ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

ENNIO DE GIORGI

**Una estensione del teorema di Bernstein**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 19, nº 1 (1965), p. 79-85

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_1_79_0>

# UNA ESTENSIONE DEL TEOREMA DI BERNSTEIN

ENNIO DE GIORGI

In un recente lavoro Fleming ha formulato la congettura che il teorema di Bernstein relativo alle superficie di area minima valga anche per ipersuperficie di uno spazio di dimensione qualunque (cfr. [1] n. 5).

In questo lavoro viene dimostrata tale congettura nel caso di ipersuperficie dello spazio euclideo 4-dimensionale, rappresentabili nella forma $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$. I principali risultati sono contenuti nei teoremi I, II.

Nel corso del lavoro farò sempre uso delle definizioni e notazioni introdotte in [2], [3], [4].

1. LEMMA I: *Sia dato un intero* $m \geq 2$ *e sia* $f(x)$ *una funzione definita in* $R^m - \{0\}$ *continua con tutte le derivate parziali ed omogenea di grado* 1; *cioè, per ogni* $x \in R^m - \{0\}$ *e per ogni numero reale* $t > 0$, *vale la relazione*

$$f(tx) = tf(x). \tag{1}$$

*L'insieme*

$$E = \{(x, z)\,;\ x \in R^m - \{0\},\ z \in R,\ z \leq f(x)\} \tag{2}$$

*sia un insieme di* $R^{m+1}$ *avente perimetro localmente finito e risulti*

$$\psi(E, K) = 0 \tag{3}$$

*per ogni compatto* $K \subset R^{m+1}$.

*Allora* $f(x)$ *è eguale in* $R^m - \{0\}$ *ad un polinomio di primo grado.*

DIM. Dalla definizione di $\psi(E, K)$ e da noti teoremi di calcolo delle variazioni si deduce subito (cfr. per es. [4] pagg. 158-160) l'equazione di Eulero

$$(|Df|^2 + 1)\,\Delta_2 f - \sum_{h,k}^{1,m} D_h f \cdot D_k f \cdot D_{hk} f = 0. \tag{4}$$

---

Pervenuto alla Redazione il 20 Giugno 1964.

Fissato un intero positivo $s \leq m$ e posto

$$w = D_s f \tag{5}$$

dalla (4) segue la

$$(|Df|^2 + 1)\Delta_2 w - \sum_{h,k}^{1,m} D_h f \cdot D_k f \cdot D_{hk} w + \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot D_i w = 0 \tag{6}$$

ove $b_i$ sono funzioni continue con tutte le derivate parziali che non interessa calcolare. D'altra parte, per l'omogeneità di $f$ e la (5) avremo

$$\max\{w(x); |x| = 1\} = \max\{w(x); |x| > 0\} \tag{7}$$

e quindi, dalle (6), (7), per il principio di massimo (valido per equazioni differenziali lineari di tipo ellittico della forma (6)), si può concludere che $w$ è costante, cioè che le derivate di $f$ sono costanti, c. v. d.

Nei successivi lemmi II, III, IV, e nel teorema I, ammetteremo sempre che siano verificate le seguenti ipotesi:
$n$ è un intero maggiore di 2; l'insieme $E \subset R^n$ è un insieme di perimetro localmente finito; $\alpha$ è un punto di $R^n$ verificante la condizione

$$|\alpha| \equiv \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_h^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1; \tag{8}$$

per ogni punto $x \in \mathcal{F}^* E$ vale la

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_h \frac{D_h \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} > 0; \tag{9}$$

per ogni compatto $K \subset R^n$ risulta

$$\psi(E, K) = 0. \tag{10}$$

**Lemma II:** *Nell'ulteriore ipotesi che $\xi$ sia un punto di $\mathcal{F}^* E$, $t$ un numero reale diverso da zero, e che valga la*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{D_k \varphi(\xi, E)}{|D\varphi(\xi, E)|} > 0, \tag{11}$$

***risulta***

$$(\xi + \alpha t) \in R^n - \mathcal{F}_e E. \tag{12}$$

DIM. Per noti risultati sulle frontiere di misura minima (vedi per es. [2] teor. XIII, XIV), dalle (10), (11) si deduce che esiste un intorno $A$ di $\xi$ tale che

$$A \cap \mathcal{F}^* E = A \cap \mathcal{F}_e E \tag{13}$$

ed inoltre (cfr. [4] pag. 157), $\mathcal{F}^* E \cap A$ è una ipersuperficie localmente regolare il cui piano tangente nel punto $\xi$ non contiene la retta di coseni direttori $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Perciò, comunque si fissi $\varrho > 0$, esisteranno due numeri $\eta, \sigma$ tali che

$$\operatorname{mis}[C_\sigma(\xi - \eta\alpha) \cap E] = 0 \tag{14}$$

$$\operatorname{mis}[C_\sigma(\xi + \eta\alpha) - E] = 0 \tag{15}$$

$$0 < \eta < \varrho, \qquad 0 < \sigma < \varrho. \tag{16}$$

D'altra parte per le (8), (9) risulta, comunque si fissi $\tau > 0$ e per quasi tutti i punti $x \in R^n$,

$$\varphi((x + \alpha\tau), E) \geq \varphi(x, E) \tag{17}$$

e quindi dalle (14), (15), (16), (17) per l'arbitrarietà di $\varrho, \tau$ segue la (12). c. v. d.

LEMMA III: *Sia $\xi$ un punto di $\mathcal{F}^* E$ e sia $\{\xi_h\}$ una successione di punti verificante le condizioni*

$$\lim_{h \to \infty} \xi_h = \xi, \ \xi_h \in \mathcal{F}^* E, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{D_i \varphi(\xi_h, E)}{|D\varphi(\xi_h, E)|} > 0 \ \text{ per } h = 1, 2, \dots \tag{18}$$

*Risulta allora*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{D_i \varphi(\xi, E)}{|D\varphi(\xi, E)|} > 0. \tag{19}$$

DIM. La (19) è evidentemente soddisfatta nel caso

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{D_i \varphi(\xi, E)}{|D\varphi(\xi, E)|} = 1; \tag{20}$$

basta quindi dimostrare il teorema nel caso in cui non valga la (20). Se non è verificata la (20) è possibile, mediante una opportuna rotazione, ricondursi al caso in cui siano verificate le

$$\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1, 0, \dots, 0), \ \frac{D_n \varphi(\xi, E)}{|D\varphi(\xi, E)|} < 0. \tag{21}$$

Posto $m = n - 1$, per la (10) e per noti risultati relativi alle frontiere di misura minima (cfr. [4] pagg. 157-160), è possibile trovare un intorno $A$ del punto $\xi$, un aperto connesso $B \subset R^m$ ed una funzione $f(y)$ infinite volte derivabile in $B$, tali che risulti

$$A \cap \mathcal{F}^* E = \{(y, z) ; y \in B, z = f(y)\} \tag{22}$$

essendo inoltre verificata l'equazione di Eulero (4). D'altra parte per le (9), (21), (22) è sempre

$$D_1 f \geq 0, \tag{23}$$

mentre, posto

$$\xi = (\eta, \zeta),\ \ \xi_h = (\eta_h, \zeta_h),\ \ \eta \in R^m,\ \eta_h \in R^m,\ \zeta \in R,\ \zeta_h \in R \tag{24}$$

per $h$ abbastanza grande si ha, ricordando le (18), (21), (22)

$$\eta_h \in B,\ D_1 f(\eta_h) > 0,\ \eta \in B. \tag{25}$$

Dalle (23), (25) ricordando le (4), (5) ed il principio di massimo, si deduce la

$$D_1 f(\eta) > 0 \tag{26}$$

e quindi, per le (21), (22), (24) vale la (19), c. v. d.

LEMMA IV : *Sia $E$ un cono con vertice nell'origine di $R^n$, cioè per ogni numero $t > 0$ si abbia*

$$\varphi(tx, E) = \varphi(x, E) ; \tag{27}$$

*sia inoltre*

$$\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E \neq \emptyset. \tag{28}$$

*Allora ($\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E$) contiene almeno una semiretta di $R^n$.*

DIM. Se per ogni $x \in \mathcal{F}^* E$ risulta

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_h \frac{D_h \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} = 0, \tag{29}$$

allora per ogni $t \in R$ e per quasi tutti i punti $x \in R^n$ risulta

$$\varphi(x + t\alpha, E) = \varphi(x, E). \tag{30}$$

Dalla (30) si deduce che, se un punto $\bar{x}$ appartiene ad $\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E$ tutta la retta $\{\bar{x} + t\alpha ; t \in R\}$ è contenuta in $\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E$.

Esaminiamo quindi il caso in cui la (29) non sia verificata in ogni punto di $\mathcal{F}^* E$; mediante una rotazione possiamo ricondurci al caso in cui sia verificata la

$$\alpha \equiv (\alpha_1 , \dots , \alpha_n) = (0, \dots , 0, 1). \tag{31}$$

Dalla (31), per il Lemma II, l'ipotesi (10) e i noti risultati relativi alle frontiere orientate di misura minima (cfr. [4] pagg. 157-160), avremo

$$\left\{x ; x \in \mathcal{F}^* E, \frac{D_n \varphi (x, E)}{| D\varphi (x, E) |} > 0\right\} = \{(y, z) ; y \in B, z = f(y)\}, \tag{32}$$

ove $B$ è un aperto di $R^{n-1}$ ed $f(y)$ è una funzione continua in $B$ con tutte le derivate parziali.

Inoltre, essendo $E$ un cono di $R^n$ con vertice nell'origine, anche $B$ sarà un cono di $R^{n-1}$ ed $f$ una funzione omogenea di grado 1. Se fosse $B = R^m$, oppure $\mathcal{F} B$ contenesse solo l'origine delle coordinate, per il lemma I la funzione $f$ sarebbe eguale ad un polinomio di primo grado e quindi $E$ sarebbe equivalente ad un semispazio, in contrasto con l'ipotesi (28). Dobbiamo quindi ammettere che $\mathcal{F}B$, oltre all'origine delle coordinate, contenga infiniti altri punti; essendo $B$ un cono ed $f$ una funzione omogenea, potremo allora trovare una successione di punti $\{\eta_h\}$ dello spazio $R^{n-1}$ ed un punto $(\eta, \tau) \in R^n$ tali che siano verificate le

$$\eta_h \in B, \lim_{h \to \infty} (\eta_h , f(\eta_h)) = (\eta, \tau), \ |(\eta, \tau)| = 1, \ \eta \in \mathcal{F}B. \tag{33}$$

È facile provare che

$$(\eta, \tau) \in \mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E. \tag{34}$$

Infatti dalle (32), (33) segue (cfr. [2] teor. XIV)

$$(\eta, \tau) \in \overline{\mathcal{F}^* E} = \mathcal{F}_e E; \tag{35}$$

se fosse

$$(\eta, \tau) \in \mathcal{F}^* E \tag{36}$$

per il lemma III avremmo

$$\frac{D_n \varphi ((\eta, \tau), E)}{| D\varphi ((\eta, \tau), E) |} > 0 \tag{37}$$

e quindi $\eta$ apparterrebbe a $B$ contro l'ipotesi (33). Delle (33), (34), ricordando che $E$ è un cono con vertice nell'origine di $R^n$, si deduce che tutta la semiretta che dall'origine proietta il punto $(\eta, \tau)$ è contenuta in $(\mathcal{F}_e E - \mathcal{F}^* E)$, c. v. d.

2. Dal lemma IV si deduce una estensione del teorema di Bernstein allo spazio euclideo 4-dimensionale, che può essere data sia in ipotesi di tipo globale (del tipo usato nella teoria degli insiemi di Caccioppoli), sia in ipotesi di tipo classico. La prima formulazione si ha nel

TEOR. I. *Sia $E$ un insieme di $R^4$ di perimetro localmente finito e siano verificate le condizioni* (8), (9), (10); *sia inoltre $\mathcal{F}^* E \neq 0$. Allora $E$ è equivalente ad un semispazio.*

DIM. Possiamo supporre che l'origine di $R^4$ appartenga ad $\mathcal{F}^* E$. Per i teor. X, XII di [2] esiste determinato e finito il limite

$$b = \lim_{\varrho \to \infty} \varrho^{1-n} \int_{C_\varrho} | D\varphi(x, E) | \tag{1}$$

e risulta

$$b \geq w_{n-1} \tag{2}$$

ove $w_{n-1} = \text{mis}\, \{x\, ;\ x \in R^{n-1},\ |x| \leq 1\}$.

Se $b = w_{n-1}$ per il teor. X di [2] possiamo affermare che $E$ è equivalente ad un cono con vertice nell'origine e quindi, appartenendo l'origine di $R^4$ ad $\mathcal{F}^* E$, per noti risultati relativi alle frontiere orientate di misura minima (cfr. [4] pag. 157) l'insieme è equivalente ad un semispazio.

Se fosse $b > w_{n-1}$ per il teor. VI di [3], potremo trovare una successione di numeri positivi $\{\varrho_h\}$ ed un insieme $L$, tali che, posto

$$E_h = \{ \varrho_h x\, ;\ x \in E \} \tag{3}$$

siano verificate le

$$\lim_{h \to \infty} \varrho_h = 0, \quad \lim_{h \to \infty} [\text{mis}\, (L - E_h) + \text{mis}\, (E_h - L)] = 0. \tag{4}$$

Dal teorema VII di [3] e dai teor. VI, X, XIV di [2], si deduce che $L$ è un cono con vertice nell'origine e verifica le ipotesi del lemma IV; per tale lemma l'insieme $\mathcal{F}_e L - \mathcal{F}^* L$ conterrebbe almeno una semiretta, in contrasto con un teorema di Triscari (vedi [4] teor. XI). Dobbiamo quindi ammettere che $b = w_{n-1}$, c. v. d.

Dal teor. I ripetendo il ragionamento usato in [1] n. 5 si deduce immediatamente il

TEOR. II. *Se $f(x_1, x_2, x_3)$ è una funzione definita in $R^3$, continua con le derivate parziali di qualunque ordine, e verifica l'equazione di Eulero*

$$\sum_{h=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_h} \left( \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_h}}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{3} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2}} \right) = 0, \tag{5}$$

*$f$ è un polinomio di primo grado.*

*Scuola Normale Superiore*
*Pisa*

## BIBLIOGRAFIA

[1] W. H. FLEMING « *On the oriented Plateau problem* » Rend. Circolo Matematico di Palermo. Serie II Tomo XI, 1962.

[2] D. TRISCARI « *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima* » Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze Fis. Mat. Serie III, Vol. XVII, Fasc. IV, 1963.

[3] D. TRISCARI « *Sull'esistenza di cilindri con frontiera di misura minima* » Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fis. Mat. Serie III, Vol. XVII, Fasc. IV, 1963.

[4] D. TRISCARI « *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni* » « Le Matematiche » Vol. XVIII, Fasc. 2, 1963.