ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. TOMASSINI

Sulla topologia dello spettro di un'algebra di Banach

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 529-539

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_529_0>

SULLA TOPOLOGIA DELLO SPETTRO DI UN'ALGEBRA DI BANACH

G. TOMASSINI (Pisa) (*)

Data una $\mathbb{C}$-algebra di Banach B, commutativa con unità, indichiamo con S lo spettro di B e con $\widehat{B}$ l'algebra delle trasformate di Fourier degli elementi di B. Con la *topologia di Gelfand* (i. e. la topologia determinata dall'algebra $\widehat{B}$) S è uno spazio di Hausdorff compatto. Per chiarezza indicheremo con $S^\wedge$ lo spettro S con quest'ultima topologia.

Sia $G_B(B)$ l'insieme dei sotto B-moduli di B: $G_B(B)$ è uno spazio analitico di Banach (cf. [2]).

In questo lavoro si dimostra che: S è un aperto di $G_B(B)$ e l'applicazione naturale $S \longrightarrow S^\wedge$ è continua (i. e. la topologia indotta da $G_B(B)$ è più fine della topologia di Gelfand).

Si dimostra poi che le due topologie coincidono sui sottoinsiemi $X \subset S^\wedge$ che hanno una struttura di spazio complesso tale che le funzioni $\widehat{x} \in \widehat{B}$, $x \in B$, siano olomorfe. In particolare da un teorema di Gleason (cf. [3]) segue che sull'insieme Ω degli ideali massimali di B finitamente generati, le due topologie coincidono. Inoltre poichè $G_B(B)$ è metrizzabile su ogni componente connessa di Ω la topologia è a base numerabile.

Si considera poi uno spazio complesso connesso X tale che l'algebra $H(X)$ delle funzioni olomorfe su X separi i punti e dia coordinate locali in ogni punto $x \in X$.

Sullo spettro S di $H(X)$ si definisce una topologia più fine della topologia di Gelfand. Con tale topologia l'applicazione naturale $\delta: X \longrightarrow S$ diventa un omeomorfismo di X su un aperto di S. La topologia definita su S coincide con la topologia di Gelfand se lo spettro di $H(X)$ (con la topo-

Pervenuto alla Redazione il 3 Gennaio 1969.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 35 del C. N. R. nell'anno accademico 1967-'68.

logia di Gelfand) è uno spazio di Stein connesso, contenente X come sottoinsieme aperto, e l'applicazione $\delta^*: H(S) \longrightarrow H(X)$ è un isomorfismo.

Su S si definisce poi un fascio O_S di anelli locali e si prova che δ è un isomorfismo $X \longrightarrow \delta(X)$ tra spazi anellati. In particolare l'insieme Ω dei punti $P \in S$ tali che l'ideale massimale M_P di $O_{S,P}$ sia un $O_{S,P}$-modulo di tipo finito ha punti interni. E rimane allora il problema di vedere se Ω è aperto ed ha una struttura di spazio complesso.

1. Lo spettro di un'algebra di Banach.

a. Sia B un'algebra di Banach su $\mathbb{C}$, commutativa e unitaria. Sia S l'insieme degli ideali massimali di B: S si può identificare all'insieme degli omomorfismi di algebre $F: B \longrightarrow \mathbb{C}$, non nulli. Dato $x \in B$ si considera la funzione $\widehat{x}: S \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\widehat{x}(F) = F(x)$, $F \in$ S. Allora $\widehat{B} = \{\widehat{x}\}_{x \in B}$ è una algebra su $\mathbb{C}$ commutativa ed unitaria. L'algebra $\widehat{B}$ definisce una topologia su S, la *topologia di Gelfand*, ed S con tale topologia sarà indicato con $S^\wedge$: $S^\wedge$ è uno spazio di Hausdorff, compatto.

Consideriamo ora B con la struttura di spazio di Banach su $\mathbb{C}$. L'insieme $\mathcal{G}(B)$ dei sottospazi diretti (¹) di B ha una struttura di varietà analitica di Banach (cf. [2]) detta *varietà di Grasmann*. Siano F e G due sottospazi vettoriali chiusi di B, supplementari, e sia U_G l'insieme dei sottospazi vettoriali chiusi di B che hanno G come supplementare. Sia $\mathfrak{L}(F, G)$ lo spazio di Banach delle applicazioni lineari e continue $F \longrightarrow G$. Ad ogni $F' \in U_G$ corrisponde un'applicazione $l_{F'} \in \mathfrak{L}(F, G)$, quella che ha F' come grafico e viceversa. La famiglia dei sottoinsiemi

$$U_G(F, \varepsilon) = \{F' \in U_G : \| l_{F'} \| < \varepsilon\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di F per la topologia di $\mathcal{G}(B)$. Si verifica inoltre che tale topologia può essere indotta dalla metrica d definita da

$$d(F, F') = \sup(\theta(F, F'), \theta(F', F))$$

dove

$$\theta(F, F') = \sup_{x \in F, \|x\| < 1} \; \inf_{y \in F', \|y\| < 1} \| x - y \|$$

(cf. [1]).

(¹) Sia E uno spazio di Banach ed $F \subset E$ un sottospazio vettoriale di E. Si dice che F è un *sottospazio diretto* di E se è chiuso ed ha un supplementare chiuso.

Sia ora $\mathcal{G}_B(B)$ l'insieme degli ideali di B che sono sottospazi diretti di B. Si dimostra che $\mathcal{G}_B(B)$, con la topologia indotta, è un sottospazio analitico di Banach di $\mathcal{G}(B)$ (cf. [2]).

PROPOSIZIONE 1. *S è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{G}_B(B)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = \mathbb{C}\cdot 1$: allora $S = U_G \cap \mathcal{G}_B(B)$. Infatti se $F \in S$ allora F è un ideale massimale di B quindi è chiuso ed ha G come supplementare: cioè $F \in U_G \cap \mathcal{G}_B(B)$. Viceversa se $F \in U_G \cap \mathcal{G}_B(B)$, F è un ideale chiuso di B tale che $B_{/F} \simeq \mathbb{C}$ quindi è massimale.

In particolare su S c'è una struttura di spazio analitico di Banach indotta da $\mathcal{G}_B(B)$.

Dimostreremo ora che $\widehat{B}$ è un'algebra di funzioni continue su S: da ciò seguirà in particolare che l'applicazione naturale $i: S \to S^\wedge$ è continua. Premettiamo i seguenti lemmi.

LEMMA 1. *L'insieme*

$$X = \{(x, F) \in B \times \mathcal{G}(B) : x \in F\}$$

è chiuso ed è un sottospazio analitico di $B \times \mathcal{G}(B)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Proviamo che $Y = B \times \mathcal{G}(B) - X$ è aperto. Sia $(x, F) \in Y : x \notin F$. Sia G un supplementare chiuso di F. Si ha $x = x_F + x_G$ dove x_F e x_G denotano le proiezioni di x rispettivamente su F e su G. Dato $F' \in U_G$, $x \in F'$ equivale a $l_{F'}(x_F) \neq - x_G$; poniamo

$$U_G(F, \delta) = \left\{F' \in U_G : \| l_{F'} \| < \frac{\delta}{x_F},\ \delta < \| x_G \|\right\}$$

e scegliamo $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ in maniera che: $\delta < \| x_G \| - \varepsilon$ e $\| l_{F'} \| \, \| x_F \| + \varepsilon \| l_{F'} \| < \| x_G \| - \varepsilon$ per $F' \in U_G(F, \delta)$.

Sia $x' \in B$ tale che $\| x'_F - x_F \| < \varepsilon$ e $\| x'_G - x_G \| < \varepsilon$; risulta

$$\| l_{F'}(x'_F) \| \leq \| l_{F'} \| \, \| x'_F \| \leq \| l_{F'} \| \, \| x_F \| + \varepsilon \| l_{F'} \| < \| x_G \| - \varepsilon,$$

quindi

$$W(x, \varepsilon) = \{x' \in B : \| x'_F - x_F \| < \varepsilon,\ \| x'_G - x_G \| < \varepsilon\}$$

è un intorno aperto di x in B e $W(x, \varepsilon) \times U_G(F, \delta) \subset Y$.

(2) Siano F_0 e G_0 due sottospazi vettoriali di B, chiusi e supplementari. Siano p_{F_0} e p_{G_0} rispettivamente le proiezioni di B su F_0 e G_0; p_{F_0} e p_{G_0} sono applicazioni analitiche. Quindi se α_{F_0, G_0} è l'applicazione analitica bigettiva $\mathfrak{L}(F_0, G_0) \longrightarrow U_{G_0}$, l'applicazione $\varphi_0 : B \times U_{G_0} \longrightarrow G_0$ definita da $(x, F) \longrightarrow \alpha^{-1}_{F_0, G_0}(F)(p_{F_0}(x) - p_{G_0}(x))$ è analitica e $(B \times U_{G_0}) \cap X = \varphi_0^{-1}(0)$. Indichiamo con $\mu(B \times U_{G_0}, G_0, \varphi_0)$ il *modello* di spazio analitico di Banach definito da $(B \times U_{G_0}, G_0, \varphi_0)$. Se F_1 e G_1 sono due altri sottospazi vettoriali di B, chiusi e supplementari, allora su $(B \times U_{G_0}) \cap (B \times U_{G_1}) \cap X$ i modelli $\mu(B \times U_{G_0}, G_0, \varphi_0)$ e $\mu(B \times U_{G_1}, G_1, \varphi_1)$ inducono la stessa struttura. La verifica si fa osservando che ci si può ridurre ai due casi seguenti: $G_0 = G_1$ e $F_0 = F_1$ (cf. [2], pag. 30).

LEMMA 2. *Siano $F \in \mathcal{G}(B)$, G un supplementare chiuso di F ed $x \in B$. Sia π_x l'applicazione $U_G \longrightarrow G$ che ad ogni $F \in U_G$ associa la proiezione (dipendente da F) di x su G. Allora se G ha dimensione finita π_x è un'applicazione analitica.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $x = x_F + x_G$ e per ogni $F' \in U_G$ sia $x = x_{F'} + x_G(F')$. Si ha

$$x_{F'} = x_F + x_G - x_G - x_G(F')$$

da cui, per definizione, segue

$$x_G(F') - x_G = l_{F'}(x_F) \qquad \text{e} \qquad \| x_G - x_G(F') \| \leq \| l_{F'} \| \, \| x_F \|.$$

Sia ora $F_0 \in U_G$ e sia $\{F_n\} \subset U_G$ una successione convergente a F_0: per ogni n si ha $x = x_{F_n} + x_G(F_n)$ e $\{x_G(F_n)\}$ è un sottoinsieme limitato di G.

Esiste allora una sottosuccessione $\{x_G(F_{n'})\}$ convergente ad un elemento x'. La successione $\{(x_{F_{n'}}, F_{n'})\}$ di punti di $X = B \times \mathcal{G}(B)$ converge a (x', F_0), e poichè X è chiuso (Lemma 1) $x' \in F_0$, cioè $x = x'_G + x'$. Ne segue che $\pi_x(F_0) = \lim_{n' \to \infty} \pi_x(F_{n'})$ Per dimostrare la continuità di π_x in F_0 resta solo da osservare che se $\{x_G(F_{n''})\}$ è un'altra sottosuccessione convergente allora necessariamente $x_G(F_{n''}) \longrightarrow x'_G$ poichè x si esprime in maniera unica come somma di un elemento di F e di un elemento di G.

(2) L'applicazione $\varrho_x = \pi_x \circ \alpha_{F, G} : \mathfrak{L}(F, G) \longrightarrow G$ è analitica. Infatti l'applicazione ϱ_x è continua quindi localmente limitata: basta allora dimostrare che se $D \subset \mathfrak{L}(F, G)$ è una retta affine, complessa e $\nu : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma lineare, $(\nu \circ \varrho_x)_{|D}$ è una funzione analitica (cf. [1]).

Sia $D = \mathbb{C}\, l_1 + l_2$ con l_1 e l_2 in $\mathfrak{L}(F, G)$; sia $l_t = t l_1 + l_2$, $t \in \mathbb{C}$, e $F_t = \alpha_{F, G}(l_t)$. Si ha

$$x = x_F + x_G = x_{F_t} + x_G(F_t)$$

da cui segue $x_{F_t} = x_F + x_G(F_t)$ e quindi

$$l_t(x_F) = x_G - x_G(F_t) = tl_1(x_F) + l_2(x_F)$$

e

$$\varrho_x(l_t) = x_G(F_t) = x_G - tl_1(x_F) + l_2(x_F).$$

Da ciò segue subito che se $\nu: G \longrightarrow \mathbb{C}$ è una forma lineare, $t \longrightarrow (\nu \circ \varrho_x)(l_t)$ è una funzione analitica di t.

PROPOSIZIONE 2. *$\widehat{B}$ è un'algebra di funzioni continue su S.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $G = \mathbb{C} \cdot 1$ ed $x \in B$. Se $\tau: G \longrightarrow \mathbb{C}$ è l'applicazione analitica definita da $t \cdot 1 \longrightarrow t$, risulta $\widehat{x}_{|U_G \cap S} = \tau \circ (\pi_{x|U_G \cap S})$ da cui la continuità di x per il lemma 2.

COROLLARIO. *L'applicazione naturale $i: S \longrightarrow S^{\wedge}$ è continua.*

b. Sia $G = \mathbb{C} \cdot 1$ $F \in S$ ed $x \in F$. Per ogni $F' \in S$ si ha $x = x_{F'} + x_G(F')$ e $l_{F'}(x) = - x_G(F') = - x(F')\,1$. Ne segue

$$\| l_{F'} \| = \sup_{x \in i(F)} \frac{|\widehat{x}(F')|}{\| x \|} \leq \sup_{x \in F} \frac{|\widehat{x}(F')|}{\|\widehat{x}\|}$$

ove si è posto $\|\widehat{x}\| = \sup_{F \in S} |\widehat{x}(F)|$ (2).

Quindi se $i(F) \subset X \subset S$ e per gli $F' \in X$ abbastanza vicini ad $i(F)$ si può scrivere

$$\sup_{x \in i(F)} \frac{|\widehat{x}(F')|}{\|\widehat{x}\|} \leq c(F', i(F))$$

con $C(F', i(F)) \longrightarrow 0$ per $F' \longrightarrow i(F)$ su X, allora $i^{-1}|_X$ è continua in $i(F)$. Ne segue la

PROPOSIZIONE 3. *Sia $X \subset S$. Se su S esiste una struttura di spazio complesso (di dimensione finita in ogni punto) tale che $\widehat{B}_{|X} = \{\widehat{x}_{|X}\}_{x \in B}$ sia un'algebra di funzioni olomorfe, allora i è un omeomorfismo di $i^{-1}(X)$ su X.*

---

(2) Si ha per ogni $F \in S$, $|\widehat{x}(F)| \leq \| x \|$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa sul seguente risultato dovuto a Grauert e Remmert (cf. [4]).

Sia $D \subset \mathbb{C}^n$ un dominio d'olomorfia e sia $A \subset D$ un sottoinsieme analitico di D con la struttura indotta. Sia $K \subset D$ un compatto. Allora esiste una costante $c = c_K$ dipendente solo da k tale che: se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa e $\sup_{p \in A} |f(p)| \leq 1$, esiste una funzione olomorfa $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ tale che $\tilde{f}_{|A} = f$ e $\|\tilde{f}\|_K \leq C$.

Sia allora $X \subset S^\wedge$ e sia $F_0 \in X$. Si può supporre che X sia un sottoinsieme analitico di un intorno aperto del policilindro $P = \{t \in \mathbb{C}^n : |t_\alpha| < \delta, 1 \leq \alpha \leq n\}$ di centro $F_0 = (0, \dots, 0)$.

Se $x \in F_0$, la funzione $g(t) = \dfrac{\hat{x}(t)}{\|\hat{x}\|}$ è olomorfa su X, nulla in O e $|g(t)| \leq 1$. Esistono allora una costante $C = C_P$ dipende solo da P e una funzione $\tilde{g}$ olomorfa su un intorno di $\bar{P}$ tale che $\tilde{g}_{|P \cap X} = g$ e $\|\tilde{g}\|_P \leq C$. Applicando il lemma di Schwarz alla funzione g si ha per ogni $t \subset P$

$$|g(t)| \leq \frac{\|t\|}{\delta} \|g\|_P \leq \frac{c}{\delta} \|t\|$$

dove $\|t\| = \sup_{1 \leq \alpha \leq n} |t_\alpha|$. In particolare per $t \subset P \cap X$ si ha, per ogni $x \subset F_0$,

$$\frac{|\hat{x}(t)|}{\|\hat{x}\|} \leq \frac{c}{\delta} \|t\|$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Gleason ha dimostrato (cf. [3]) che l'insieme Ω degli ideali massimali di B finitamente generati è aperto in $S^\wedge$ (e quindi in S). Inoltre se $m_0 \in \Omega$ è generato da $x_1, \dots, x_r$, allora esiste un intorno aperto N di O in $\mathbb{C}^r$ tale che:

i) l'applicazione $\varphi : S^\wedge \to \mathbb{C}^r$ definita $m \to (\hat{x}_1(m), \dots, \hat{x}_r(m))$ è un omeomorfismo di un intorno aperto di m_0 su un sottoinsieme analitico di N;

ii) per ogni elemento $x \in B$ esiste una funzione olomorfa $f : N \to \mathbb{C}$ tale che $f \circ \varphi = \hat{x}$;

iii) se $m \in \varphi^{-1}(N)$, m è generato da $x_1 - \hat{x}_1(m), \dots, x_r - \hat{x}_r(m)$.

Ne segue la

PROPOSIZIONE 4. *L'insieme Ω è aperto in $S^\wedge$ ed in S e su Ω, $S^\wedge$ ed S inducono la stessa topologia. In particolare Ω è uno spazio metrizzabile e su ogni componente connessa la topologia è a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. L'ultima parte dell'enunciato segue dal fatto che Ω è metrizzabile, localmente compatto e localmente a base numerabile (cf. [0]).

Sia F un ideale massimale di B.

Una *risoluzione finita diretta* di F è una successione esatta

$$0 \longrightarrow B^{r_m} \xrightarrow{\varepsilon_m} B^{r_{m-1}} \xrightarrow{\varepsilon_{m-1}} \dots B^{r_0} \xrightarrow{\varepsilon_0} F \longrightarrow 0$$

tale che Ker ε_i e Im ε_i, $0 \leq i \leq m$, siano sottospazi diretti rispettivamente di B^{r_i} e $B^{r_{i-1}}$.

L'insieme Ω_1 degli ideali massimali che hanno un risoluzione finita diretta è un aperto di S (cf. [1]). Dalla proposizione 3 segue allora che $\Omega_1 \subset \Omega$ è aperto in $S^\wedge$.

OSSERVAZIONE. Considerazioni analoghe si possono fare nel caso che B sia una algebra di Banach su $\mathbb{R}$. In tal caso però sull'insieme degli ideali massimali finitamente generati le due topologie sono in generale distinte.

2. L'algebra di Fréchet $H(X)$.

a. Sia X uno spazio complesso, connesso, e sia $H(X)$ l'algebra di Fréchet delle funzioni olomorfe su X. Supponiamo che $H(X)$ separi i punti di X e dia coordinate locali nell'intorno di ogni punto $x \in X$.

Lo spettro $S = S(H(X))$ di $H(X)$ è l'insieme degli omomorfismi di algebre $H(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, non nulli.

Adesso S si identifica agli ideali massimali di $H(X)$ che sono chiusi. Analogamente a quanto fatto per un'algebra di Banach si definiscono l'algebra $\widehat{H}(X) = \{\widehat{f}\}_{f \in H(X)}$ e la topologia di Gelfand su S: S con la topologia di Gelfand sarà indicato con $S^\wedge$.

Per ogni aperto $U \subset X$ sia $\varrho_U : H(X) \longrightarrow H(U)$ l'omomorfismo di restrizione. Posto $S_U = S(H(U))$ ϱ_U determina un'applicazione $\varrho_U^* : S_U \longrightarrow S$ che è iniettiva se ϱ_U ha immagine densa.

Dato un punto $x \in X$ il funzionale di Dirac δ_x è un elemento di S_U per ogni aperto $U \subset X$ che contiene x. Ne segue, poichè $H(X)$ separa i punti di X, che U si identifica ad un sottoinsieme di S_U.

b. Sia $\mathcal{U}$ la famiglia degli aperti $U \subset X$ verificanti le condizioni seguenti:

(i) $\varrho_U : H(X) \longrightarrow H(U)$ ha immagine densa

(ii) $S_U^\wedge$ è uno spazio di Stein e l'applicazione $\delta_U : U \longrightarrow S_U^\wedge$ definita da $x \longrightarrow \delta_x$ (δ_x è il funzionale $f \longrightarrow f(x)$) è un isomorfismo di U su un aperto di $S_U^\wedge$

(iii) per ogni $g \in H(U)$ la funzione $\widehat{g} : S_U^\wedge \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa

(iv) sia $x \in X$ e sia $l \in S_U$ tale che $l(\varrho_U(f)) = \delta_x(f)$ per ogni $f \in H(X)$: allora $x \in U$ e $l = \delta_x$.

Poichè $H(X)$ da coordinate locali in ogni punto $x \in X$, per ogni x esiste un sistema fondamentale di intorni aperti $U \in \mathcal{U}$.

D'ora in poi considereremo su S la topologia più fine, che rende continue le applicazioni

$$\varrho_U^* : S_U^\wedge \longrightarrow S \qquad\qquad U \in \mathcal{U}.$$

PROPOSIZIONE 5. *L'applicazione naturale $S \longrightarrow S^\wedge$ è continua e se $X \in \mathcal{U}$, è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Per la continuità di $S \longrightarrow S^\wedge$ occorre provare che per ogni $f \in H(X)$, $\widehat{f} : S \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua.

Fissato $U \in \mathcal{U}$, per ogni $f \in H(X)$ la funzione $\widehat{f} \circ \varrho_U^* : S_U^\wedge \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua poichè per ogni $p \in S_U^\wedge$

$$(\widehat{f} \circ \varrho_U^*)(p) = \varrho_U^*(p)(f) = \widehat{f_{|U}}(p).$$

Se $W \subset \mathbb{C}$ è un aperto allora $\varrho_U^*(f^{-1}(W))$ è aperto in $S_U^\wedge$ per ogni $U \in \mathcal{U}$ cioè $f^{-1}(W)$ è aperto in S e da qui la continuità di f.

(2) Se $X \in \mathcal{U}$, $S \longrightarrow S^\wedge$ è un omeomorfismo. Si può supporre che X sia uno spazio di Stein.

Infatti sia $X \in \mathcal{U}$; X è un aperto dello spazio di Stein $S_X = S^\wedge$ e $H(X) \simeq H(S^\wedge)$. Allora su S le topologie determinate rispettivamente da X e da $S^\wedge$ coincidono, e $S^\wedge = S(H(S^\wedge))^\wedge$, $S = S(H(S^\wedge))$. Basta allora dimostrare la proprietà per gli spazi di Stein.

X sia uno spazio di Stein: S come insieme coincide con X ed $S^\wedge$ è omeomorfo a X. Sia $\{x_m\} \in X$ una successione convergente a x_0 in $S^\wedge$. Sia W un intorno aperto di x_0 in S: allora preso un intorno aperto U di x_0, $U \in \mathcal{U}$, $x_m \in \overset{-1}{\varrho_U^*}(W)$ per $m > m_W$, cioè $x_m \in W$ per $m > m_W$.

PROPOSIZIONE 6. *L'applicazione naturale* $\delta : X \to S$ *è un omeomorfismo di* X *su un aperto di* S.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $U \in \mathcal{U}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\delta_U"] \arrow[d] & S_U^{\wedge} \arrow[d, "\varrho_U^*"] \\ X \arrow[r, "\delta"] & S \end{tikzcd}$$

è un diagramma commutativo. Se $U' \in \mathcal{U}$ si ha $\bar{\varrho}^1_{U'^*}(\delta(U)) = \delta_{U'}(U \cap U')$ che è aperto in $S_{U'}^{\wedge}$: poichè per ogni punto $x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorni aperti $U \in \mathcal{U}$ di x ciò conclude la dimostrazione.

c. Sia $V \subset S$ un aperto ed $f : V \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Diremo che f è *olomorfa* su V se per ogni $p \in V$ esistono un intorno $W \ni p$ ed $f_1, \ldots, f_m \in H(X)$ tali che

$$f_{|W} = \sum_{i_1, \ldots, i_m} a_{i_1, \ldots, i_m} \widehat{f}_1^{i_1}, \ldots, \widehat{f}_m^{i_m}, \quad a_{i_1, \ldots, i_m} \in \mathbb{C}$$

la serie essendo normalmente convergente (i. e. assolutamente ed uniformemente) sui compatti di W.

Le funzioni olomorfe su V formano una $\mathbb{C}$-algebra $O_S(V)$ e $\{V, O_S(V)\}_{V \subset S}$ definisce su S un fascio O_S di anelli locali.

Per ogni $U \in \mathcal{U}$ sia $O_{S_U^{\wedge}}$ il fascio strutturale dello spazio $S_U^{\wedge}$ e sia O_X il fascio strutturale di X.

PROPOSIZIONE 7. *Sia* $U \in \mathcal{U}$. *Allora per ogni* $p \in S_U^{\wedge}$ $O_{S, \varrho_U^*(P)}$ *è isomorfo ad un sottoanello di* $O_{S_U^{\wedge}, p} \simeq O_{X, x}$. *Se* $p = \delta(x)$, $x \in X$, *allora* $O_{S, \varrho_U^*(p)} \simeq \simeq O_{S_U, p} \simeq O_{X, x}$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $F \in O_{S, \varrho_U^*(p)}$ e dimostriamo che $F \circ \varrho_U^* \in O_{S_U^{\wedge}, p}$. Esiste un intorno W di $\varrho_U^*(p)$ tale che

$$F_{|W} = \Sigma\, a_{i_1, \ldots, i_m} \widehat{f}_1^{i_1}, \ldots, \widehat{f}_m^{i_m}, \quad a_{i_1, \ldots, i_m} \in \mathbb{C}$$

con $f_1, \dots, f_m \in H(X)$, la serie essendo normalmente convergente sui compatti di W. Posto $g_1 = f_{1 \mid U}, \dots, g_m = f_{m \mid U}$ poichè $U \in \mathcal{U}$, esistono $G_1, \dots, G_m$ in $H(S_U)$ tali che $G_{\alpha \mid U} = g_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq m$; inoltre per ogni $p' \in S_{\hat{U}}$ si ha $\widehat{g_\alpha}(p') = G_\alpha(p')$, $1 \leq \alpha \leq m$. Se $p \in \overset{-1}{\varrho}{}^*_U(W)$ si ha $\widehat{f_\alpha}(\varrho^*_U(p')) = \widehat{g_\alpha}(p') = G_\alpha(p')$ da cui segue che

$$\Sigma\, a_{i_1, \dots, i_m}\, G_1^{i_1}, \dots, G_m^{i_m}$$

converge normalmente sui compatti di $\overset{-1}{\varrho}{}^*_U(W)$ e che $F \circ \varrho^*_U \in O_{S_{\hat{U}}, p}$. L'omomorfismo $O_{S, \varrho^*_U(p)} \longrightarrow O_{S_{\hat{U}}, p}$ è poi iniettivo.

(2) Se $p = \delta(x)$, $x \in X$, allora l'omomorfismo precedente è surgettivo. Infatti sia $G \in O_{X\, x} \simeq O_{S_{\hat{U}} \cdot p}$. Allora su un intorno aperto di Stein U di x,

$$G_{\mid U} = \Sigma\, a_{i_1, \dots, i_m}\, z_1^{i_1}, \dots, z_m^{i_m}, \quad a_{i_1, \dots, i_m} \in \mathbb{C}$$

dove $z_1, \dots, z_m \in H(X)$ sono coordinate locali su U e la serie converge normalmente sui compatti di U. Poichè $\delta : X \longrightarrow S$ è un omeomorfismo su un aperto di S e $\delta(U)$ è un intorno di $\varrho^*_U(p)$, la funzione $F : \delta(U) \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$F(p') = \Sigma\, a_{i_1, \dots, i_m}\, \hat{z}_1^{i_1}(p') \dots \hat{z}_m^{i_m}(p')$$

è olomorfa su $\delta(U)$ e $G = F \circ \varrho^*_U$.

Per ogni $p \in S$ indichiamo con $\mathcal{M}_p = \{F \in O_{S,p} : F(p) = 0\}$ l'ideale massimale di $O_{S,p}$. Dalla proposizione precedente segue che l'insieme Ω dei punti p in cui $\mathcal{M}_p$ è un $O_{S,p}$-modulo di tipo finito ha punti interni.

Dovrebbe essere possibile dimostrare che Ω è aperto ed è uno spazio analitico.

OSSERVAZIONE. Si può considerare l'unione disgiunta $Y = \dot{\bigcup}_{U \in \mathcal{U}} \cdot S_{\hat{U}}$: allora Y è uno spazio complesso olomorficamente convesso, e $f \longrightarrow (\widehat{\varrho_U(f)})$ manda $H(X)$ in una sottoalgebra $\mathcal{A}(Y)$ di $H(Y)$. Due punti $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \in S_{\hat{U}_1}$, $y_2 \in S_{\hat{U}_2}$ si diranno equivalenti se per ogni $f \in H(X)$

$$\widehat{\varrho}_{U_1}(f)(y_1) = \widehat{\varrho}_{U_2}(f)(y_2), \qquad \forall f \in H(X).$$

Si verifica che lo spazio quoziente di Y per questa relazione di equivalenza (con la topologia quoziente) è omeomorfo a S e che (S, O_S) è lo *spettro* di $(Y, \mathcal{A}(Y))$ nel senso di Grauert (cf. [5]).

BIBLIOGRAFIA

[0] N. BOURBAKI - *Topologie generale,* chap. I.

[1] A. DOUADY - *L'espace de sous-modules d'un module de Banach,* C. R. Ac. Sc., Paris, t. 258, 15 Juin 1964, 5783-5785.

[2] A. DOUADY - *Le problème des modules ....* Ann. de l'Inst. Fourier, t XVI, fasc. 1 (1966).

[3] A. GLEASON - *Finitely generated ideals in Banach algebras.* Journal of Math. and Mech, Vol. 13, n^0 1 (1964).

[4] H. GRAUERT - A. REMMERT - *Komplexe Räume.* Math. Annalen, Vol. 136 (1958).

[5] H. GRAUERT - *Bemerkenwerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten.* Math. Zeitschr. 81 (1963).