

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

S. CAMPANATO

Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 21, n° 4 (1967), p. 701-707

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_701_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN RISULTATO RELATIVO
AD EQUAZIONI ELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE
DI TIPO NON VARIAZIONALE

S. CAMPANATO (*)

Consideriamo l'operatore ellittico

$$Eu = \sum_{ij=1}^n a_{ij} D_i D_j u$$

i cui coefficienti sono funzioni reali misurabili e limitate, definite su un aperto Ω di \mathbb{R}^n , limitato e convesso, e inoltre sono tali, se $n > 2$, che gli autovalori della matrice simmetrica $\{a_{ij}(x)\}$ sono fra loro abbastanza vicini (n. 1 condizione c)).

Si dimostra che esistono due numeri reali p_0 e p_1 , $1 < p_0 < 2 < p_1$, tali che per tutti i p dell'intervallo (p_0, p_1) l'operatore E è un isomorfismo di $H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$. In particolare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \\ Eu = f \in L^p(\Omega) \end{cases} \quad p_0 < p < p_1$$

ha una e una sola soluzione.

Per $p = 2$ si ritrova un risultato già dimostrato per altra via da Talenti [10] (per il caso bidimensionale cfr. [1], [11]).

Per $n = 2$ un analogo risultato è stato ottenuto da Pucci in un recente lavoro [9].

Pervenuto alla Redazione il 17 Luglio 1967.

(*) Lavoro parzialmente finanziato da « the United States Air Force » con il contratto AF EOAR grant 67-38 attraverso « the European office of Aerospace Research ».

Il risultato di questa nota, come quello di Pucci, è di tipo qualitativo nel senso che si prova l'esistenza di p_0 e p_1 ma non se ne dà una esatta valutazione. Se indichiamo con $\Delta^{-1}(p)$, $p > 1$, l'inverso dell'isomorfismo $\Delta: H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, una valutazione esatta di p_0 e p_1 è legata alla valutazione della norma $\|\Delta^{-1}(p)\|$.

Per $n = 2$, dal risultato stabilito in questa nota e dal teorema di immersione di Sobolev, segue che la soluzione del problema di Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega) \\ Eu = f \in L^p(\Omega), \quad p > 2 \end{array} \right.$$

ha le derivate prime holderiane. L'esponente di Holder che si ottiene per questa via non è certamente il migliore (cfr. i risultati di Talenti [11], Nirenberg [8], Finn-Serrin [3], Hartman [4], ...).

1. Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n convesso⁽¹⁾ e con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare; per fissare le idee supponiamo che $\partial\Omega$ sia di classe C^3 . Indichiamo con $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$, $p > 1$, la chiusura dell'insieme delle funzioni u

$$u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega$$

rispetto alla norma

$$(1.1) \quad |u|_{p,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n (D_i D_j u)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Si può osservare che

$$H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega) = H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,p}(\Omega).$$

È noto che per ogni $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, il problema di Dirichlet

$$\Delta u = f$$

$$u \in H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$$

ammette una e una sola soluzione u e si ha la maggiorazione

$$(1.2) \quad |u|_{p,\Omega} \leq c(p) \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

⁽¹⁾ Se $n > 2$ si può supporre, più in generale, che la curvatura media di $\partial\Omega$ abbia segno costante non positivo (retta normale orientata verso l'esterno).

In particolare, per $p = 2$, si ha la maggiorazione ⁽²⁾

$$(1.3) \quad \|u\|_{2, \Omega} \leq \|J\|_{L^p(\Omega)}.$$

Quindi A è un isomorfismo di $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ su $L^p(\Omega)$ per ogni $p > 1$. Indichiamo con $A^{-1}(p)$ l'isomorfismo inverso il quale applica $L^p(\Omega)$ su $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$. Dalla (1.3) segue che

$$\|A^{-1}(2)\| \leq 1.$$

Allora se fissiamo un r nell'intervallo $(2, +\infty)$ si ottiene, per interpolazione, che per tutti i p dell'intervallo $2 \leq p \leq r$

$$(1.4) \quad \|A^{-1}(p)\| \leq \|A^{-1}(r)\|^{\frac{r(p-2)}{p(r-2)}}.$$

Analogo discorso se fissiamo un r dell'intervallo $(1,2)$.

Sia dato in Ω l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Eu = \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u$$

a coefficienti reali e simmetrici e supponiamo che

a) $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$.

b) Esistono due costanti positive ν ed M tali che

$$(1.5) \quad \nu |\lambda|^2 \leq \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \leq M |\lambda|^2 \quad \text{per } x \in \Omega \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

c) Indichiamo con $\mu_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) gli autovalori della matrice $\{a_{ij}(x)\}$; facciamo l'ipotesi che sia

$$(1.6) \quad \inf_{\Omega} \frac{[\sum_i \mu_i(x)]^2}{\sum_i \mu_i^2(x)} > n - 1.$$

⁽²⁾ Ciò segue dal fatto che se $u \in H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ allora

$$\int_{\Omega} \sum_{ij=1}^n (D_i D_j u)^2 dx - (n-1) \int_{\partial\Omega} |\text{grad } u|^2 H(x) d\sigma = \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx$$

dove $H(x)$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ nel punto x (Talenti [10]).

Questa condizione è banalmente verificata se $n = 2$ mentre per $n > 2$ l'ipotesi (1.6) equivale ad imporre che gli autovalori della matrice $\{a_{ij}(x)\}$ siano abbastanza vicini tra loro ⁽³⁾.

Poniamo

$$(1.7) \quad \mathfrak{K} = \sup_{\Omega} \left\{ n - \frac{[\sum_i \mu_i(x)]^2}{\sum_i \mu_i^2(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sup_{\Omega} \left\{ \frac{(\sum_{ij} (\mu_i - \mu_j)^2)}{2 \sum_i \mu_i^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

In virtù dell'ipotesi (1.6) risulta ⁽⁴⁾

$$(1.8) \quad 0 \leq \mathfrak{K} < 1.$$

Consideriamo la funzione

$$(1.9) \quad \alpha(x) = \frac{\sum_i \mu_i(x)}{\sum_i \mu_i^2(x)}$$

$\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$ ed è strettamente positiva, allora l'operatore $\Delta - \alpha E$ è una applicazione lineare e continua di $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p > 1$.

Se indichiamo con $\|\Delta - \alpha E\|_p$ la norma dell'applicazione $\Delta - \alpha E: H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, si ha questo teorema che è fondamentale ai fini del nostro risultato

TEOREMA 1.I. *Per ogni $p > 1$ risulta*

$$(1.10) \quad \|\Delta - \alpha E\|_p \leq \mathfrak{K}.$$

DIM. Sia $u(x)$ una funzione appartenente ad $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$; per quasi tutti gli $x \in \Omega$ risulta

$$(1.11) \quad \begin{aligned} |(\Delta - \alpha E)u|^2 &= \left\{ \sum_{ij=1}^n (\delta_{ij} - \alpha a_{ij}) D_i D_j u \right\}^2 \leq \\ &\leq \sum_{ij=1}^n (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 \cdot \sum_{ij=1}^n (D_i D_j u)^2. \end{aligned}$$

⁽³⁾ È provato da un esempio (Talenti [10]) che, se l'ipotesi (1.6) non è verificata, l'operatore E può non essere un isomorfismo di $H^{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ su $L^2(\Omega)$.

⁽⁴⁾ Ovviamente $\mathfrak{K} = 0$ se e solo se gli autovalori sono tutti uguali quindi se e solo se $E = g(x)\Delta$. Osserviamo anche che per $n = 2$ si può dare una maggiorazione di \mathfrak{K} in termini delle costanti di ellitticità ν ed M ; infatti

$$\mathfrak{K} = \sup_{\Omega} \left\{ \frac{[\mu_1(x) - \mu_2(x)]^2}{\mu_1^2(x) + \mu_2^2(x)} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M - \nu}{M^2 + \nu^2} \leq \left(1 - \frac{\nu}{M}\right).$$

Tenuto conto delle relazioni

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x), \quad \sum_{ij=1}^n a_{ij}^2(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2(x)$$

si ha che

$$(1.12) \quad \sum_{ij=1}^n (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 = n - \frac{[\sum \mu_i(x)]^2}{\sum_i \mu_i^2(x)} \leq \mathfrak{K}^2.$$

Da (1.11) e (1.12) segue che

$$|(\Delta - \alpha E)u| \leq \mathfrak{K} \left\{ \sum_{ij=1}^n (D_i D_j u)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\|(\Delta - \alpha E)u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mathfrak{K} \|u\|_{p, \Omega}$$

da cui la tesi.

TEOREMA 1.II. *Esistono due numeri reali p_0 e p_1 , $1 < p_0 < 2 < p_1$, tali che per ogni p dell'intervallo (p_0, p_1) il problema di Dirichlet*

$$(1.13) \quad \begin{cases} u \in H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega) \\ Eu = f \in L^p(\Omega) \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione u la quale verifica la maggiorazione

$$(1.14) \quad \|u\|_{p, \Omega} \leq \frac{M}{p^2} \frac{\|\Delta^{-1}(p)\|}{1 - \mathfrak{K} \|\Delta^{-1}(p)\|} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

DIM. Fissiamo un r nell'intervallo $(2, +\infty)$; poichè $\|\Delta^{-1}(r)\|$ non è limitata sulla semiretta $(2, +\infty)$ possiamo supporre che sia $\|\Delta^{-1}(r)\| > \frac{1}{\mathfrak{K}}$ (ciò non è affatto essenziale). Per tutti i p dell'intervallo $[2, r]$ si ha la maggiorazione (1.4)

$$\|\Delta^{-1}(p)\| \leq \|\Delta^{-1}(r)\|^{\frac{r(p-2)}{p(r-2)}} = c(p)$$

$c(p)$ è una funzione continua di p nell'intervallo $[2, r]$, è monotona in senso stretto e $c(p) \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow 2$. Quindi esiste un numero p_1 dell'intervallo $(2, r]$ tale che

$$(1.15) \quad \|\Delta^{-1}(p)\| < \frac{1}{\mathfrak{K}}$$

per ogni $p \in [2, p_1)$.

Con ragionamento del tutto analogo si prova che esiste un numero $p_0 \in (1, 2)$ tale che per tutti i p dell'intervallo $(p_0, 2]$ vale la maggiorazione (1.15). A questo punto si conclude in modo standard: sia f una funzione di $L^p(\Omega)$ con $p \in (p_0, p_1)$. Consideriamo l'applicazione

$$\varphi: u \rightarrow \Delta^{-1}(p)(\alpha f) + \Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E)u$$

φ applica $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ in $H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ ed è una contrazione, in virtù delle maggiorazioni (1.10) e (1.15), infatti

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|_{p,\Omega} = |\Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E)(u_1 - u_2)|_{p,\Omega} \leq \mathfrak{K} \|\Delta^{-1}(p)\| \cdot |u_1 - u_2|_{p,\Omega}$$

e $\mathfrak{K} \|\Delta^{-1}(p)\|$ è minore di 1. Quindi esiste una e una sola $u \in H^{2,p}(\Omega, \partial\Omega)$ tale che

$$(1.16) \quad u = \Delta^{-1}(p)(\alpha f) + \Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E)u$$

La (1.16) è equivalente a scrivere che

$$Eu = f.$$

Inoltre dalla (1.16) si ha che

$$\begin{aligned} |u|_{p,\Omega} &\leq |\Delta^{-1}(p)(\alpha f)|_{p,\Omega} + |\Delta^{-1}(p)(\Delta - \alpha E)u|_{p,\Omega} \leq \\ &\leq \|\Delta^{-1}(p)\| \sup_{\Omega} \alpha \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\Delta^{-1}(p)\| \mathfrak{K} |u|_{p,\Omega}. \end{aligned}$$

Quindi, tenuto conto che $\mathfrak{K} \|\Delta^{-1}(p)\|$ è minore di 1 e che $\sup_{\Omega} \alpha \leq \frac{M}{p^2}$,

$$|u|_{p,\Omega} \leq \frac{M}{p^2} \frac{\|\Delta^{-1}(p)\|}{1 - \mathfrak{K} \|\Delta^{-1}(p)\|} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BERS-L. NIRENBERG - « *On linear and non linear elliptic boundary value problem in the plane* ». Convegno sulle equaz. a derivate parz., Trieste (1954).
- [2] B. V. BOYARSKII - « *Soluzioni generalizzate di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine di tipo ellittico a coefficienti discontinui* ». Mat. Sbornik N. S. 43 (1957).
- [3] R. FINN-J. SERRIN - « *On the Holder continuity of quasi conformal and elliptic mappings* » Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958).
- [4] P. HARTMAN - « *Holder continuity and non linear elliptic partial differential equations* ». Duke Math. J; 25 (1958).
- [5] N. G. MEYERS - « *On L^p estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations* ». Annali Scuola N.S. di Pisa vol. XVII (1963).
- [6] C. B. MORREY - « *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations* ». Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938).
- [7] J. NECAS - « *Sur la régularité des solutions variationnelles des équations non-linéaires d'ordre $2k$ en deux dimension* ». Ann. S. N. Sup. di Pisa, vol. XXI (1967) pp. 427-457.
- [8] L. NIRENBERG - « *On non linear elliptic partial differential equations and Holder continuity* ». Comm. Pure Appl. Math. VI (1953).
- [9] C. PUCCI - « *Equazioni ellittiche con soluzioni in $W^{2,p}$, $p < 2$* ». Convegno sulle equaz. alle deriv. parz., Bologna (1967).
- [10] G. TALENTI - « *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili* ». Annali di Matematica, vol. LXIX (1965).
- [11] G. TALENTI - « *Equazioni lineari ellittiche in due variabili* ». Le Matematiche vol. XXI (1966).