Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

I. Moisini

Sur les systèmes de Pfaff systatiques de première espèce

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 525-528
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_525_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES SYSTÈMES DE PFAFF SYSTATIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

par I. MOISINI

SUNTO - L'Autore analizza alcune proprietà dei sistemi di Pfaff di carattere due, sistatici, di specie uguale a uno. Nel primo paragrafo si dimostra che tale sistema è di genere due e reciprocamente. Nel secondo paragrafo, considerando i sistemi singolari di prima specie per cui il corrispondente sistema derivato non è completamente integrabile, si dimostra che tali sistemi sono sistatici e decomponibili nel senso di [3].

L'étude des systèmes de Pfaff de caractère deux systatiques et singuliers a été entreprise par E. Cartan [2]. La Note présente expose quel ques proprietés de tels systèmes, dans l'hypotèse supplémentaire que l'espèce du système est égale à l'unité. Le lecteur peut se familiariser avec les notions qu'on emploie dans ce travail en consultant [1] et [2].

§ 1. Systèmes de première espèce systatiques.

Soit

$$\omega_a = 0 \tag{S}$$

un système de Pfaff de s équations indépendantes à n variables à coefficients vérifiant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de Cartan.

THÉORÈME. *Supposons que* (S) *est un système systatique et de première espèce* [2, pp. 519]. *Allors le genre du système est égale à deux.*

Pervenuto alla Redazione il 25 Febbraio 1969.

La démonstration est simple. Dans nos hypothèses ont lieux les formules suivantes :

$$s_1 = 2, \tag{1.1}$$

$$\varrho = 2p, \tag{1.2}$$

$$s_p + 1 = 1, \tag{1.3}$$

$$\varrho = 3p - 2. \tag{1.4}$$

La première paire de formules exprime que (S) est systatique, la deuxième qu'il est de première espèce. On voit immédiatement que dans ces hypothèses la compatibilité des formules pour ϱ nous montre que $p = 2$ donc que le genre de (S) doit etre deux.

La réciproque est aussi vraie : Un système de Pfaff de caractère et de genre deux et de première espèce est aussi systatique. En vérité, dans ce cas, la formule bien connue

$$n = s + s_1 + \ldots + s_p + p$$

devient ici

$$n = s + 2 + 2,$$

ce qui nous montre que $\varrho = 4$ donc $\varrho = 2p$. Mais cette formule caractérise les systèmes systatiques.

§ 2. Les systèmes singuliers de première espèce.

Considérons de nouveau un système de Pfaff (S) et faisons le hypothèsis suivantes :

a) (S) est un système de caractère deux singulier ;

b) (S) est un système de première espèce.

On a donc les formules suivantes :

$$s_1 = 2, \tag{2.1}$$

$$s_p + 1 = 1, \tag{2.2}$$

$$s_{p-1} < 2. \tag{2.3}$$

On a montré [2, p. 540] qu'un système Pfaff de cette sorte a pour système dérivé :

$$\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_s = 0. \tag{2.4}$$

Nous allons supposer que ce système dérivé n'est pas completement intégrable. Alors, de (S), on peut extraire un sous-système :

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = \dots = \omega_s = 0 \tag{2.5}$$

de caractère un et dont le système dérivé est toujours (2.4) [2, p. 542].

E. von Weber dans [4] a démontré que les systèmes de caractère un qui ont un système dérivé non complètement intégrable admettent des variétés caractéristiques à $\varrho - 1$ dimensions qui s'obtiennent en intégrant des équations différentielles ordinaires.

Pour intégrer le systéme donné (S) nous allons donc considérer une variété intégrale non singulière V_ϱ du sous-système (2.5) et nous chercherons les variétés intégrales contenues dans V_ϱ de l'équation de Pfaff:

$$\omega_2 = 0$$

Mais ce procédé d'intégration est celui qui caractérise les systèmes décomposables au sens de M. Haimovici [3]. Ici $(S_1^{(1)})$ est constitué par les équations (2.5) et $(S_1^{(2)})$ par l'équation $\omega_2 = 0$. Donc (S) dans les hypothèses faites est un système décomposable.

Comme dans le paragraphe précédent, les seules différentielles extérieures non nulles, modulo les équations de (S), sont $d\,\omega_1$ et $d\,\omega_2$.

Dans [2, p. 543] on a démontré qu'elles peuvent être écrites sous l'une des trois formes :

$$\left\{\begin{aligned} d\omega_1 &\equiv [\tilde{\omega}_1\, \tilde{\omega}_2]\, (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_s) \\ d\omega_2 &\equiv [\tilde{\omega}_3\, \tilde{\omega}_4] + \dots + [\tilde{\omega}_{2p-1}\, \tilde{\omega}_{2p}]\, (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) \end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\omega_1 &\equiv [\tilde{\omega}_1\, \tilde{\omega}_2]\, (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_s) \\ d\omega_2 &\equiv [\tilde{\omega}_1\, \tilde{\omega}_4] + [\tilde{\omega}_2\, \tilde{\omega}_3] + [\tilde{\omega}_5\, \tilde{\omega}_6] + \dots + [\tilde{\omega}_{2p-1}\, \tilde{\omega}_{2p}]\ (\mathrm{mod}\, \omega_1, \omega_2, \dots, {}_s\omega) \end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\omega_1 &\equiv [\tilde{\omega}_1\, \tilde{\omega}_2]\, (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_s) \\ d\omega_1 &\equiv [\tilde{\omega}_1\, \tilde{\omega}_3] + [\tilde{\omega}_4\, \tilde{\omega}_5] + \dots + [\tilde{\omega}_{2p-1}\, \tilde{\omega}_{2p}]\, (\mathrm{mod}\ \omega_1\, \omega_2, \dots, \omega_s) \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

Mais les hypothèses faites sur (S) excluent la troisième possibilité (2.8). En vérité, en calculant les caractères du système (S) dans les trois cas possibles on obtient pour (2.6) et (2.7)

$$s_1 = 2\,; \qquad s_2 = \dots = s_{p-1} = 1\,; \qquad s_p = 0,$$

pendant que pour (2.8) on a :

$$s_1 = 2 ; \qquad s_2 = ... = s_{p-1} = 1 ; \qquad s_p = 1,$$

ce qui contredit la formule (2.2).

Le calcul des caractèrs nous montre encore une propriété de ces systèmes, à savoir celles d'entre aussi systatiques.

En vérité, dans les cas (2.6) et (2.7), on a

$$\varrho = 2 + (p - 1 - 2 + 1) + p,$$

donc $\varrho = 2p$ et nous savons déjà que cette formule est caractèristique pour les systèmes systatiques.

La recherche des variétés intégrales de l'équation $\omega_2 = 0$ contenues en V_ϱ domande donc, dans les cas étudies plus haut, l'integration d'une équation de Pfaff ayant des caractéristiques de dimension un. Autrement dit, l'intégration des systèmes singuliers de première espèce se réduit à l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Remarquons encore que si le système dérivé (2.4) est complètement intégrable, ce fait n'a plus lieu, comme la montré Cartan [1, chap. XII].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cartan E. - *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques.* Paris, 1945.

[2] Cartan E. - *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux.* Ouvres completes, partie II, vol. 1, 483-553.

[3] Haimovici M. - *Sulla decomposizione dei sistemi differenziali.* Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, (VIII), 23 (1957) 379-386.

[4] Von Weber E. - *Zur Invarianten theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen.* Ber. K. Sachs. Ges. der Wiss. Leipzig, 18 (1901) 207-218.