leq \bigvee_{n-1}^{\infty} (p_n \wedge q_n)$, mentre è ovviamente $\bigvee_{h-1}^{\infty} \bigvee_{k-1}^{\infty} (p_h \wedge q_k) \geq \bigvee_{n-1}^{\infty} (p_n \wedge q_n)$; pertanto è $\bigvee_{h-1}^{\infty} p_h \wedge \bigvee_{k-1}^{\infty} q_k = \bigvee_{n-1}^{\infty} (p_n \wedge q_n)$.

quindi

$$A_{\tau(x+y)}(\lambda) \geq \bigvee_{r+s<\lambda} [A_{\tau x}(r) \wedge A_{\tau y}(s)] = A_{\tau x + \tau y}(\lambda),$$

ed infine

$$\tau x + \tau y \geq \tau(x + y).$$

4.4. *Dato un elemento x di \mathcal{L} ed un numero reale α , si ha: $\alpha(\tau x) = \tau(\alpha x)$.*

(i) Se α è positivo, si ha $\bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - \alpha x)^+] = \bigvee_{k-1}^{\infty} \left[1 \wedge k \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha} - x \right)^+ \right] = \bigvee_{k-1}^{\infty} \left[1 \wedge k \left(\frac{\lambda}{\alpha} - x \right)^+ \right]$, quindi $A_{\tau(\alpha x)}(\lambda) = A_{\tau x} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)$, per ogni numero reale λ , ed infine la tesi.

(ii) Sia ora $\alpha = 0$. Poichè $\bigvee_{k-1}^{\infty} (1 \wedge k \lambda^+) = \bigvee_{k-1}^{\infty} (1 \wedge k \lambda) = 1$ per ogni valore positivo di λ , ed è $\bigvee_{k-1}^{\infty} (1 \wedge k \lambda^+) = \bigvee_{k-1}^{\infty} (1 \wedge 0) = 0$ per ogni valore negativo di λ , si avrà $(\tau 0)(a) = \inf \{ \lambda : \bigvee_{k-1}^{\infty} (1 \wedge k \lambda^+) \in a \} = 0$ per $a \in \mathcal{A}$.

(iii) Se α è negativo, si ha: $\tau(\alpha x) + \tau(|\alpha| x) = \tau 0 = 0$, quindi $\tau(\alpha x) = -\tau(|\alpha| x) = -|\alpha|(\tau x) = \alpha(\tau x)$.

4.5. *Dato un elemento x di \mathcal{L} , se è $\tau x = 0$ è anche $x = 0$.*

(i) Se $\tau x \geq 0$, allora è $\inf \{ \lambda : \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \in a \} \geq 0$, per ogni $a \in \mathcal{A}$; quindi, per $\lambda < 0$, l'elemento $\bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+]$ non appartiene ad alcun ultrafiltro di \mathcal{A} ; ne segue $0 \leq 1 \wedge (\lambda - x)^+ \leq \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] = 0$, quindi $(\lambda - x)^+ = 0$, quindi $x \geq \lambda$ per ogni $\lambda < 0$; si conclude: $x \geq 0$ ⁽²⁴⁾.

(ii) D'altra parte, dalla $\tau x \leq 0$ segue $\tau(-x) = -\tau x \geq 0$, da cui $-x \geq 0$, e quindi $x \leq 0$.

4.6. *Dati due elementi x ed y di \mathcal{L} , si ha $\tau x \leq \tau y$ quando e solo quando è $x \leq y$.*

Dalla ipotesi $x \leq y$ segue, per ogni numero reale λ , $(\lambda - x)^+ \geq (\lambda - y)^+$, da cui $\bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \geq \bigvee_{k-1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - y)^+]$, da cui $\tau x \leq \tau y$. Viceversa, dalla $\tau x \leq \tau y$ segue $\tau(y - x) = \tau y - \tau x \geq 0$, da cui $y - x \geq 0$ in virtù della 4.5 (i), e quindi $y \geq x$.

⁽²⁴⁾ \mathcal{L} è archimedeo, essendo \mathfrak{N}_0 -completo (cfr. [6], pag. 69, teor. 3.1.3), dunque dalla condizione: $x \geq -1/k$ (che implica $k(-x) \leq 1$) per ogni $k = 1, 2, \dots$, si deduce $-x \leq 0$ (cfr. [6], pag. 51, teor. 1.2.19).

4.7. Dato un elemento u di \mathcal{A} , τu è la funzione caratteristica dell'insieme ωu nell'ambiente \mathcal{A} .

(i) Sia λ un numero negativo; allora si ha: $\lambda - u < 0$, quindi $(\lambda - u)^+ = 0$, quindi $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] = 0 \notin a$, quale che sia $a \in \mathcal{A}$.

(ii) Sia λ un numero maggiore di uno, e k un numero naturale maggiore di $1/(\lambda - 1)$; allora si ha: $k(\lambda - u)^+ = k(\lambda - u) \geq k(\lambda - 1) > 1$, e quindi $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] = 1 \in a$, quale che sia $a \in \mathcal{A}$.

(iii) Sia λ un numero positivo e minor d'uno, sia $v = 1 - u$; avremo allora: $v \in \mathcal{A}$, $u \wedge v = 0$, $u \vee v = u + v = 1$; perciò: $(\lambda - u)^+ = [(\lambda - 1)u + \lambda v]^+ = 0 \vee (\lambda - 1)u \vee \lambda v = 0 \vee \lambda v = \lambda v$, da cui segue subito

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] = \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k\lambda v) = v \begin{cases} \in a & \text{per } u \notin a \\ \notin a & \text{per } u \in a \text{ }^{(25)}. \end{cases}$$

In conclusione si ha

$$(\tau u)(a) = \inf \left\{ \lambda : \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] \in a \right\} = \begin{cases} 1 & \text{per } a \in \omega u \\ 0 & \text{per } a \notin \omega u \end{cases} \text{ c.d.d..}$$

4.8. Tutti quegli elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ che sono « funzioni semplici » (ossia combinazioni lineari di funzioni caratteristiche d'insiemi della classe $\omega \mathcal{A}$) appartengono a $\tau \mathcal{L}$.

Sia $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$, dove α_k è un numero reale ed f_k la funzione caratteristica (entro l'ambiente \mathcal{A}) dell'insieme ωu_k , con $u_k \in \mathcal{A}$; posto $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$, avremo $\tau x = \sum_{k=1}^n \alpha_k \tau u_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = f$, per i lemmi 4.6, 4.3, 4.4.

4.9. Tutti gli elementi positivi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ appartengono a $\tau \mathcal{L}$ ⁽²⁶⁾.

⁽²⁵⁾ Da notare che, per $k > 1/\lambda$, si ha $1 \wedge k\lambda v = v$, in quanto è $(1 \wedge k\lambda v) - v = (1 - v) \wedge [(\lambda k - 1)v] = u \wedge [(\lambda k - 1)v] = 0$, essendo $u \perp v$; quindi è $v = \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k\lambda v)$.

⁽²⁶⁾ Per elemento positivo s'intende, ovviamente, un elemento che maggiori quello nullo, senza coincidere con esso; in questo caso, una funzione non negativa e non identicamente nulla.

(i) Sia f un elemento positivo di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni semplici della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, tali da aversi: $0 \leq f_k \leq f$, $f = \bigvee_{k=1}^{\infty} f_k$ ⁽²⁷⁾; sia x_k un elemento di \mathcal{L} tale da aversi $\tau x_k = f_k$ per $k = 1, 2, \dots$, (lemma 4.8); sia $x = \bigvee_{k=1}^{\infty} x_k$, sia $g = \tau x$.

(ii) Si ha, per ogni numero naturale k , $g = \tau x \geq \tau x_k = f_k$, e quindi $g \geq \bigvee_{k=1}^{\infty} f_k = f$.

(iii) Supponiamo, per assurda ipotesi, che in un certo ultrafiltro \bar{a} sia $f(\bar{a}) < g(\bar{a})$, e quindi anche $f(\bar{a}) < \lambda < \mu < g(\bar{a})$, per due opportuni valori reali λ, μ . Allora esiste un elemento di \mathcal{A} , v , tale aversi $v \in \bar{a}$ ed $f(a) < \lambda < \mu < g(a)$ per ogni $a \in \omega v$ ⁽²⁸⁾; di qui segue subito, per il lemma 4.7, $(\mu - \lambda) \cdot \tau v \leq g - f \leq g - f_k = \tau x - \tau x_k =$ (per il lemma 4.3) $= \tau(x - x_k)$, e quindi, per il lemma 4.6 e 4.4, $(\mu - \lambda) \cdot v \leq x - x_k$ per ogni numero naturale k , ed infine $(\mu - \lambda) \cdot v \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} (x - x_k) = x - \bigvee_{k=1}^{\infty} x_k = 0$, il che è assurdo, perchè dalla $v \in \bar{a} \in \mathcal{A}$ segue invece $v \neq 0$. Dunque dev'essere $f(a) = g(a)$ su tutto \mathcal{A} , e ciò prova che è $f = \tau x$.

4.10. Tutti gli elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ appartengono a $\tau \mathcal{L}$.

Sia f un elemento di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, f^+ ed f^- rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di f , anch'esse elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, x' ed x'' due elementi di \mathcal{L} , tali di aversi $\tau x' = f^+$, $\tau x'' = f^-$ (lemma 4.9); sia $x = x' - x''$. Avremo allora: $\tau x = \tau(x' - x'') = \tau x' - \tau x'' = f^+ - f^- = f$, per il lemma 4.3, 4.4, e pertanto $f \in \tau \mathcal{L}$.

Il lemma 4.10 dimostra che τ è un'applicazione di \mathcal{L} su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$; i lemmi 4.3 e 4.4 provano che tale applicazione è un omomorfismo lineare, il lemma 4.5 che, di più, è un isomorfismo lineare; ciò premesso, il lemma 4.6 dimostra che τ è anche un isomorfismo reticolare: il teorema III è provato.

⁽²⁷⁾ Sia $\{\lambda_k\}$ una successione di numeri reali, densa nell'intervallo $(0, +\infty)$, e poniamo $f_k(a) = 0$ per $a \in \mathcal{A}_f(\lambda_k)$, $f_k(a) = \lambda_k$ per $a \notin \mathcal{A}_f(\lambda_k)$; è subito visto che la successione $\{f_k\}$ soddisfa le condizioni enunciate (cfr. [2], dimostrazione del teorema VII, pagg. 237-238).

⁽²⁸⁾ Teorema detto « della permanenza del segno », per le funzioni (continue) f e g .

