ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. CHABROWSKI

Sur l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire du type parabolique

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 4 (1969), p. 547-552

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_547_0>

SUR L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION LINÉAIRE DU TYPE PARABOLIQUE

J. Chabrowski

Dans la présente note nous allons démontrer un théorème concernant l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation parabolique de la forme

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\, u_{x_i} + c(t, x)\, u - u_t = 0 \tag{1}$$

$$(a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, \dots, n)$$

dans la classe des fonctions qui vérifient l'inégalité

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u^-(t, x) \exp(-\alpha\, |x|^2)\, dx < +\infty, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$u^-(t, x) = \max[-u(t, x), 0], \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

α est une constante positive.

Ce problème a été traité par M. Nicolescu et C. Foias [5] pour l'équation de la propagation de la chaleur. P. Mustaţă [4] a étendu ce résultat à l'équation

$$u_t = a(t, x)\, u_{xx} + b(t, x)\, u_x + c(t, x)\, u.$$

Pervenuto alla Redazione il 21 Ottobre 1968.

Dans ces travaux on applique la méthode de réflexion imaginée de M. Nicolescu. Notre démonstration sera basée sur l'unicité des solutions non négatives [1].

On suppose que les coefficients de l'équation (1) sont soumis aux hypothèses suivantes :

I. Les coefficients sont hölderiens par rapport aux variables (t, x) dans une couche $H = (0, T] \times E_n$ et de classe $C^2(H)$ par rapport à la variable spatiale $x = (x_1, \dots, x_n)$ (E_n est ici l'espace euclidien à n dimensions et T est un nombre positif).

II. Il existe des constantes positives K_1, K_2 et K_3 telles que

$$|a_{ij}(t, x)| \leq K_1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t, x)\right|, \quad |b_i(t, x)| \leq K_2 (|x|^2 + 1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x)\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_i} b_i(t, x)\right|, \quad |c(t, x)| \leq K_3 (|x|^2 + 1)$$

$i, j = 1, \dots, n$ pour $(t, x) \in H$.

III. La forme quadratique

$$A(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\, \xi_i \xi_j$$

est uniformément définie positive; c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$A(\xi) \geq |\xi|^2 \alpha$$

pour tout $(t, x) \in H$ et tout vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$.

Il résulte des hypothèses I, II et III qu'il existe la solution fondamentale $\Gamma(t, x; \tau, y)$ de l'équation (1) satisfaisant aux inégalités [2] (chap. 1, § 5, sec. 1 et 2)

$$\Gamma(t, x; \tau, y) \leq C (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\mu \frac{|x - y|^2}{t - \tau}\right) \tag{3}$$

$$|\Gamma_{x_i}(t, x; \tau, y)| \leq C (t - \tau)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\mu \frac{|x - y|^2}{t - \tau}\right) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{4}$$

pour (t, x), $(\tau, y) \in H$, $t > \tau$, où C et μ sont des constantes positives.

Nous disons que la fonction $u(t, x)$ est la solution régulière de l'équation (1) dans H lorsqu'elle est continue dans $\overline{H}$, possède les dérivées u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, $u_t (i, j = 1, \ldots, n)$ continues dans H et satisfait à (1) dans H.

Tout ceci étant adoptés, nous pouvons énoncer notre théorème.

THÉORÈME. Supposons que les hypothèses I, II et III soient satisfaites. Soit $u(t, x)$ une solution régulière de l'équation (1) dans H satisfaisant à l'inégalité (2) et telle que

$$u(0, x) = 0 \tag{5}$$

pour $x \in E_n$.

Alors

$$u(t, x) = 0$$

pour tout $(t, x) \in \overline{H}$.

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons que $u(t, x) = 0$ dans une couche $[0, \delta] \times E_n$, où un nombre $\delta > 0$ sera choisi convenablement.

Soit

$$\widetilde{L}w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [a_{ij}(t, x) w] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [b_i(t, x) w] + c(t, x) w + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

l'équation adjoint à (1). On sait que pour des fonctions w et v assez régulières aux supports bornés (par rapport à la variable x) nous avons l'égalité suivante (voir [3], chap. 1, sec. 8)

$$\int_0^s dt \int_{E_n} \{w(t, x) L[v(t, x)] - v(t, x) \widetilde{L}[w(t, x)]\} dx = \tag{6}$$

$$= \int_{E_n} w(0, x) v(0, x) dx - \int_{E_n} w(s, x) v(s, x) dx,$$

où $s \leq T$. Soit $(\bar{t}, \bar{x})$ un point arbitraire de $[0, \delta] \times E_n$. Désignons par $h(x)$ une fonction de classe $C^2(E_n)$ jouissant des propriétés suivantes

$$h(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x - \bar{x}| \leq R, \qquad h(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x - \bar{x}| \geq R + 1$$

$0 \leq h(x) \leq 1$ dans E_n et

$$\sum_{i=1}^{n} |h_{x_i}| + \sum_{i,j=1}^{n} |h_{x_i x_j}| \leq M,$$

R étant une constante positive et de plus une constante M ne dépend pas de R. Posons dans l'identité (6) $v(t,x) = u(t,x)$, $w(t,x) = \Gamma(\bar{t},\bar{x};t,x)\,h(x)$, $s = \bar{t}$. Il résulte de (5) et de la propriété bien connue da la solution fondamentale ([3], chap. 1, sec. 1, formule 1.7) que

$$u(\bar{t},\bar{x}) = \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u(t,x)\,\tilde{L}[h(x)\,\Gamma(\bar{t},\bar{x};t,x)]\,dx. \tag{7}$$

Puisque $\Gamma(\bar{t},\bar{x};t,x)$ en tant que fonction (t,x) satisfait à l'équation adjoint ([3], chap. 1, sec. 8) donc

$$\tilde{L}(h\Gamma) = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\,\partial x_j}\Gamma + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial h}{\partial x_i}\Gamma.$$

L'hypothèse II, les inégalités (3) et (4) permettent d'écrire

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u^-(t,x)\,|\tilde{L}[h(x)\,\Gamma(\bar{t},\bar{x};t,x)]|\,dx \le K\exp\left(-\frac{\mu R^2}{2\delta}\right)\times \tag{8}$$

$$\times\int_0^{\bar{t}} dt \int_{R\le|x-\bar{x}|\le R+1} u^-(t,x)\,dx \le K\exp\left[-\frac{\mu R^2}{2\delta} + 2(R+1)^2\alpha\right]\int_0^{\bar{t}} dt \int_{R\le|x-\bar{x}|\le R+1} u^-(t,x)\times$$

$$\times\exp(-2\alpha\,|x-\bar{x}|^2)\,dx,$$

où une constante $K > 0$ ne dépend pas de R. Il résulte de l'inégalité (2) que

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u^-(t,x)\exp(-2\alpha\,|x-\bar{x}|^2)\,dx < \infty,$$

donc en prenant dans l'inégalité (8) $\delta = \dfrac{\mu}{6\alpha}$ on obtient grâce aux (8) et (7) que

$$u(\bar{t},\bar{x}) = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\bar{t}} dt \int_{R\le|x-\bar{x}|\le R+1} u^+(t,x)\,\tilde{L}[h(x)\,\Gamma(\bar{t},\bar{x};t,x)]\,dx, \tag{9}$$

où $u^+(t, x) = \max[u(t, x), 0]$. Posons maintenant dans l'identité (6) $v(t, x) = [u(t, x)^2 + \varepsilon]^{\frac{1}{2}}$, $w(t, x) = h(x)\,\Gamma(\bar{t}, \bar{x}; t, x)$, $s = \bar{t}$. En s'appuyant sur l'hypothèse III nous vérifions que

$$(10)\qquad Lv = \frac{u}{v}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,u_{x_i x_j} + \frac{\varepsilon}{v^3}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j} + \frac{u}{v}\sum_{i=1}^{n} b_i\,u_{x_i} +$$

$$+ cv - \frac{u\,u_t}{v} \geq -\frac{cu^2}{v} + cv = \frac{\varepsilon c}{v},$$

d'où

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} \varepsilon\, c(t, x)\, h(x)\, \Gamma(\bar{t}, \bar{x}; t, x)\,[u(t, x)^2 + \varepsilon]^{-\frac{1}{2}}\, dx \leq \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} [u(t, x)^2 + \varepsilon]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \widetilde{L}[h(x)\,\Gamma(\bar{t}, \bar{x}; t, x)]\, dx - [u(\bar{t}, \bar{x})^2 + \varepsilon]^{\frac{1}{2}} + \int_{E_n} \varepsilon h(x)\,\Gamma(\bar{t}, \bar{x}; 0, x)\, dx.$$

Si $\varepsilon \to 0$ alors on obtient l'inégalité

$$|u(\bar{t}, \bar{x})| \leq \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} |u(t, x)|\, \widetilde{L}[h(x)\,\Gamma(\bar{t}, \bar{x}; t, x)]\, dx,$$

d'où selon (8) et (9), il découle que

$$|u(\bar{t}, \bar{x})| \leq \lim_{R\to\infty} \int_0^{\bar{t}} dt \int_{E_n} u^+(t, x)\, \widetilde{L}[h(x)\,\Gamma(\bar{t}, \bar{x}; t, x)]\, dx = u(\bar{t}, \bar{x}),$$

donc la solution $u(t, x)$ est non négative dans $[0, \delta] \times E_n$. Le théorème sur l'unicité des solutions non négatives démontré dans [1] entraîne l'égalité $u(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in [0, \delta] \times E_n$. Pour démontrer l'égalité $u(t, x) = 0$ dans $\bar{H}$, on divise la couche H en domaines partiels par les plans $t = m\delta$ $(m = 1, \dots, r)$ et on établit de proche en proche l'égalité $u = 0$ dans ces domaines.

TRAVAUX CITÉS

[1] D. G. ARONSON and P. BESALA, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients,* Coll. Math. XVIII (1967), p. 125-135.

[2] S. D. EIDELMAN, *Systèmes paraboliques,* Moscou 1964 (en russe).

[3] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type,* Englewood Cliffs 1964.

[4] P. MUSTAŢǍ, *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique du second ordre,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XXI (1967), p. 507-526.

[5] M. NICOLESCU et C. FOIAS, *Représentation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur,* Rend. Acad. Naz. Dei Lincei 38, fasc. 4 (1965) p. 465-467; 38, fasc. 5 (1965), p. 621-627; 40, fasc. 5 (1966) p. 785-791.

Université Silésienne
Katowice