ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

S. CAMPANATO

Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano L^p in $C^{h,\alpha}$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 3 (1964), p. 345-360

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_3_345_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

TEOREMI DI INTERPOLAZIONE PER TRASFORMAZIONI CHE APPLICANO L^p IN $C^{h,\alpha}$

di S. CAMPANATO (*)

In un recente lavoro ([1]) (1) ho introdotto e ho studiato la famiglia di spazi funzionali $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$; per comodità del lettore richiamerò la definizione di tali spazi e talune proprietà limitandomi qui e nel seguito a considerare il caso che l'aperto Ω sia un cubo dello spazio euclideo R^n anche se i risultati di questa nota si potrebbero dare per aperti di tipo più generale.

Sia Ω un cubo aperto di lato l, k un intero non negativo, p e λ due numeri reali con $p \geq 1$ e $\lambda \geq 0$, $\Omega(x_0, \varrho)$ un generico sottocubo di Ω di centro x_0 e lato ϱ.

Diciamo che una funzione $u(x)$ di $L^p(\Omega)$ appartiene allo spazio $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ se

$$\text{(I)} \qquad \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \left[\frac{1}{\varrho^\lambda} \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - P(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

dove con $\mathcal{P}_k$ si è indicata la classe dei polinomi, a coefficienti reali, di grado non superiore a k. Se indichiamo con $|||u|||_{k,p,\lambda}$ la quantità a primo membro in (I), $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è uno spazio di Banach (completo) con la norma

$$\text{(II)} \qquad \|u\|_{k,p,\lambda} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + |||u|||_{k,p,\lambda} .$$

Gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$; per opportuni valori dei parametri k, p, λ, sono isomorfi con alcuni ben noti spazi funzionali. Limitandoci a richiamare quei

Pervenuto alla Redazione il 25 Febbraio 1964.

(*) Ha parzialmente contribuito finanziariamente alla preparazione di questo lavoro l'Air Force Office of Scientific Research OAR con il Grant AF EOAR 63-29.

(1) I numeri fra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

risultati che ci serviranno nel seguito, ricordiamo innanzitutto che per $\lambda = 0$ gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,0)}(\Omega)$ sono isomorfi, qualunque sia k, con lo spazio $L^p(\Omega)$ normalizzato nella maniera abituale (²).

Il caso più interessante si ha quando $\lambda > n$, $\dfrac{\lambda - n}{p}$ non è intero e, detta h la parte intera di $\dfrac{\lambda - n}{p}$, risulta $h \leq k$. Sotto queste condizioni è stato dimostrato in [1] che $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo con lo spazio $C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha = \dfrac{\lambda - n}{p} - h$, delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$ con le derivate fino a quelle di ordine h e dotate di derivate h-sime α-hölderiane, spazio che si intende normalizzato nel modo abituale (³)

$$\| u \|_{C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{|p| \leq h} \sup_{\bar{\Omega}} | D^p u | + \sup_{|p| = h} \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{| D^p u(x) - D^p u(y) |}{| x - y |^\alpha} .$$

Il risultato ora richiamato suggerisce questa osservazione: fissato l'intero k, nelle ipotesi ora dette per λ e p la famiglia di spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ dipende, a meno di isomorfismi, dall'unico parametro $\dfrac{\lambda - n}{p}$ e viceversa ogni spazio di Banach $C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, è isomorfo a tutti gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ i cui parametri k, p, λ verificano le condizioni

$$\text{(III)} \qquad k \geq h, \quad \frac{\lambda - n}{p} = \alpha + h.$$

Per quanto riguarda il caso di $\dfrac{\lambda - n}{p} = h$ intero non negativo si hanno questi risultati:

Se $\dfrac{\lambda - n}{p} > k + 1$ allora $u \in \mathcal{P}_k$.

Se $\dfrac{\lambda - n}{p} = k + 1$, $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo con lo spazio $C^{k,1}(\bar{\Omega})$.

(²) $\| u \|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega | u |^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$.

(³) Qui e nel seguito utilizziamo notazioni ormai abituali: se p è una n-pla di interi non negativi $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ allora $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ e $D^p u = \dfrac{\partial^{|p|} u(x)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$.

Se $\frac{\lambda - n}{p} = 0$, e quindi $\lambda = n$, in virtù di un risultato di F. John e L. Nirenberg ([2]) si ha, per le funzioni $u \in \mathcal{L}_k^{(p,n)}(\Omega)$, questa caratterizzazione [4]: detto u_Ω il valor medio di u in Ω e posto $\| u \|_{k,p,n} \leq K$ esistono tre costanti positive H, β, l ($l < 1$) tali che

$$\text{(IV)} \qquad \text{mis}\{|u - u_\Omega| > \eta \text{ in } \Omega\} \leq He^{-\beta\eta K^{-1}} \text{mis}\{|u - u_\Omega| > l\eta \text{ in } \Omega\}.$$

In tutti questi casi quindi si può ancora dire che gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ non dipendono tanto dai parametri p e λ quanto dal rapporto $\frac{\lambda - n}{p}$.

Nel numero 2 di questa nota dimostreremo che questa circostanza si verifica anche in tutti gli altri casi in cui $\frac{\lambda - n}{p}$ è un intero non negativo, dimostreremo cioè che in ogni caso il valore del rapporto $\frac{\lambda - n}{p}$ caratterizza perfettamente lo spazio $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ quando $\lambda \geq n$.

Il risultato di John-Nirenberg e i risultati precedentemente richiamati sugli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ sono stati utilizzati, limitatamente al caso di $k = 0$, da G. Stampacchia in [3] per ottenere interessanti teoremi di interpolazione. Mi limito a ricordarne due che nel lavoro di Stampacchia sono dedotti come casi particolari di teoremi di interpolazione più generali sugli spazi $\mathcal{L}_0^{(p,\lambda)}(\Omega)$ e che si collegano a quanto dimostreremo nel seguito.

TEOREMA [I]. *Sia T una applicazione lineare di $L^{p_i}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha_i}(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$) tale che*

$$\| Tu \|_{C^{0,\alpha_i}(\bar{\Omega})} \leq K_i \| u \|_{L^{p_i}(\Omega)} \qquad (i = 1, 2)$$

posto

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \alpha = (1 - \theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$$

si ha che per ogni $0 < \theta < 1$

$$\| Tu \|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq c(\theta) \| u \|_{L^p(\Omega)}$$

dove $c(\theta)$ è limitata su ogni intervallo chiuso contenuto in $]0, 1[$.

---

(4) Il risultato di F. Iohn e L. Nirenberg è relativo al caso di $k = 0$ e $p = 1$. Dalla (IV) segue però immediatamente che esso vale qualunque sia p mentre l'indipendenza dal parametro k segue dal lemma [6.1] di [1].

E più in generale

TEOREMA [II]. *Sia T una applicazione lineare e continua di $L^{p_1}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha_1}(\bar{\Omega})$ e di $L^{p_2}(\Omega)$ in $L^{\alpha_2}(\Omega)$ con $p_1 > p_2 \geq 1$, $\alpha_2 \geq p_2$; posto*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \tau = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \dfrac{n}{\alpha_2}}$$

si ha il seguente risultato

a) *per* $0 < \theta < \tau$, $\| Tu \|_{C^{0,\alpha}} \leq K_1 \| u \|_{L^p}$ *con* $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 - \theta \dfrac{n}{\alpha_2}$

b) *per* $\theta = \tau$, $\displaystyle\int_{\Omega} e^{H |Tf| \cdot \|f\|_{L^p}^{-1}} dx \leq M$

c) *per* $\tau < \theta < 1$, $\| Tu \|_{L^q} \leq K_2 \| u \|_{L^p}$ *con* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p_2} \dfrac{\theta - \tau}{1 - \tau}$.

La costante K_1 [K_2] è limitata in ogni intervallo chiuso contenuto in $]0, \tau[$ ($]\tau, 1[$) e K_1, K_2, H, M non dipendono da u.

In questa nota estenderò il teorema [I] a trasformazioni che applicano L^p negli spazi $C^{h,\alpha}(\bar{\Omega})$ con $h \geq 0$.

Questa estensione si ottiene apportando modifiche puramente formali alla dimostrazione che Stampacchia ha dato in [3] del teorema [2.1] e sfruttando in modo essenziale i risultati del lavoro [1].

Da questo risultato e dai risultati di Stampacchia ne verrà anche una semplice generalizzazione del teorema [II].

1. Sia $u(x)$ una funzione appartenente a $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ (k intero ≥ 0; p e λ reali con $p \geq 1$, $\lambda \geq 0$; Ω cubo dello spazio euclideo R^n). È stato dimostrato in [1] (cfr. n. 3) che per ogni sottocubo $\Omega(x_0, \varrho) \subset \Omega$ esiste uno ed un solo polinomio $P_k(x, x_0, \varrho, p, u) \in \mathcal{P}_k$ tale che

$$(1.1) \quad \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} | u(x) - P(x) |^p dx = \int_{\Omega(x_0,\varrho)} | u(x) - P_k(x, x_0, \varrho, p, u) |^p dx$$

Per ogni numero reale $\sigma > 0$ poniamo [5]

$$\Phi_{k,p,\lambda}(u, \sigma) = \sup_{\Omega(x_0,\varrho) \subset \Omega} \frac{1}{\varrho^\lambda} \text{mis} \{ | u(x) - P_k(x, x_0, \varrho, p, u) | > \sigma \text{ in } \Omega(x_0, \varrho) \}.$$

(5) La misura e l'integrazione si intendono sempre nel senso di Lebesgue.

Diciamo che una trasformazione lineare T è di tipo forte $[L^q, \mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}]$ se esiste una costante K tale che $\forall f \in L^q(\Omega)$

$$\||| Tf |||_{k,p,\lambda} \leq K \| f \|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Diremo invece che T è di tipo debole $[L^q, \mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}]$ (cfr. [3] n. 2) se esiste una costante K tale che $\forall f \in L^q(\Omega)$ e $\forall \sigma > 0$

$$\Phi_{k,p,\lambda}(Tf, \sigma) \leq \left(\frac{K \| f \|_{L^q(\Omega)}}{\sigma} \right)^p. \tag{1.3}$$

Ciò posto dimostriamo il seguente teorema di interpolazione

TEOREMA [1.I]. *Siano q_i, p_i, λ_i $(i = 1, 2)$ numeri reali verificanti le relazioni*

$$p_i \geq q_i \geq 1 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.4}$$

$$p_1 \neq p_2, \quad q_1 \neq q_2, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \tag{1.5}$$

Sia T una trasformazione lineare di tipo debole $[L^{q_i}, \mathcal{L}_k^{(p_i,\lambda_i)}]$ $(i = 1, 2)$. Posto

$$\begin{gathered} \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \\ \frac{\lambda}{p} = (1-\theta)\frac{\lambda_1}{p_1} + \theta \frac{\lambda_2}{p_2} \end{gathered} \tag{1.6}$$

T risulta essere di tipo forte $[L^q, \mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}]$ $\forall\, 0 < \theta < 1$.

Questo teorema estende al caso di k intero qualunque il teorema [2.1] di [3] che è relativo al caso di $k = 0$ e, come si è detto nell'introduzione, la dimostrazione di questo teorema è la stessa di quella data da Stampacchia per il teorema [2.1] sopra citato salvo modifiche quasi del tutto formali.

Supponiamo che sia $q_2 < q_1$. Fissato θ, $0 < \theta < 1$, siano q, p, λ i numeri reali definiti dalle (1.6). Sia $f \in L^q(\Omega)$, z un numero reale positivo, $[f]_{-z}^{z}$ la funzione che si ottiene troncando $f(x)$ superiormente a z e inferiormente a $-z$. Poniamo

$$f_1 = [f]_{-z}^{z}, \quad f_2 = f - f_1.$$

È ovvio che

$$f_1 \in L^{q_1}(\Omega), \quad f_2 \in L^{q_2}(\Omega), \quad f = f_1 + f_2.$$

Poniamo ancora

$$h_1 = T f_1, \quad h_2 = T f_2, \quad h = T f = h_1 + h_2 .$$

Osserviamo a questo punto che

$$|||h|||^p_{k,p,\lambda} = \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \left\{ \frac{1}{\varrho^\lambda} \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |h(x) - P(x)|^p \, dx \right\} =$$

$$= \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \left\{ \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |h(x) - P_k(x, x_0, \varrho, p, h)|^p \, dx \right\} \leq$$

(1.7) $$\leq \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \left\{ \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |h(x) - P_k(x, x_0, \varrho, p_1, h_1) - P_k(x, x_0, \varrho, p_2, h_2)|^p \, dx \right\} = (6)$$

$$= \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \frac{p}{\varrho^\lambda} \int_0^{+\infty} \eta^{p-1} \operatorname{mis} \{ |h_1 + h_2 - P_k(x, x_0, \varrho, p_1, h_1) - P_k(x, x_0, \varrho, p_2, h_2)| > \eta \ \text{ in } \ \Omega(x_0,\varrho)\} \, d\eta$$

$$\leq \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \frac{p}{\varrho^\lambda} \sum_1^2{}_i \int_0^{+\infty} \eta^{p-1} \operatorname{mis} \left\{ |h_i - P_k(x, x_0, \varrho, p_i, h_i)| > \frac{\eta}{2} \ \text{ in } \ \Omega(x_0,\varrho) \right\} d\eta.$$

Ora per ipotesi T è di tipo debole $[L^{q_i}, \mathcal{L}_k^{(p_i, \lambda_i)}]$ $(i = 1, 2)$ quindi esisteranno due costanti K_1, K_2 tali che

(1.8) $$\Phi_{k, p_i, \lambda_i}(T f, \sigma) \leq \left(\frac{K_i \, \|f\|_{L^{q_i}(\Omega)}}{\sigma} \right)^{p_i} \quad \forall f \in L^{q_i}(\Omega) \qquad (i = 1, 2).$$

Da queste relazioni e dalla (1.7) si ha allora

(1.9) $$|||h|||^p_{k,p,\lambda} \leq p \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \sum_1^2{}_i \, \varrho^{\lambda_i - \lambda} 2^{p_i} K_i^{p_i} \int_0^{+\infty} \eta^{p - p_i - 1} \, \|f_i\|^{p_i}_{L^{q_i}(\Omega)} \, d\eta.$$

---

(6) Si è sfruttata la relazione

$$\int_I |f(x)|^p \, dx = p \int_0^{+\infty} \eta^{p-1} \operatorname{mis} \{ |f| > \eta \ \text{ in } I \} \, d\eta.$$

Indichiamo con $m(t)$ la mis $\{\,|f| > t$ in $\Omega\}$; ne segue che

$$\text{mis}\{\,|f_1| > t \text{ in } \Omega\} = \begin{cases} m(t) & \text{per } \; 0 \le t \le z \\ 0 & \text{per } \; t > z \end{cases}$$

$$\text{mis}\{\,|f_2| > t \text{ in } \Omega\} = m(t+z) \quad \text{per } t > 0.$$

Da queste relazioni e dalla (1.9) si ottiene facilmente che

(1.10)
$$\begin{aligned} |||h|||^p_{k,p,\lambda} \le p \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \Bigg\{ & \varrho^{\lambda_1-\lambda}\, 2^{p_1} K_1^{p_1} (q_1)^{\frac{p_1}{q_1}} \int_0^{+\infty} \eta^{p-p_1-1} \left(\int_0^z t^{q_1-1} m(t)\, dt \right)^{\frac{p_1}{q_1}} d\eta \; + \\ & + \varrho^{\lambda_2-\lambda}\, 2^{p_2} K_2^{p_2} (q_2)^{\frac{p_2}{q_2}} \int_0^{+\infty} \eta^{p-p_2-1} \left(\int_z^{+\infty} t^{q_2-1} m(t)\, dt \right)^{\frac{p_2}{q_2}} d\eta \Bigg\}. \end{aligned}$$

Supponiamo a questo punto che $p_2 < p_1$ e scegliamo z nel seguente modo

(1.11)
$$z = \left(\frac{\eta}{A\,\varrho^{\mu}} \right)^{\xi}$$

dove ξ è una soluzione positiva del sistema [7]

(1.12)
$$\frac{1}{\xi}(p-p_i)\frac{q_i}{p_i} = (q-q_i) \qquad (i=1,2)$$

μ è soluzione del sistema [8]

(1.13)
$$\mu(p-p_i) + \lambda_i - \lambda = 0 \qquad (i=1,2)$$

---

(7) Osserviamo che è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} (p-p_1)\dfrac{q_1}{p_1} & q-q_1 \\[2ex] (p-p_2)\dfrac{q_2}{p_2} & q-q_2 \end{vmatrix}.$$

(8) Osserviamo che è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} p-p_1 & \lambda-\lambda_1 \\ p-p_2 & \lambda-\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

e A è un numero positivo che fisseremo opportunamente nel seguito. Dalla (1.10) segue allora (9)

$$\||h\||^{p}_{k,p,\lambda} \leq p \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \left\{ \varrho^{\lambda_1-\lambda}\, 2^{p_1} K_1^{p_1} (q_1)^{\frac{p_1}{q_1}} \int_0^{+\infty} \eta^{p-p_1-1} \left(\int_0^{\left(\frac{\eta}{A\varrho^{\mu}}\right)^{\xi}} t^{q_1-1}\, m(t)\, dt \right)^{\frac{p_1}{q_1}} d\eta + \right.$$

$$\left. + \varrho^{\lambda_2-\lambda}\, 2^{p_2} K_2^{p_2} (q_2)^{\frac{p_2}{q_2}} \int_0^{+\infty} \eta^{p-p_2-1} \left(\int_{\left(\frac{\eta}{A\varrho^{\mu}}\right)^{\xi}}^{+\infty} t^{q_2-1}\, m(t)\, dt \right)^{\frac{p_2}{q_2}} d\eta \right\} \leq$$

$$\leq p \sup_{\Omega(x_0,\varrho)\subset\Omega} \left\{ \varrho^{\lambda_1-\lambda}\, 2^{p_1} K_1^{p_1} (q_1)^{\frac{p_1}{q_1}} \left(\int_0^{+\infty} t^{q_1-1}\, m(t) \left(\int_{A\varrho^{\mu} t^{\frac{1}{\xi}}}^{+\infty} \eta^{p-p_1-1}\, d\eta \right)^{\frac{q_1}{p_1}} dt \right)^{\frac{p_1}{q_1}} + \right.$$

$$\left. + \varrho^{\lambda_2-\lambda}\, 2^{p_2} K_2^{p_2} (q_2)^{\frac{p_2}{q_2}} \left(\int_0^{+\infty} t^{q_2-1}\, m(t) \left(\int_0^{A\varrho^{\mu} t^{\frac{1}{\xi}}} \eta^{p-p_2-1}\, d\eta \right)^{\frac{q_2}{p_2}} dt \right)^{\frac{p_2}{q_2}} \right\} \leq$$

$$\leq p \sum_1^2{}_i (-1)^i 2^{p_i} K_i^{p_i} (q_i)^{\frac{p_i}{q_i}} \frac{A^{p-p_i}}{p-p_i} \left(\int_0^{+\infty} t^{q-1}\, m(t)\, dt \right)^{\frac{p_i}{q_i}} =$$

$$= p \sum_1^2{}_i (-1)^i 2^{p_i} K_i^{p_i} \left(\frac{q_i}{q}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} \frac{A^{p-p_i}}{p-p_i} \| f \|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q p_i}{q_i}}.$$

---

(9) Qui si applica questo lemma (cfr. [3] lemma (2.1)):

Se f, g, z sono funzioni definite in $[0, +\infty]$ non negative, z è crescente e k è un numero ≥ 1 allora

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left\{ \int_0^{z(x)} g(y)\, dy \right\}^k dx \leq \left(\int_0^{+\infty} g(y) \left(\int_{\zeta(y)}^{+\infty} f(x)\, dx \right)^{\frac{1}{k}} dy \right)^k$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left(\int_{z(x)}^{+\infty} g(y)\, dy \right)^k dx \leq \left(\int_0^{+\infty} g(y) \left(\int_0^{\zeta(y)} f(x)\, dx \right)^{\frac{1}{k}} dy \right)^k$$

dove ζ è la funzione inversa di z.

Poniamo ora $A = K_1^r K_2^s \|f\|_{L^q}^\tau$ e scegliamo r, s, τ in modo tale che in entrambi gli addendi dell'ultima sommatoria scritta figurino le stesse potenze di K_1, K_2, $\|f\|_{L^q(\Omega)}$. Con facile calcolo si ottiene

$$\text{(1.14)} \qquad |||h|||_{k,p,\lambda} \leq MK_1^{(1-\theta)} K_2^{\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

con

$$\text{(1.15)} \qquad M^p = p \sum_1^2 {}_i (-1)^i 2^{p_i} \left(\frac{q_i}{q}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} \frac{1}{p - p_i}.$$

Se $p_2 > p_1$ con calcoli analoghi si giunge ancora alla maggiorazione (1.14) dove la costante M sarà ancora definita dalla (1.15) a meno di un cambiamento di segno.

Il teorema [1.I] è così dimostrato; si è dimostrato di più che sussiste la maggiorazione (1.14) dove la costante M, definita dalla (1.15), è in definitiva una funzione di θ e come tale è manifestamente limitata in ogni intervallo chiuso contenuto in $]0, 1[$.

2. Il risultato di interpolazione che ci siamo prefisso sarà una conseseguenza del teorema ora dimostrato e di esso ci occuperemo nel successivo n. 3.

In questo numero premettiamo un risultato concernente gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\lambda)}(\Omega)$ quando $\dfrac{\lambda - n}{p}$ è un intero non negativo.

Cominciamo con l'osservare che se k è un intero ≥ 0 e p è un numero reale ≥ 1 allora la norma $\|u\|_{k,p,n+kp}$ è equivalente alla

$$\text{(2.1)} \qquad \|u\|_{L^1(\Omega)} + |||u|||_{k,p,n+kp}.$$

Che (2.1) si maggiori con $\|u\|_{k,p,n+kp}$ è banale in quanto $p \geq 1$; basta quindi far vedere che $\|u\|_{k,p,n+kp}$ si maggiora con (2.1).

Dai risultati di [1] sappiamo che se $u \in \mathcal{L}_k^{(p,n+k)}(\Omega)$ allora $u \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$ $\forall\ \alpha < 1$ (cfr. [1] teor. [5.1]) e si ha la maggiorazione

$$\text{(2.2)} \qquad \|u\|_{C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \text{cost.} \|u\|_{k,1,n+(k-1+\alpha)} \text{ (10) } \leq$$

(10) Per maggiorare $|||u|||_{k,1,n+k}$ con $|||u|||_{k,p,n+kp}$ basta ricordare la definizione di $|||\ |||_{k,q,\lambda}$ e applicare la disuguaglianza di Hölder. Si ha infatti

$$\leq \text{cost.}\ \| u \|_{k,\,1,\,n+k}\ ^{(11)} \leq \text{cost.}\ \{ \| u \|_{L^1(\Omega)} + ||| u |||_{k,\,p,\,n+kp} \}.$$

D'altra parte

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq [\text{mis}\ \Omega]^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{\overline{\Omega}} | u | \leq [\text{mis}\ \Omega]^{\frac{1}{p}} \cdot \| u \|_{C^{k-1,\,\alpha}(\overline{\Omega})}. \tag{2.3}$$

Dalle (2.3), (2.2) segue appunto la maggiorazione cercata

$$\| u \|_{k,\,p,\,n+kp} \leq \text{cost.}\ \{ \| u \|_{L^1(\Omega)} + ||| u |||_{k,\,p,\,n+kp} \}. \tag{2.4}$$

Dimostriamo ora il seguente teorema

Teorema 2.1. *Sia k un intero ≥ 1. Gli spazi $\mathcal{L}_k^{(p,\,n+kp)}(\Omega)$, con $p \geq 1$ sono isomorfi allo spazio $\mathcal{L}_k^{(1,\,n+k)}(\Omega)$.*

Fissiamo un valore di $p > 1$ e dimostriamo che esiste una costante positiva c_1 tale che $\forall\ u \in \mathcal{L}_k^{(1,\,n+k)}(\Omega)$

$$\| u \|_{k,\,p,\,n+kp} \leq c_1 \| u \|_{k,\,1,\,n+k} \tag{2.5}$$

Osserviamo che poichè $k \geq 1$ le funzioni u sono almeno hölderiane in $\overline{\Omega}$ e quindi $\in L^p(\Omega)\ \forall\ p \geq 1$.

$$\frac{1}{\varrho^{n+k}} \int_{\Omega(x_0,\,\varrho)} | u(x) - P_k(x, x_0, \varrho, p, u) |\, dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\varrho^{n+kp}} \int_{\Omega(x_0,\,\varrho)} | u(x) - P_k(x, x_0, \varrho, p, u) |^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq ||| u |||_{k,\,p,\,n+kp}.$$

Quindi

$$||| u |||_{k,\,1,\,n+k} = \sup_{\Omega(x_0,\,\varrho) \subset \Omega} \frac{1}{\varrho^{n+k}} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\,\varrho)} | u(x) - P(x) |\, dx \leq ||| u |||_{k,\,p,\,n+kp}.$$

(11) Se $\lambda_1 > \lambda_2$ allora $||| u |||_{k,\,1,\,\lambda_2} \leq l^{\lambda_1 - \lambda_2} ||| u |||_{k,\,1,\,\lambda_1}$ infatti:

$$||| u |||_{k,\,1,\,\lambda_2} = \sup_{\Omega(x_0,\,\varrho)} \frac{1}{\varrho^{\lambda_2}} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\,\varrho)} | u(x) - P(x) |\, dx \leq$$

$$\leq l^{\lambda_1 - \lambda_2} \sup_{\Omega(x_0,\,\varrho)} \frac{1}{\varrho^{\lambda_1}} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\,\varrho)} | u - P |\, dx = l^{\lambda_1 - \lambda_2} ||| u |||_{k,\,1,\,\lambda_1}.$$

Sia $u \in \mathcal{L}_k^{(1,\, n+k)}(\Omega)$, $\Omega(x_0, 3\varrho)$ un sottocubo di Ω. Poniamo

$$P_k(x, x_0, \varrho, 1, u) = \sum_{|h| \leq k} \frac{a_h(x_0, \varrho)}{h\,!}(x - x_0)^h. \tag{2.6}$$

Dai risultati della nota [1] sappiamo che u è dotata di derivate fino all'ordine $k - 1$ continue, anzi hölderiane con ogni esponente < 1, in $\bar{\Omega}$ e che per tali derivate sussiste la seguente maggiorazione (¹²)

$$| D^h u(x) - a_h(x, \varrho) | \leq c_2 \, |||\, u \,|||_{k,\, p,\, n+kp} \, \varrho^{k - |h|}\,; \ | h | \leq k - 1. \tag{2.7}$$

Ciò posto $\forall\, x \in \Omega(x_0, \varrho)$ si ha

$$\begin{aligned} &\left| u(x) - \sum_{|h| \leq k-1} \frac{D^h u(x_0)}{h\,!}(x - x_0)^h - \sum_{|h| = k} \frac{a_h(x_0, 2\varrho)}{h\,!}(x - x_0)^h \right| \leq \\ &\leq | u(x) - a_0(x, 2\varrho) | + \sum_{|h| \leq k-1} \frac{| a_h(x_0, 2\varrho) - D^h u(x_0) |}{h\,!} \, | x - x_0 |^{|h|} + \\ &\qquad + | P_k(x, x, 2\varrho, 1, u) - P_k(x, x_0, 2\varrho, 1, u) | . \end{aligned} \tag{2.8}$$

D'altra parte applicando un lemma di De Giorgi (cfr. [1] lemma [2.I]) si ha che

$$\begin{aligned} &| P_k(x, x, 2\varrho, 1, u) - P_k(x, x_0, 2\varrho, 1, u) | \leq \\ &\leq \frac{c_3}{\varrho^n} \int_{\Omega(x, \varrho)} | P_k(t, x, 2\varrho, 1, u) - P_k(t, x_0, 2\varrho, 1, u) | \, dt \leq \\ &\leq \frac{c_3}{\varrho^n} \left[\int_{\Omega(x_0, 2\varrho)} | P_k(t, x_0, 2\varrho, 1, u) - u(t) | \, dt + \int_{\Omega(x, 2\varrho)} | P_k(t, x, 2\varrho, 1, u) - u(t) | \, dt \right] \leq \\ &\leq \text{cost}\, \varrho^k \, |||\, u \,|||_{k,\, 1,\, n+k} . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dalla (2.8) tenuto conto delle (2.7) e (2.9) si ha in definitiva che $\forall\, x \in \Omega(x_0, \varrho)$

$$\begin{aligned} &\left| u(x) - \sum_{|h| \leq k-1} \frac{D^h u(x_0)}{h\,!}(x - x_0)^h - \sum_{|h| = k} \frac{a_h(x_0, 2\varrho)}{h\,!}(x - x_0)^h \right| \leq \\ &\leq c_4 \, |||\, u \,|||_{k,\, 1,\, n+k} \, \varrho^k . \end{aligned} \tag{2.10}$$

(¹²) La maggiorazione (2.7) è dimostrata nel lemma [3.IV] di [1]. Qui e nel seguito del teorema con h si indica una n-pla di interi non negativi $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Ora, posto

$$Q(x) = \sum_{|h| \leq k-1} \frac{D^h u(x_0)}{h!}(x - x_0)^h + \sum_{|h| = k} \frac{a_h(x_0, 2\varrho)}{h!}(x - x_0)^h, \quad Q(x) \in \mathcal{P}_k$$

e quindi dalla (2.10) segue che

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \varrho)} |u(x) - P(x)|^p \, dx \leq c_4^p \, 2^{kp} \, |||u|||^p_{k, 1, n+k} \, \varrho^{n+kp}$$

ossia

$$|||u|||_{k, p, n+kp} \leq c_4 \, 2^k \, |||u|||_{k, 1, n+k} \tag{2.11}$$

e quindi la maggiorazione (2.5) per quanto si è osservato all'inizio di questo numero.

La maggiorazione inversa della (2.5) è immediata (cfr. nota ([11])). Il teorema è così dimostrato.

Corollario [2.I]. *Sia h un intero non negativo e p un numero reale ≥ 1; allora per ogni intero $k \geq h$ $\mathcal{L}_k^{(p, n+hp)}(\Omega)$ è isomorfo con $\mathcal{L}_h^{(1, n+h)}(\Omega)$.*

Dal lemma [6.I] di [1] segue infatti che $\forall$ intero $k \geq h$ $\mathcal{L}_k^{(p, n+hp)}(\Omega)$ è isomorfo con $\mathcal{L}_h^{(p, n+hp)}(\Omega)$. Ma per il teorema [2.I] $\mathcal{L}_h^{(p, n+hp)}(\Omega)$ è isomorfo con $\mathcal{L}_h^{(1, n+h)}(\Omega)$ e quindi la tesi.

3. Sia α un numero reale positivo e $[\alpha]$ la sua parte intera. Conveniamo in questo numero di indicare con $C^\alpha(\bar{\Omega})$ lo spazio $C^{[\alpha], \alpha - [\alpha]}(\bar{\Omega})$; questo ci permetterà di semplificare l'enunciazione dei teoremi che ora daremo.

Teorema [3.1]. *Siano h_1, h_2 due interi non negativi, $\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2$ quantità reali tali che*

$$h_1 \leq h_2; \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1; \quad p_1, p_2 \geq 1.$$

Sia T una trasformazione lineare di $L^{p_i}(\Omega)$ in $C^{h_i + \alpha_i}(\bar{\Omega})$ $(i = 1, 2)$ e sia

$$\| Tu \|_{C^{h_i+\alpha_i}(\bar{\Omega})} \leq K_i \, \| u \|_{L^{p_i}(\Omega)} \qquad (i = 1, 2) \tag{3.1}$$

Posto

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}$$

$\forall\ t \in\ ]0, 1[$ *e, se* $h_1 < h_2$, $t \neq \dfrac{h - (\alpha_1 + h_1)}{(\alpha_2 + h_2) - (\alpha_1 + h_1)}$ *dove* $h = h_1 + 1, h_1 + 2, \ldots, h_2$ *si ha che* T *è una applicazione lineare e continua di* $L^p(\Omega)$ *in* $C^\mu(\bar{\Omega})$ *dove*

$$\mu = (1 - t)(\alpha_1 + h_1) + t(\alpha_2 + h_2). \tag{3.2}$$

Se $h_1 > h_2$ *e* $t = \dfrac{h - (\alpha_1 + h_1)}{(\alpha_2 + h_2) - (\alpha_1 + h_1)}$ *con* $h = h_1 + 1,\ h_1 + 2, \ldots, h_2$, T *è una applicazione lineare e continua di* $L^p(\Omega)$ *in* $\mathcal{L}_h^{(1, n+h)}(\Omega)$.

Siano q_1, q_2 due numeri reali fissati verificanti le relazioni

$$q_1 \neq q_2\,; \qquad q_i \geq p_i \qquad (i = 1, 2)$$

Per i risultati di [1] si ha che lo spazio $C^{h_i + \alpha_i}(\bar{\Omega})$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{L}_{h_2}^{(q_i,\, q_i(\alpha_i + h_i) + n)}(\Omega)$ $(i = 1, 2)$.

Le (3.1) assicurano che Tu è di tipo forte, e quindi di tipo debole, $[L^{p_i}, \mathcal{L}_{h_2}^{(q_i,\, q_i(\alpha_i + h_i) + n)}]$. Applichiamo allora il teorema [1.I]; posto

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}$$

$$\frac{\lambda - n}{q} = (1 - t)(\alpha_1 + h_1) + t(\alpha_2 + h_2)$$

$\forall\ t \in\ ]0, 1[$ T risulta essere di tipo forte $[L^p, \mathcal{L}_{h_2}^{(q,\lambda)}]$; in altri termini esiste una costante positiva $K(t)$ tale che $\forall\ u \in L^p(\Omega)$

$$|||\, Tu\, |||_{h_2, q, \lambda} \leq K(t)\, \|\, u\, \|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.3}$$

D'altra parte dalla (3.1) segue che

$$\|\, Tu\, \|_{L^q(\Omega)} \leq \text{cost.}\, \|\, u\, \|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Dalle (3.3), (3.4), per quanto si è osservato nel numero 2, segue allora che $\forall\ u \in L^p(\Omega)$.

$$\|\, Tu\, \|_{h_2, q, \lambda} \leq \text{cost.}\, \|\, u\, \|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Ora non resta che interpretare la (3.5).

Se $\dfrac{\lambda - n}{q}$ non è intero, e ciò succede se $h_1 = h_2$ oppure, se $h_1 < h_2$, per $t \neq \dfrac{h - (\alpha_1 + h_1)}{(h_2 + \alpha_2) - (h_1 + \alpha_1)}$ dove $h = h_1 + 1, \dots, h_2$, per i risultati di [1] $\mathcal{L}_{h_2}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è isomorfo a $C^{\frac{\lambda-n}{q}}(\bar{\Omega})$ e quindi si ha

$$\| Tu \|_{C^\mu(\bar{\Omega})} \leq \text{cost.} \| u \|_{L^p(\Omega)}$$

con μ dato proprio dalla (3.2).

Se invece $h_1 < h_2$ e $t = \dfrac{h - (a_1 + h_1)}{(\alpha_2 + h_2) - (\alpha_1 + h_1)}$, $h = h_1 + 1, h_1 + 2, \dots, h_2$, allora $\dfrac{\lambda - n}{q} = h$ intero; in tal caso il teorema [2.I] dimostrato precedentemente assicura che $\mathcal{L}_{h_2}^{(q,\lambda)}(\Omega)$ è, qualunque sia $q \geq 1$, isomorfo a $\mathcal{L}_h^{(1,n+h)}(\Omega)$ e quindi per questi valori di t dalla (3.5) segue che

$$\| Tu \|_{h,1,n+h} \leq \text{cost.} \| u \|_{L^p(\Omega)}.$$

Il teorema è così dimostrato.

Il teorema (I) ricordato nell'introduzione rientra come caso particolare nel teorema ora dimostrato qualora si supponga $h_1 = h_2 = 0$.

TEOREMA. [3.II]. *Sia h_1 un intero non negativo α_1, q_2, p_1, p_2, quantità reali con*

$$0 < \alpha_1 < 1; \quad p_1 > p_2 \geq 1; \quad q_2 \geq p_2.$$

Sia T una trasformazione lineare di $L^{p_1}(\Omega)$ in $C^{h_1+\alpha_1}(\bar{\Omega})$ e di $L^{p_2}(\Omega)$ in $L^{q_2}(\Omega)$ tale che

$$\| Tu \|_{C^{h_1+\alpha_1}(\bar{\Omega})} \leq K_1 \| u \|_{L^{p_1}(\Omega)} \tag{3.6}$$

$$\| Tu \|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq K_2 \| u \|_{L^{p_2}(\Omega)}. \tag{3.7}$$

Posto

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}; \quad t_i = \frac{(\alpha_1 + h_1) - i}{\alpha_1 + h_1 + \dfrac{n}{q_2}} \qquad (i = 0, 1, \dots, h_1)$$

si ha che

a) per $t_0 < t < 1$

$$\| Tu \|_{L^q(\Omega)} \leq \text{cost.} \| u \|_{L^p(\Omega)} \tag{3.8}$$

dove $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q_2} \dfrac{t - t_0}{1 - t_0}$;

b) per $0 < t < t_0$ *con* $t \neq t_i$

$$\| Tu \|_{C^\mu(\bar{\Omega})} \leq \text{cost.} \| u \|_{L^p(\Omega)} \tag{3.9}$$

dove $\mu = (1-t)(\alpha_1 + h_1) - t\dfrac{n}{q_2}$

c) per $t = t_i$ $(i = 0, 1, \dots, h_1)$

$$\| Tu \|_{i,1,n+i} \leq \text{cost.} \| u \|_{L^p(\Omega)} . \tag{3.10}$$

Fissato un numero reale q_1 tale che $q_1 \neq q_2$ e $q_1 \geq p_1$ sappiamo che $C^{h_1+\alpha_1}(\bar{\Omega})$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{L}_{h_1}^{(q_1, q_1(\alpha_1+h_1)+n)}(\Omega)$ mentre $L^{q_2}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{L}_{h_1}^{(q_2, 0)}(\Omega)$. Le (3.6), (3.7) assicurano che T è di tipo forte, e quindi di tipo debole, $[L^{p_1}, \mathcal{L}_{h_1}^{(q_1, q_1(\alpha_1+h_1)+n)}]$ e $[L^{p_2}, \mathcal{L}_{h_1}^{(q_2, 0)}]$ rispettivamente. Applichiamo allora il teorema [1.I]; posto

$$\begin{gathered} \frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2} \\ \frac{\lambda - n}{q} = (1-t)(\alpha_1 + h_1) - t\frac{n}{q_2} \end{gathered} \tag{3.11}$$

$\forall\, t \in]0, 1[$ T risulta di tipo forte $[L^p, \mathcal{L}_{h_1}^{(q,\lambda)}]$; in particolare fissato un $\bar{t} \in]0, 1[$ in modo tale che, detti $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{\lambda}$ i corrispondenti valori di p, q, λ dedotti dalle (3.11), risulti

$$0 < \frac{\bar{\lambda} - n}{\bar{q}} < 1$$

si ha che T è una applicazione lineare di $L^{\bar{p}}(\Omega)$ in $C^{0, \frac{\bar{\lambda}-n}{\bar{q}}}(\bar{\Omega})$ e di più

$$\| Tu \|_{C^{0, \frac{\bar{\lambda}-n}{\bar{q}}}(\bar{\Omega})} \leq \text{cost.} \| u \|_{L^{\bar{p}}(\Omega)} . \tag{3.12}$$

In definitiva la trasformazione T per $t = 1$ verifica la (3.7), per $t = \bar{t}$ verifica la (3.12), per $t = 0$ verifica la (3.6).

Allora per t che varia nell'intervallo $(\bar{t}, 1)$ applichiamo il teorema (II) richiamato nell'introduzione, mentre per t che varia nell'intervallo $(0, \bar{t})$ applichiamo il teorema [3.I] dimostrato pocanzi.

Si ottengono in tal modo i risultati *a) b) c)* del teorema i quali non vengono a dipendere dalla scelta di $\bar{t}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO. « *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali* ». Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Serie III, vol. XVIII (1964).

[2] F. JOHN-L. NIRENBERG, « *On functions of bounded mean oscillation* ». Comm. Pure and Applied Math., vol. XIV (1961).

[3] G. STAMPACCHIA, « $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ *spaces and interpolation* ». In corso di stampa su Comm. Pure and Applied Math.