Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Calogero Vinti

Su una specie di dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale, per l'equazione $p = f(q)$, in una classe ove manca l'unicitá

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 2 (1965), p. 251-263

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_251_0>

SU UNA SPECIE DI DIPENDENZA CONTINUA DELLE SOLUZIONI DAL DATO INIZIALE, PER L'EQUAZIONE $p=f(q)$, IN UNA CLASSE OVE MANCA L'UNICITÀ.

di CALOGERO VINTI (*)

1. **Introduzione.** Nello studio del problema di CAUCHY per l'equazione

$$p=f(x, y, z, q) \tag{A}$$

i teoremi di dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale sono sempre stati dati, per quanto mi risulta, in classi ove c'è l'unicità, come ad esempio quelli di M. CINQUINI CIBRARIO ([4], [5]), e quello di P. D. LAX [6] per l'equazione $p=\frac{\partial}{\partial y} f(z)$ con soluzioni intese in senso debole (1).

D'altra parte il problema (A) dal punto di vista esistenziale è stato trattato prima da E. BAIADA [1], in un caso particolare, e successivamente da E. BAIADA - C. VINTI [2] in una classe ove M. PAGNI [8] ha mostrato con un esempio che non vale un teorema di unicità.

Lo scopo di questo lavoro è di far vedere che in un certo senso, che verrà precisato, si può stabilire una dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale anche nella classe considerata da E. BAIADA.

2. In questo numero richiamerò prima il procedimento di approssimazione di E. BAIADA e poi riprenderò l'esempio di M. PAGNI mostrando l'esistenza di infinite soluzioni verificanti le stesse condizioni iniziali.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Modena.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca N. 18 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

(1) L'unicità nella classe in cui si pone P. D. LAX è stata stabilita da O. A. OLEJNIK [7], mentre per l'unicità nelle classi in cui opera M. CINQUINI CIBRARIO vari risultati sono stati ottenuti oltre che dallo stesso autore anche da S. CINQUINI (vedere bibliografia in [3]).

È noto (E. Baiada [1]) che:

Se $f(q)$, $-\infty<q<+\infty$, è limitata e Lipschitziana ed $\omega(y)$, $-\infty<y<+\infty$, ammette derivata prima continua, limitata, e soddisfacente la condizione $|\omega'(y+h)-\omega'(y-h)|\leq|h|\,M(y)$, $\forall\, y, h \in (-\infty, +\infty)$, con $M(y)$ non negativa e sommabile in ogni intervallo finito, comunque si fissi un rettangolo $\mathcal{R}\equiv[0,a]\times[0,b]$ esiste almeno una funzione $z(x,y)$, Lipschitziana in $\mathcal{R}$, che soddisfa in $\mathcal{R}$ l'equazione

$$\text{(B)} \qquad p=f(q),$$

a meno di un insieme di misura superficiale nulla, e identicamente il dato di Cauchy $z(0,y)=\omega(y)$.

Si osservi intanto che si può sempre supporre che la costante di Lipschitz della f sia $\leq 1/2$; basta operare, in caso contrario, un semplice cambiamento di variabili.

Il procedimento adoperato per mostrare il teorema enunciato è il seguente. Detta $\{m_i\}_i$ una successione crescente d'interi positivi, si ponga:

$$d_i=a/2^{m_i}, \qquad a^{(r_i)}=r_i\, d_i \qquad \text{per} \quad r_i=0,1,2,3,\dots,2^{m_i},$$

e divisa la striscia

$$s: \qquad 0\leq x\leq a, \qquad -\infty<y<+\infty,$$

nelle 2^{m_i} striscie parziali.

$$s^{(r_i)}: \quad a^{(r_i-1)}\leq x\leq a^{(r_i)}, \quad -\infty<y<+\infty; \quad r_i=1,2,\dots,2^{m_i},$$

si denoti con $S^{(m_i)}(x,y)$ la funzione definita con la legge:

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} S^{(m_i)}(0,y)=\omega(y), \qquad \forall\, y\in(-\infty,+\infty),\\[4pt] S^{(m_i)}(x,y)=\dfrac{1}{2}\,S^{(m_i)}\!\left(a^{(r_i-1)}, y+\dfrac{x-a^{(r_i-1)}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\,S^{(m_i)}\!\left(a^{(r_i-1)}, y-\dfrac{x-a^{(r_i-1)}}{2}\right)+\\[6pt] \qquad +\displaystyle\int_{y-\frac{x-a^{(r_i-1)}}{2}}^{y+\frac{x-a^{(r_i-1)}}{2}} f\,[S_y^{(m_i)}(a^{(r_i-1)},\eta)]\,d\eta, \qquad \forall\,(x,y)\in s^{(r_i)},\ r_i=1,2,\dots,2^{m_i}. \end{cases}$$

La $S^{(m_i)}(x,y)$ è definita su tutto s, è Lipschitziana e soddisfa l'equazione (B) sulle rette $x=a^{(r_i)}$, $r_i=0,1,2,\dots,2^{m_i}-1$.

Si mostra in [1] che la successione $\{S^{(m_i)}(x, y)\}_i$ soddisfa su $\mathcal{R}$ alle condizioni del classico teorema di compattezza di Ascoli Arzelà, e quindi da essa si può estrarre una successione $\{S^{(m_{0,i})}(x, y)\}_i$ che converge uniformemente ad una funzione continua $z(x, y)$ su $\mathcal{R}$. La $z(x, y)$ risulta Lipschitziana su $\mathcal{R}$, soddisfa la (B) su $\mathcal{R}$, a meno di un insieme di misura superficiale nulla, e il dato di CAUCHY $z(0, y) = \omega(y)$.

Sussiste anche la seguente proprietà:

α) $\{S_y^{(m_{0,i})}(x, y)\}_i$ risulta equilimitata su $\mathcal{R}$ e inoltre per tutti gli $x \in [0, a]$ converge in misura su $[0, b]$ ad $z_y(x, y)$.

ESEMPIO DI M. PAGNI. In questo esempio la $f(q)$ è Lipschitziana ma non limitata nel suo campo di definizione. Facilmente però si può modificare tale esempio in modo che la $f(q)$ risulti limitata; basta infatti definire la $f(q)$ con la legge:

$$f(q) = \begin{cases} q^2 & \text{per } |q| \leq 1 \\ -q^2 + 4q - 2 & \text{per } 1 < q \leq 2 \\ -q^2 - 4q - 2 & \text{per } -2 \leq q < 1 \\ 2 & \text{per } q > 2 \\ -2 & \text{per } q < -2 \end{cases} \tag{2}$$

che è limitata e lipschitziana con costante di LIPSCHITZ 8.

Comunque si fissi $d > 0$, in ogni regione T_δ definita dalle:

$$0 \leq x \leq \delta \leq 8d\,, \qquad -d + x/8 \leq y \leq d - x/8\,,$$

l'equazione (B), con $f(q)$ data dalla (2), ammette due soluzioni distinte col dato di CAUCHY $\omega(y) = 0$, per $x = 0$; queste sono le stesse di quelle trovate da M. PAGNI e precisamente le funzioni $z_\delta(x, y)$ e $z_0(x, y)$ così definite in T_δ:

$$z_\delta(x, y) = 0$$

$$z_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{per } |y| \geq x \\ x - y & \text{per } 0 \leq y \leq x \\ x + y & \text{per } -x \leq y \leq 0 \end{cases}$$

In tale esempio si possono costruire infinite soluzioni con dato iniziale $\omega(y) = 0$ per $x = 0$.

Infatti per ogni t, $0 \leq t \leq \delta \leq 8d$, si definisca in T_δ la funzione $z_t(x, y)$, dipendente dal parametro t, con la legge:

$$z_t(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{per } \ 0 \leq x \leq t, \ y \text{ qualunque, e per } x > t, \ |y| > x - t; \\ x - y - t & \text{per } \ x > t, \ 0 \leq y \leq x - t; \\ x + y - t & \text{per } \ x > t, \ -x + t \leq y \leq 0. \end{cases}$$

La $z_t(x, y)$ è lipschitziana in T_δ e soddisfa la (B), con f data dalla (2), a meno di un insieme di misura superficiale nulla costituito dai punti $(x, y) \in T_\delta$, con $x \geq t$, che cadono sulle tre rette $y = 0$, $y = x - t$, $y = -x + t$. Al variare di t, $0 \leq t \leq \delta$, le $z_t(x, y)$ costituiscono un insieme infinito di soluzioni con dato iniziale $\omega(y) = 0$ per $x = 0$.

3. Si supponga $f(q)$, $-\infty < q < +\infty$, limitata e lipschitziana [2] con costante $\leq 1/2$. Detta Ω la classe delle funzioni $\omega(y)$, $-\infty < y < +\infty$, ciascuna delle quali ammetta derivata prima continua, limitata, e soddisfacente la condizione $|\omega'(y + h) - \omega'(y - h)| \leq |h| M_\omega(y) \ \forall \ y, h \in (-\infty, +\infty)$, ove $M_\omega(y)$, dipendente da ω, è sommabile in ogni intervallo finito, si fissi un qualunque rettangolo $\mathcal{R} \equiv [0, a] \times [0, b]$ e si denoti con $\mathcal{K}$ la totalità delle funzioni $z(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{R}$, $z(0, y) = \omega(y) \in \Omega$, lipschitziane in $\mathcal{R}$, soddisfacente in $\mathcal{R}$ l'equazione

$$\text{(B)} \qquad p = f(q),$$

a meno di un insieme di misura superficiale nulla, e *ottenute a partire da* ω *con il procedimento di approssimazione esposto* al N. 2.

Sussiste il seguente teorema del tipo dei teoremi di dipendenza continua dal dato iniziale.

TEOREMA. *Se* $z(x, y) \in \mathcal{K}$, $z(0, y) = \omega(y)$, *comunque si fissi una successione* $\{\omega_n(y)\}_n$, $\omega_n(y) \in \Omega$, *con le condizioni:*

$$\beta_1) \qquad |\omega_n(y) - \omega(y)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad \text{uniformemente in } [-a/2, b + a/2],$$

$$\beta_2) \qquad \int_{-\frac{a}{2}}^{b+\frac{a}{2}} |\omega_n'(y) - \omega'(y)| \, dy \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

[2] Che la costante di Lipschitz sia $\leq 1/2$ non è affatto una restrizione per quanto è stato detto al N. 2.

è possibile costruire almeno una successione $\{z_n(x,y)\}_n$, $z_n(x,y) \in \mathcal{K}$, $z_n(0,y) = \omega_n(y)$ *con le proprietà :*

$$\beta_1') \qquad |z_n(x,y) - z(x,y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{uniformemente in } \mathcal{R},$$

$$\beta_1') \qquad \int_0^b |z_{n,y}(x,y) - z_y(x,y)|\, dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{uniformemente in } [0,a].$$

Poichè $z(x,y) \in \mathcal{K}$ esiste una successione crescente $\{m_i\}_i$ d'interi positivi tale che dalla successione $\{S^{(m_i)}\}_i$, definita dalla (1), è possibile estrarre una sottosuccessione $\{S^{(m_{0,i})}\}_i$ convergente uniformemente su $\mathcal{R}$ a $z(x,y)$. Dalla successione $\{S_1^{(m_{0,i})}\}_i$ relativa al dato iniziale $\omega_1(y)$, definita dalla (1) quando in essa si cambi ω in ω_1 e $\{m_i\}_i$ in $\{m_{0,i}\}_i$, si può estrarre una sottosuccessione $\{S_1^{(m_{1,i})}\}_i$ che converge uniformemente su $\mathcal{R}$ a una funzione $z_1(x,y) \in \mathcal{K}$, con $z_1(0,y) = \omega_1(y)$; e analogamente esiste una sottosuccessione $\{S_2^{(m_{2,i})}\}$, della $\{S_2^{(m_{1,i})}\}_i$, relativa al dato iniziale ω_2, che converge nniformemente su $\mathcal{R}$ a una funzione $z_2(x,y) \in \mathcal{K}$, $z_2(0,y) = \omega_2(y)$. Così proseguendo sia $z_n(x,y) \in \mathcal{K}$, $z_n(0,y) = \omega_n(y)$, la funzione ottenuta come limite uniforme in $\mathcal{R}$ di una successione $\{S_n^{(m_{n,i})}\}_i$, sottosuccessione della $S_n^{(m_{n-1,i})}\}_i$ con dato iniziale $\omega_n(y)$.

Mostriamo che la successione $\{z_n(x,y)\}_n$ così costruita gode delle proprietà $\beta_1')$, $\beta_2)$.

Si osservi intanto che per le $\beta_1)$, $\beta_2)$, in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n_0(\varepsilon) > 0$ tale che per $n > n_0$ risulta:

$$(3) \qquad |\omega_n(y) - \omega(y)| < \varepsilon, \qquad \forall\, y \in [-a/2, b + a/2],$$

$$(4) \qquad \int_{-\frac{a}{2}}^{b+\frac{a}{2}} |\omega_n'(y) - \omega'(y)|\, dy < \varepsilon .$$

Fissiamo allora un $n > n_0$, consideriamo la successione $\{S_n^{(m_{n,i})}\}_i$, e osserviamo che la successione $\{S^{(m_{n,i})}\}_i$, sottosuccessione della $\{S^{(m_{0,i})}\}_i$, converge uniformemente a $z(x,y)$.

Le due successioni $\{S_n^{(m_{n,i})}\}_i$, ed $\{S^{(m_{n,i})}\}_i$, possiamo denotarle per comodità rispettivamente con $\{S_n^{(m_i)}\}_i$, $\{S^{(m_i)}\}_i$, e quindi uniformemente in $\mathcal{R}$ è:

$$(5) \qquad S^{(m_i)} \xrightarrow[i\to\infty]{} z(x,y); \qquad S_n^{(m_i)} \xrightarrow[i\to\infty]{} z_n(x,y).$$

Dalla (1), per $0 \leq x \leq a^{(1)}$, si ha:

$$S_y^{(m_i)}(x,y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x, y) = \frac{1}{2}\left[\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right] + f\left[\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right] -$$

$$- f\left[\omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right] - f\left[\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right] + f\left[\omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]\left\{\frac{1}{2} + \frac{f\left[\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right] - f\left[\omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)}\right\} +$$

$$+ \left[\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right]\left\{\frac{1}{2} - \frac{f\left[\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right] - f\left[\omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)}\right\},$$

ove s'è fatta un'ovvia convenzione nel caso che i denominatori si annullino.

Tenendo presente che $f(q)$ è Lipschitziana con costante $\leq 1/2$, prendendo i valori assoluti e integrando rispetto ad y in $[0, b]$, si deduce:

$$(6) \qquad \int_0^b | S_y^{(m_i)}(x, y) - S_{n\,y}^{(m_i)}(x, y) |\, dy \leq$$

$$\leq \int_0^b \left| \omega'\left(y+\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right| \left\{\frac{1}{2} + \frac{f\left[\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right] - f\left[\omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y+\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y+\frac{x}{2}\right)}\right\} dy +$$

$$+ \int_0^b \left| \omega'\left(y-\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right| \left\{\frac{1}{2} - \frac{f\left[\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right] - f\left[\omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)\right]}{\omega'\left(y-\frac{x}{2}\right) - \omega_n'\left(y-\frac{x}{2}\right)}\right\} dy,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$.

Operiamo nel primo integrale a secondo membro della (2) la sostituzione $y = Y - x/2$, mentre nel secondo integrale la sostituzione $y = Y + x/2$. La

(6) si scrive:

$$(7)\qquad \int_0^b |\, S_y^{(m_i)}(x,y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x,y)\,|\, dy \leq$$

$$\leq \int_{\frac{x}{2}}^{b+\frac{x}{2}} |\, \omega'(Y) - \omega_n'(Y)\,| \left\{ \frac{1}{2} + \frac{f[\omega'(Y)] - f[\omega_n'(Y)]}{\omega'(Y) - \omega_n'(Y)} \right\} dY +$$

$$+ \int_{-\frac{x}{2}}^{b-\frac{x}{2}} |\, \omega'(Y) - \omega_n'(Y)\,| \left\{ \frac{1}{2} - \frac{f[\omega'(Y)] - f[\omega_n'(Y)]}{\omega'(Y) - \omega_n'(Y)} \right\} dY,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$.

Maggioriamo il secondo membro della (7) ampliando gli intervalli d'integrazione che in esso compaiono, e precisamente sostituiamoli con l'intervallo $[-x/2,\ b + x/2]$; dopo tale modifica, sommando gli integrali si ha:

$$(8)\qquad \int_0^b |\, S_y^{(m_i)}(x,y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x,y)\,|\, dy \leq \int_{-\frac{x}{2}}^{b+\frac{x}{2}} |\, \omega'(y) - \omega_n'(y)\,|\, dy,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$, e quindi ovviamente:

$$(8')\qquad \int_0^b |\, S_y^{(m_i)}(x,y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x,y)\,|\, dy \leq \int_{-\frac{d_i}{2}}^{b+\frac{d_i}{2}} |\, \omega'(y) - \omega_n'(y)\,|\, dy,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$.

Facilmente si mostra ora per induzione la disuguaglianza:

$$(9)\qquad \int_0^b |\, S_y^{(m_i)}(x,y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x,y)\,|\, dy \leq \int_{-r_i\frac{d_i}{2}}^{b+r_i\frac{d_i}{2}} |\, \omega'(y) - \omega_n'(y)\,|\, dy,$$

per $a^{(r_i-1)} \leq x \leq a^{(r_i)}$, $r_i = 1, 2, \dots, 2^{m_i}$.

Supposto infatti che sussista la (9) per $a^{(r_i-1)} \leq x \leq a^{(r_i)}$, partendo dalla definizione (1) per $S^{(m_i)}(x, y)$ e della analoga per $S_n^{(m_i)}(x, y)$, con lo stesso ragionamento col quale s'è ottenuta la (8'), risulta:

$$\int_0^b | S_y^{(m_i)}(x, y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x, y) | \, dy \leq \int_{-\frac{d_i}{2}}^{b+\frac{d_i}{2}} | S_y^{(m_i)}(a^{(r_i)}, y) - S_{n\,y}^{(m_i)}(a^{(r_i)}, y) | \, dy,$$

per $a^{(r_i)} \leq x \leq a^{(r_i+1)}$,

dalla quale in virtù della (9) segue:

$$\int_0^b | S_y^{(m_i)}(x, y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x, y) | \, dx \leq \int_{-(r_i+1)\frac{d_i}{2}}^{b+(r_i+1)\frac{d_i}{2}} | \omega'(y) - \omega_n'(y) | \, dy,$$

per $a^{(r_i)} \leq x \leq a^{(r_i+1)}$.

Riprendiamo ancora le espressioni delle $S^{(m_i)}(x, y)$ ed $S_n^{(m_i)}(x, y)$ date dalla (1). Si ha:

$$S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) = \frac{1}{2}\left[\omega\left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y + \frac{x}{2}\right)\right] + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\omega\left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y - \frac{x}{2}\right)\right] + \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} \{ f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)] \} \, d\eta,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$, e tenendo presente che $f(q)$ è lipschitziana con costante $\leq 1/2$, con ovvie maggiorazioni si deduce:

$$| S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) | \leq \frac{1}{2} \left| \omega\left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y + \frac{x}{2}\right) \right| + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \omega\left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y - \frac{x}{2}\right) \right| + \frac{1}{2} \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \, d\eta,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$.

Dimostriamo ora che in generale si ha:

$$(12) \qquad | S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) | \leq \frac{1}{2} \left| \omega \left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n \left(y + \frac{x}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \omega \left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n \left(y - \frac{x}{2}\right) \right| + \frac{1}{2} \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} | \omega'(\eta) - \omega'_n(\eta) | \, d\eta,$$

per $a^{(r_i)} \leq x \leq a^{(r_i+1)}$.

Supponiamo vera la (12) per $a^{(r_i-1)} \leq x \leq a^{(r_i)}$, cioè partendo dalle curve iniziali $\omega(y)$, $\omega_n(y)$ e facendo solo r_i operazioni del tipo indicato dalla stessa approssimazione (1), le funzioni $S^{(m_i)}(x, y)$, $S_n^{(m_i)}(x, y)$ soddisfano la (12) quando in essa si cambi r_i in $r_i - 1$; e poichè per ottenere le funzioni $S^{(m_i)}(x, y)$, $S_n^{(m_i)}(x, y)$ in $a^{(r_i)} \leq x \leq a^{(r_i+1)}$ si può pensare di partire invece che dalle $\omega(y)$, $\omega_n(y)$, dalle $S^{(m_i)}(a^{(1)}, y)$, $S_n^{(m_i)}(a^{(1)}, y)$, e facendo però solo r_i operazioni, risulta:

$$(13) \qquad | S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) | \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| S^{(m_i)}\left(a^{(1)}, y + \frac{x - a^{(1)}}{2}\right) - S_n^{(m_i)}\left(a^{(1)}, y + \frac{x - a^{(1)}}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| S^{(m_i)}\left(a^{(1)}, y - \frac{x - a^{(1)}}{2}\right) - S_n^{(m_i)}\left(a^{(1)}, y - \frac{x - a^{(1)}}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{y-\frac{x-a^{(1)}}{2}}^{y+\frac{x-a^{(1)}}{2}} | S_y^{(m_i)}(a^{(1)}, \eta) - S_{n,y}^{(m_i)}(a^{(1)}, \eta) | \, d\eta,$$

per $a^{(r_i)} \leq x \leq a^{(r_i+1)}$.

Osserviamo ora che essendo:

$$\int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} [\omega'(\eta) - \omega'_n(\eta)] \, d\eta = \left[\omega \left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n \left(y + \frac{x}{2}\right)\right] -$$

$$- \left[\omega \left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n \left(y - \frac{x}{2}\right)\right],$$

la (10) si scrive nei seguenti due modi diversi:

$$S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) = \left[\omega\left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y - \frac{x}{2}\right)\right] +$$

$$+ \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} [\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)] \left\{\frac{1}{2} + \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)}\right\} d\eta,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$;

$$S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) = \left[\omega\left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y + \frac{x}{2}\right)\right] +$$

$$+ \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} [\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)] \left\{\frac{1}{2} - \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)}\right\} d\eta,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$; e da queste seguono le ovvie maggiorazioni:

$$(10') \qquad | S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) | \leq \left| \omega\left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y - \frac{x}{2}\right) \right| +$$

$$+ \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \left\{\frac{1}{2} + \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)}\right\} d\eta,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$,

$$(10'') \qquad | S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) | \leq \left| \omega\left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y + \frac{x}{2}\right) \right| +$$

$$+ \int_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \left\{\frac{1}{2} - \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)}\right\} d\eta,$$

per $0 \leq x \leq a^{(1)}$.

Trasformiamo il primo termine a secondo membro della (13) tramite la (10″), il secondo termine tramite la (10′) e il terzo termine tramite la (7).

Si ottiene:

$$| S^{(m_i)}(x, y) - S_n^{(m_i)}(x, y) | \leq \frac{1}{2} \left| \omega\left(y + \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y + \frac{x}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \omega\left(y - \frac{x}{2}\right) - \omega_n\left(y - \frac{x}{2}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{y+\frac{x}{2}-a^{(1)}}^{y+\frac{x}{2}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \left\{ \frac{1}{2} - \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)} \right\} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{y-\frac{x}{2}}^{y-\frac{x}{2}+a^{(1)}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \left\{ \frac{1}{2} + \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)} \right\} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{y-\frac{x}{2}+a^{(1)}}^{y+\frac{x}{2}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \left\{ \frac{1}{2} + \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)} \right\} d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{y-\frac{x}{2}}^{y+\frac{x}{2}-a^{(1)}} | \omega'(\eta) - \omega_n'(\eta) | \left\{ \frac{1}{2} - \frac{f[\omega'(\eta)] - f[\omega_n'(\eta)]}{\omega'(\eta) - \omega_n'(\eta)} \right\} d\eta,$$

per $a^{(r_i)} \leq x \leq a^{(r_i+1)}$.

In questa relazione spezziamo il terzo integrale in due, uno sull'intervallo $\left[y - \frac{x}{2} + a^{(1)},\ y + \frac{x}{2} - a^{(1)}\right]$, l'altro su $\left[y + \frac{x}{2} - a^{(1)},\ y + \frac{x}{2}\right]$; spezziamo poi il quarto integrale in due, uno su $\left[y - \frac{x}{2},\ y - \frac{x}{2} + a^{(1)}\right]$, l'altro su $\left[y - \frac{x}{2} + a^{(1)},\ y + \frac{x}{2} - a^{(1)}\right]$. Così facendo e operando le opportune riduzioni si ottiene la (12).

Osserviamo ora che dalle (9) e (12), tenendo presente le (3), (4) e ricordando che $r_i d_i \leq a$, seguono le disuguaglianze:

$$(14) \qquad \int\limits_0^b | S_y^{(m_i)}(x, y) - S_{n,y}^{(m_i)}(x, y) | \, dy < \varepsilon, \quad \forall\ i \in N^+,\ x \in [0, a];$$

$$|S^{(m_i)}(x,y) - S_n^{(m_i)}(x,y)| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, i \in N^+,\ (x,y) \in \mathcal{R}. \tag{15}$$

Intanto dal limite uniforme in $\mathcal{R}$ espresso dalla (5), segue che esiste un $i_0(\varepsilon) > 0$ tale che per $i > i_0$ e qualunque sia $(x,y) \in \mathcal{R}$ risulti:

$$|S^{(m_i)}(x,y) - z\,(x,y)| < \varepsilon \tag{16}$$

$$|S_n^{(m_i)}(x,y) - z_n(x,y)| < \varepsilon. \tag{17}$$

Inoltre per la proprietà α) del N. 2 di cui godono le successioni $\{S_y^{(m_i)}\}_i$, $\{S_{n,y}^{(m_i)}\}_i$, fissato un $x \in [0,a]$ esiste un $i^*(x,\varepsilon) > 0$ in modo da risultare per $i > i^*$:

$$\int_0^b |S_y^{(m_i)}(x,y) - z_y(x,y)|\, dy < \varepsilon \tag{18}$$

$$\int_0^b |S_{n,y}^{(m_i)}(x,y) - z_{n,y}(x,y)|\, dy < \varepsilon. \tag{19}$$

Dalle (15), (16), (17), segue allora:

$$|z(x,y) - z_n(x,y)| < 3\varepsilon, \qquad \forall\, (x,y) \in \mathcal{R} \tag{20}$$

mentre dalle (14), (18), (19) si ha:

$$\int_0^b |z_y(x,y) - z_{n,y}(x,y)|\, dy < 3\varepsilon, \qquad \forall\, x \in [0,a]. \tag{21}$$

Le (20) e (21), essendo vere per ogni $n > n_0$, dimostrano le β_1'), β_2').

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Baiada, *Considerazioni sull'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali, con i dati iniziali, nel campo reale.* Annali di Mat. Pura e Appli. (IV), vol. XXXIV, 1953, pp. 1-25.

[2] E. Baiada-C. Vinti, *Un teorema d'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali del primo ordine.* Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, (III), vol. IX, 1955, pp. 115-160.

[3] M. Cinquini Cibrario-S. Cinquini, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico.* C.N.R. monografie mat. 12. Edizioni Cremonese Roma.

[4] M. Cinquini Cibrario, *Nuovi teoremi di esistenza e unicità per i sistemi di equazioni a derivate parziali.* Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, (III), vol. IX, 1955, pp. 65-113.

[5] M. Cinquini Cibrario, *Teoremi di unicità per i sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti.* Annali di Mat. Pura e Appli. (IV), vol. XLIII, pp. 103-134, 1959.

[6] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II.* Comm. Pure Appli. Math. vol. 10, 1957, pp. 537-566.

[7] O. A. Olejnik, *On discontinuos solutions of non linear differential equation* Doklady Akad. Nauk. SSR, vol. 109, 1956, pp. 1098-1101.

[8] M. Pagni, *Un'osservazione sull'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXX, 1951, pp. 470-474.

[9] C. Vinti, *Un teorema di esistenza per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma* $p^{(i)} = f^{(i)}(x, y, z^{(1)}, .., z^{(n)}, q^{(i)})$. Atti Sem. Mat. Fis. Modena, vol. XII, 1963, pp. 33-106.