Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giancarlo Pocci

Obbiettività ed isotropia nella teoria delle volte elastiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 4 (1969), p. 697-709
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_697_0>

OBBIETTIVITÀ ED ISOTROPIA NELLA TEORIA DELLE VOLTE ELASTICHE

GIANCARLO POCCI

Introduzione.

Ci proponiamo in questo lavoro di adattare ad uno schema bidimensionale i principi di obbiettività e di isotropia, che sono stati con successo applicati allo studio di un continuo tridimensionale elastico, e dei quali il lettore può trovare un'ampia rassegna in [1]. La forma del principio di obbiettività, così come noi la esporremo, sarà tale da coincidere con l'enunciato di Zaremba [Ved. ad es., 1, pag. 45].

Avvertiamo il lettore che il continuo bidimensionale che noi considereremo è una descrizione del tipo *superficie di Cosserat*, già considerata da altri autori (si veda ad es. [2]), di una volta sottile formata da materiale elastico isotropo [1, pagg. 119-140]; per il formalismo che adotteremo ci riallacciamo ad un altro nostro lavoro [3] ed alla bibliografia in questo riportata.

1. Generalità.

Consideriamo un continuo schematizzato in una superficie Ω in ogni punto della quale è definito un vettore mai tangente alla superficie che diremo « direttore ». Noi supporremo che superficie e direttore consentano una rappresentazione sufficiente, per certi scopi, di una volta. Imporremo alla rappresentazione delle restrizioni (simili ed analoghe restrizioni che si introducono in teorie tridimensionali), che trascrivono sullo schema l'idea che la volta sia costituita da materiale elastico isotropo [1]. Sulla superficie sia fis-

---

Pervenuto alla Redazione il 6 Giugno 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica N. 44 del C. N. R. per l'anno accademico 1968 - '69 presso l'Istituto Matematico della Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa.

sato un sistema di coordinate lagrangiane $\{x^l\}$ ed uno dei due riferimenti naturali $\left\{\mathbf{g}_l = \dfrac{\partial P}{\partial x^l}, \mathbf{n}\right\}$ associati a queste coordinate, e sia $\mathbf{d} = \mathbf{d}(P, t) = \mathbf{d}(x^1, x^2, t)$ il direttore.

Facciamo l'ipotesi che fra tutte le possibili scelte di un campo $\mathbf{d}(x^1, x^2, t)$ atte a descrivere sullo schema bidimensionale la deformazione (sostanzialmente tridimensionale) del nostro continuo sottile, ce ne sia una sola che rende tale descrizione la più semplice possibile. Noi ammetteremo più precisamente che la determinazione sia possibile in modo che in una configurazione naturale $\overset{\circ}{\Omega}$, che supponiamo esistente, il vettore $\mathbf{d}$ risulta, in ogni punto di $\overset{\circ}{\Omega}$, normale ad $\overset{\circ}{\Omega}$. Questa configurazione sarà presa come configurazione di riferimento e le grandezze che si riferiscono ad essa avranno tutte la soprasegnatura « $\circ$ ».

2. Geometria della deformazione.

Per meglio illustrare ciò che andremo esponendo consideriamo ora un continuo tridimensionale sul quale sia fissato un sistema di coordinate lagrangiane $\{X^H\}$ (1).

Le tre condizioni

$$\mathbf{g}_H = F \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_H \qquad \left(\mathbf{g}_H = \frac{\partial P}{\partial X^H}, \overset{\circ}{\mathbf{g}}_H = \frac{\partial \overset{\circ}{P}}{\partial X^H}\right),$$

definiscono univocamente il *tensore spostamento* F. Se, come è possibile in questo caso, noi scegliamo le coordinate X^H in modo che nella configurazione di riferimento tale sistema di coordinate sia cartesiano e di versori costanti $\mathbf{c}_H$ e prendiamo un sistema di coordinate cartesiano fisso esterno $\{x^h, \mathbf{c}_l\}$ la rappresentazione mista sulle due basi del tensore del secondo ordine F porta alle ben note quantità $x_{l,M}$ essendo appunto:

$$x_{l,M} + \mathbf{c}_l \cdot F \cdot \mathbf{c}_M .$$

In altre parole noi abbiamo che $F = x_{l,M}\, \mathbf{c}_l \otimes \mathbf{c}_M$.

Torniamo adesso al nostro continuo bidimensionale (2) ed osserviamo che in questo caso le due condizioni

$$\mathbf{g}_l = F \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_l$$

(1) In questo esempio introduttivo noi adottiamo la convenzione usuale secondo la quale gli indici latini vanno da 1 a 3.

(2) Ed alla nostra convenzione sugli indici latini [3].

non determinano univocamente il tensore F, perchè la loro soluzione, che possiamo mettere nella forma generale $F = \mathbf{g}_l \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^l + \mathbf{a} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}$ con $\mathbf{a}$ arbitrario, non è unica.

Se noi poniamo $\mathbf{a} = \mathbf{d}$ il tensore F che ne risulta descrive la deformazione secondo linee analoghe a quelle classiche, ma questa scelta, per i metodi che applicheremo non risulta la più opportuna. Ci conviene invece porre $\mathbf{a} = \mathbf{n}$ in modo che F descrive lo spostamento puramente superficiale. Ciò è possibile anche in virtù del fatto che dato il tensore $F^* = \mathbf{g}_l \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^l + \mathbf{d} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}$ (ed $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$) restano univocamente determinati sia il tensore $F = \mathbf{g}_l \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^l + \mathbf{n} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}$ che il vettore $\mathbf{d}$, e viceversa questi due enti determinano univocamente F^*; quindi ogni funzione di F^* può essese pensata come funzione di F e $\mathbf{d}$ e viceversa.

Sia dunque F definito dalle

$$\mathbf{g}_\alpha = F \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha \qquad (\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{n}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{g}}_3 = \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^3 = \overset{\circ}{\mathbf{n}}),$$

risultando ;

$$F = \mathbf{g}_\alpha \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^\alpha = \mathbf{g}_l \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^l + \mathbf{n} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}. \tag{2.1}$$

Si imporrà che sia sempre $|F| > 0$.

Abbiamo :

$$\mathbf{g}^\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^\alpha \cdot F^{-1}. \tag{2.2}$$

F può essere decomposto nelle due decomposizioni polari date da $F = O \cdot U = V \cdot O$ in cui il tensore ortogonale O è proprio ($|O| = 1$) ed U e V sono simmetrici e definiti positivi.

Risulta :

$$\begin{cases} U^2 = F^T \cdot F = g_{lm} \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^l \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^m + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}, \\ V^2 = F \cdot F^T = \overset{\circ}{g}{}^{lm}\, \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}_m + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \end{cases} \tag{2.3}$$

3. Prime ipotesi costitutive.

Consideriamo a questo punto le equazioni termodinamiche che abbiamo scritto nel nostro precedente lavoro [3]. Se escludiamo che intervengano qui le grandezze per unità di superficie, che avevamo a suo tempo introdotte per avere una maggiore generalità, in tali equazioni rimangono le seguenti grandezze, caratterizzanti il materiale:

degli scalari $\begin{cases} \varepsilon, \text{ energia specifica (per unità di massa),} \\ \eta, \text{ entropia specifica,} \\ \mathcal{F}, \text{ energia libera specifica;} \end{cases}$

un vettore $\mathbf{h}$, flusso di calore;

due tensori del secondo ordine, $\begin{cases} T, \text{ tensore di stress,} \\ M, \text{ tensore dei momenti.} \end{cases}$

Supponiamo che rispetto ad un assegnato osservatore queste grandezze siano funzioni di $\varrho, \theta, \nabla\theta, \mathbf{d}, F$ (*funzioni di risposta* o *equazioni costitutive*) [3] [4].

Precisamente noi intendiamo che queste funzioni sono ben definite quando sia assegnata rispetto all'osservatore la posizione della configurazione di riferimento. Ci si convince subito che una traslazione rigida della configurazione di riferimento non alterando nessuna delle grandezze in considerazione non altera la loro dipendenza funzionale, mentre questa può cambiare se noi ruotiamo rigidamente la configurazione di riferimento, cambiando la sua posizione relativa rispetto all'osservatore.

Si ponga quindi:

$$\begin{cases} \varepsilon = \tilde{\varepsilon}\,(\nabla\theta, \mathbf{d}, F), \\ \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}}\,(\nabla\theta, \mathbf{d}, F), \\ T = \tilde{T}(\nabla\theta, \mathbf{d}, F), \end{cases} \tag{3.1}$$

così come per gli altri scalari e per il tensore M. *Nelle* (3.1) *abbiamo sottinteso per brevità gli argomenti scalari* ϱ *e* θ.

Osserviamo innanzitutto che le (3.1) *devono essere pari in* $\mathbf{d}$. Però ci sono ulteriori restrizioni al tipo di dipendenza funzionale; per esplicitarle sono necessarie alcune premesse.

Pensiamo di ruotare la configurazione attuale con una rotazione rigida caratterizzata da un tensore ortogonale proprio R, $|R| = 1$; di conseguenza

(3) L'ipotesi di indipendenza dal posto corrisponde ad assumere l'omogeneità del materiale costituente la volta.

(4) Nella lista degli argomenti può essere compreso anche $\nabla\mathbf{d}$, che quì trascuriamo per semplicità, pur riservandoci di prenderlo in considerazione quando la sua introduzione ci sembrerà opportuna. Si veda in proposito anche una osservazione alla fine del § 4.

un qualunque segmento orientato a della configurazione attuale si trasforma nel segmento orientato $R \cdot \mathbf{a}$. Precisamente con questa operazione noi immaginiamo di ruotare l'osservatore e la configurazione di riferimento, come un tutto rigido, di R^T.

Un vettore $\mathbf{a}$ sarà detto « della » o « appartunamente alla » configurazione attuale se per sua definizione esso, per una qualunque R, si trasforma come un segmento orientato della configurazione attuale.

Esprimeremo questo fatto scrivendo che $\mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{a}' = R \cdot \mathbf{a}$.

Il concetto lo possiamo estendere ai tensori: ad esempio il vettore $\mathbf{h}$ ed il tensore T (ed M sono) enti della configurazione attuale, perché come conseguenza di una rotazione $R\, \mathbf{h} \longrightarrow R \cdot \mathbf{h}$ e $T \longrightarrow R \cdot T \cdot R^T$. Si noti invece che $F \longrightarrow R \cdot F$.

Possiamo anche pensare di ruotare (rispetto all'osservatore) la configurazione di riferimento, o « iniziale », di una R propria ed adottare le definizioni precedentemente poste. Gli enti $\mathbf{h}$, T, M sono indipendenti da una rotazione sulla configurazione iniziale e noi diaemo che « non appartengano alla » o « non sono della » configurazione iniziale. Il tensore $F \longrightarrow F \cdot R^T$ e non ha quindi un carattere definito di appartenenza all'una o all'altra configurazione. Il tensore U considerato nelle (2.3) appartiene alla configurazione iniziale (mentre V appartiene a quella finale). Per quanto abbiamo detto in precedenza segue che le funzioni di risposta godono delle seguenti proprietà:

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(\nabla\theta, \mathbf{d}, F) = \tilde{\varepsilon}(R \cdot \nabla\theta, R \cdot \mathbf{d}, R \cdot F), \\ \tilde{\mathbf{h}}(\nabla\theta, \mathbf{d}, F) = R^T \cdot \tilde{\mathbf{h}}(R \cdot \nabla\theta, R \cdot \mathbf{d}, R \cdot F), \\ \tilde{T}(\nabla\theta, \mathbf{d}, F) = R^T \cdot \tilde{T}(R \cdot \nabla\theta, R \cdot \mathbf{d}, R \cdot F) \cdot R, \end{cases}
$$

per ogni tensore ortogonale proprio R.

Per introdurre nel nostro schema bidimensionale il concetto di isotropia del materiale costituente la volta, noi non possiamo, come in un continuo tridimensionale, imporre che le (3.1) siano invarianti per una generica rotazione rigida della configurazione iniziale, perché questa ipotesi che è già in contrasto con una immediata intuizione condurrebbe a degli sviluppi teorici di interesse limitato.

In effetti accettiamo per un momento come vera questa ipotesi, e consideriamo una situazione di equilibrio isotermo; allora $T = \tilde{T}(0, \mathbf{d}, F) = \tilde{T}[0, F^* \cdot \mathring{\mathbf{n}}, F^* + (\mathbf{n} - F^* \cdot \mathring{\mathbf{n}}) \otimes \mathring{\mathbf{n}}] = \hat{T}(F^*)$ dove $F^* = \mathbf{g}_l \otimes \mathring{\mathbf{g}}^l + \mathbf{d} \otimes \mathring{\mathbf{n}}$. Se la $\tilde{T}(\nabla\theta, \mathbf{d}, F)$ fosse invariante per una rotazione R sulla configurazione iniziale, di tale proprietà godrebbe anche la $\hat{T}(F^*)$ e si avrebbe che

$\widehat{T}(F^*) = \widehat{T}(F^* \cdot R^T)$. Combinando questa proprietà con quella valida anche per la $\widehat{T}(F^*)$ espressa dalle (3.2) avremmo che per qualunque R, R_1, R_2 ortogonali propri sarebbe :

$$R \cdot \widehat{T}(F^*) \cdot R^T = R \cdot \widehat{T}(F^* \cdot R_1^T) \cdot R^T = \widehat{T}(R \cdot F^* \cdot R_2^T).$$

Consideriamo adesso la decomposizione polare $F^* = V^* \cdot O$ ($|O| = 1$) e prendiamo R_2 in modo che $O \cdot R_2^T = R^T$ ed $R_1 = O^T$. Abbiamo :

$$R \cdot \widehat{T}(V^*) \cdot R^T = \widehat{T}(R \cdot V^* \cdot R^T).$$

Da quest'ultimo risultato discende facilmente che in un riferimento in cui V^* è diagonale anche T lo è. T sarebbe simmetrico e quindi un tensore di superficie, ma è già questa proprietà che non è generalmente accettabile.

Noi ammetteremo allora che le funzioni di risposta (3.1) *sono invarianti per ogni rotazione rigida della configurazione iniziale che conserva invariata la giacitura del piano tangente alla superficie iniziale* $\overset{\circ}{\Omega}$ *nel punto* P *considerato.*

È facile costruire i tensori caratterizzanti tali rotazioni, tensori che indicheremo con $\overset{\circ}{R}$. Infatti una rotazione di $\overset{\circ}{\Omega}$ attorno ad $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ è caratterizzata da un tensore ortogonale $\overset{\circ}{R}_{(+)} = \overset{\circ}{Q}_{(+)} + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}$, dove $\overset{\circ}{Q}_{(+)}$ è un tensore ortogonale proprio appartenente ad $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$, spazio tensoriale bidimensionale tangente ad $\overset{\circ}{\Omega}$ nel punto $\overset{\circ}{P}$ considerato. Una rotazione di ampiezza π attorno ad un asse per $\overset{\circ}{P}$, tangente ad $\overset{\circ}{\Omega}$ e di versare $\mathbf{i}$, è caratterizzata dal tensore $\overset{\circ}{R} = \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} - \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}$, dove $\mathbf{j}$ è un versore ortogonale ad $\mathbf{i}$ e $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, Una combinazione delle due ci dà il tensore $\overset{\circ}{R}_{(-)} = \overset{\circ}{Q}_{(+)} \cdot (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} - \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}) = \overset{\circ}{Q}_{(-)} - \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}$, dove $\overset{\circ}{Q}_{(-)}$ è un tensore ortogonale di $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ e con determinante uguale a -1.

4. Conseguenze dell'ipotesi di isotropia.

Si sottoponga ora la configurazione finale ad una rotazione R^* tale che $R^* \cdot \mathbf{n} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}$. Si consideri $F_1 = R^* \cdot F$ e la decomposizione polare $F_1 = V_1 \cdot O_1$, e si osservi che O_1 rappresenta una rotazione attorno ad $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$. Si ponga ancora per brevità $R^* = \nabla\theta = \boldsymbol{\lambda}$, $R^* \cdot \mathbf{d} = \boldsymbol{\delta}$.

È innanzitutto:

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(\nabla\theta,\, \mathbf{d},\, F) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1), \\ R^*\cdot\tilde{\mathbf{h}}(\nabla\theta,\, \mathbf{d},\, F) = \tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1), \\ R^*\cdot\tilde{T}(\nabla\theta,\, \mathbf{d},\, F)\cdot R^* = \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1). \end{cases}$$

Le funzioni a secondo membro delle (4.1) godono della proprietà che per qualunque rotazione $\overset{\circ}{R}$ (del tipo considerato) è:

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T), \\ \tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1) = \tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T), \\ \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1) = \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T); \end{cases}$$

e per un qualunque $\overset{\circ}{R}_1$ (5) abbiamo ancora

$$(4.2)'\qquad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T) = \tilde{\varepsilon}(\overset{\circ}{R}_1\cdot\boldsymbol{\lambda},\, \overset{\circ}{R}_1\cdot\boldsymbol{\delta},\, \overset{\circ}{R}_1\cdot F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T\cdot\overset{\circ}{R}{}_1^T), \\ \overset{\circ}{R}_1\cdot\tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T) = \tilde{\mathbf{h}}(\overset{\circ}{R}_1\cdot\boldsymbol{\lambda},\, \overset{\circ}{R}_1\cdot\boldsymbol{\delta},\, \overset{\circ}{R}_1\cdot F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T\cdot\overset{\circ}{R}{}_1^T), \\ \overset{\circ}{R}_1\cdot\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T)\cdot\overset{\circ}{R}{}_1^T = \tilde{T}(\overset{\circ}{R}_1\cdot\boldsymbol{\lambda},\, \overset{\circ}{R}_1\cdot\boldsymbol{\delta},\, \overset{\circ}{R}_1\cdot F_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T\cdot\overset{\circ}{R}{}_1^T). \end{cases}$$

Se infine prendiamo $\overset{\circ}{R} = O_1^T$ abbiamo che nei secondi membri delle (4.1) si può sostituire F_1 con V_1; allora le funzioni godono delle proprietà espresse dalle:

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, V_1) = \tilde{\varepsilon}(\overset{\circ}{R}\cdot\boldsymbol{\lambda},\, \overset{\circ}{R}\cdot\boldsymbol{\delta},\, \overset{\circ}{R}\cdot V_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T), \\ \overset{\circ}{R}\cdot\tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, V_1) = \tilde{\mathbf{h}}(\overset{\circ}{R}\cdot\boldsymbol{\lambda},\, \overset{\circ}{R}\cdot\boldsymbol{\delta},\, \overset{\circ}{R}\cdot V_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T), \\ \overset{\circ}{R}\cdot\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\delta},\, V_1)\cdot\overset{\circ}{R}{}^T = \tilde{T}(\overset{\circ}{R}\cdot\boldsymbol{\lambda},\, \overset{\circ}{R}\cdot\boldsymbol{\delta},\, \overset{\circ}{R}\cdot V_1\cdot\overset{\circ}{R}{}^T), \end{cases}$$

per qualunque $\overset{\circ}{R}$ *proprio.*

Occupiamoci innanzitutto dello scalare ε e del vettore $\mathbf{h}$, e cominciamo con l'osservare che si può porre $V_1 = B_1^{1/2} + \overset{\circ}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ con B_1 tensore simme-

(5) che rappresenta una rotazione contemporanea di entrambe le configurazioni immaginate come un tutto rigido.

trico del secondo ordine di $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$. Inoltre, posto $\mathbf{d} = \mathbf{d}_t + d_3\mathbf{n}$, ed ancora $\mathbf{\delta} = \mathbf{\delta}_t + d_3\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ con $\mathbf{\delta}_t = R^*\cdot\mathbf{d}_t$, si vede che esistono in $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ delle funzioni di d_3, λ, $\mathbf{\delta}_t$, $B_1^{1/2}$ tali che:

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{\varepsilon}(\lambda, \mathbf{\delta}_t + d_3\,\overset{\circ}{\mathbf{n}}, B_1^{1/2} + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}) = \widehat{\varepsilon}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2}), \\ \widetilde{\mathbf{h}}(\lambda, \mathbf{\delta}_t + d_3\,\overset{\circ}{\mathbf{n}}, B_1^{1/2} + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}}) = \widehat{\mathbf{h}}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2}), \end{array}\right. \tag{4.4}$$

e che queste funzioni sono pari in d_3 *e pari in* $\mathbf{\delta}_t$, *separatamente,* perché d_3 risulta determinato a meno del segno.

Occupiamoci della funzione $\widetilde{T}(\nabla\theta, \mathbf{d}, F)$. Possiamo porre $T = T_s + \mathbf{n}\otimes\mathbf{t}$ con T_s e $\mathbf{t}$ elementi appartenenti allo spazio bidimensionale $\mathcal{S}_2$ tangente alla configurazione attuale nel punto considerato. Quando ruotiamo con R^* il tensore T i vari termini considerati si trasformano separatamente in modo che possiamo porre:

$$\widetilde{T}(\lambda, \mathbf{\delta}, V_1) = \widetilde{T}_s(\lambda, \mathbf{\delta}, V_1) + \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \widetilde{\mathbf{t}}(\lambda, \mathbf{\delta}, V_1).$$

Possiamo immediatamente asserire che esiste in $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ una funzione $\widetilde{T}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2})$ tale che:

$$\widetilde{T}(\lambda, \mathbf{\delta}, V_1) = \widehat{T}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2})$$

pari in d_3 *e* $\mathbf{\delta}_t$ *separatamente.*

Prefissato uno dei due possibili versi della normale $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, la funzione $\widetilde{\mathbf{t}}(\lambda, \mathbf{\delta}, V_1)$ risulta ben determinata e risulta anche determinata in $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ una $\widehat{\mathbf{t}}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2})$ tale che

$$\widetilde{\mathbf{t}}(\lambda, \mathbf{\delta}, V_1) = \widehat{\mathbf{t}}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2})$$

pari nella coppia di variabili $(d_3, \mathbf{\delta}_t)$.

Se fissato $\mathbf{\delta}_t$ noi cambiamo segno a d_3, ciò corrisponde a cambiare verso ad $\mathbf{n}$ ed $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, e quindi il vettore $\mathbf{t}$ deve andare nel suo opposto. Questo ci porta a scegliere una $\widehat{\mathbf{t}}(d_3, \mathbf{\delta}_t, \lambda, B_1^{1/2})$ *dispari in* d_3 *e quindi anche in* $\mathbf{\delta}_t$. Poiché questa funzione è supposta regolare in $\mathbf{\delta}_t$ abbiamo come prima conseguenza: *per* $\mathbf{\delta}_t = 0$ *è* $\mathbf{t} = 0$ *ed il tensore di stress (e quello dei momenti) sono enti di superficie.*

Se osserviamo che $\overset{\circ}{R}\cdot\mathbf{\delta} = \overset{\circ}{R}\cdot(\mathbf{\delta}_t + d_3\,\overset{\circ}{\mathbf{n}}) = \overset{\circ}{Q}\cdot\mathbf{\delta}_t \pm d_3\,\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, (dove nell'ultimo membro vale il segno superiore o inferiore a seconda che $|\overset{\circ}{Q}|$ vale 1 o -1)

abbiamo che l'applicazione delle (4.3) porta ad asserire che:

$$\widehat{\varepsilon}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{1/2})=\widehat{\varepsilon}(\pm\,d_3\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_t\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\lambda},\mathring{Q}\cdot B_1^{1/2}\cdot\mathring{Q}^T)=$$

$$=\widehat{\varepsilon}(d_3\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_t\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\lambda},\mathring{Q}\cdot B_1^{1/2}\cdot\mathring{Q}^T).$$

Analogamente:

$$\mathring{Q}\cdot\widehat{\mathbf{h}}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{1/2})=\widehat{\mathbf{h}}(d_3\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_t\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\lambda},\mathring{Q}\cdot B_1^{1/2}\cdot\mathring{Q}^T),$$

$$\mathring{Q}\cdot\widehat{T}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{1/2})\cdot\mathring{Q}^T=\widehat{T}(d_3\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_t\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\lambda},\mathring{Q}\cdot B_1^{1/2}\cdot\mathring{Q}^T).$$

Infine da:

$$\mathring{R}\cdot\mathring{\mathbf{n}}\otimes\widehat{\mathbf{t}}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{1/2})\cdot\mathring{R}^T=\mathring{\mathbf{n}}\otimes\widehat{\mathbf{t}}(\pm\,d_3\,,Q\cdot\boldsymbol{\delta}_t\,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\lambda},\mathring{Q}\cdot B_1^{1/2}\cdot\mathring{Q}^T)=$$

$$=\pm\,\mathring{\mathbf{n}}\otimes[\mathring{Q}\cdot\widehat{\mathbf{t}}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{1/2})],$$

risulta:

$$\mathring{Q}\cdot\widehat{\mathbf{t}}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{1/2})=\widehat{\mathbf{t}}(d_3\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\delta}_t\,,\mathring{Q}\cdot\boldsymbol{\lambda},\mathring{Q}\cdot B_1^{1/2}\cdot\mathring{Q}^T).$$

I risultati trovati ci dicono che le funzioni

$$\left|\begin{array}{l}\varepsilon=\widehat{\varepsilon}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{\frac{1}{2}})\\ R^*\cdot\mathbf{h}=\widehat{\mathbf{h}}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{\frac{1}{2}})\\ R^*\cdot T\cdot R^{*T}=\widehat{T}_s(d_3,\boldsymbol{\delta}_t,\boldsymbol{\lambda},B_1^{\frac{1}{2}})\\ R^*\cdot\mathbf{t}=\widehat{\mathbf{t}}(d_3\,,\boldsymbol{\delta}_t\,,\boldsymbol{\lambda},B_1^{\frac{1}{2}})\end{array}\right. \tag{4.5}$$

che abbiamo introdotto e che sono definite nello spazio bidimensionale $\mathring{\mathcal{S}}_2$, o più brevemente nella *giacitura* $\mathring{\mathcal{S}}_2$ (di $\mathcal{S}_3$), sono funzioni isotrope [1] in questa giacitura, cioè la proprietà che caratterizza l'isotropia [1, pag. 23] è verificata per qualunque tensore ortogonale $\mathring{Q}$ appartenente ad $\mathring{\mathcal{S}}_2$, come risulta dalle uguaglianze scritte (6).

---

(6) Se noi introduciamo nelle funzioni di risposta anche $\nabla\bar{\mathbf{d}}$, soddisfacendo questo ente alla condizione $\nabla\bar{\mathbf{d}}\cdot\bar{\mathbf{n}}=0$, esso può essere decomposto in enti di superficie nello stesso modo adottato per i tensori T ed M, in modo che (a parte la presenza di un maggior numero di variabili nelle funzioni di risposta) i risultati di questo lavoro restano essenzialmente inalterati.

5. Conclusione.

Interessa ai nostri scopi il seguente teorema.

Sia $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ *una funzione tensoriale dove* Y *e gli* X_r *sono tensori di qualunque ordine appartenenti ad una giacitura* $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ *di* $\mathcal{S}_3$: *la* $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ *sia isotropa in* $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$. *Esiste allora una ed una sola funzione di* m *tensori variabili* X_r *che soddisfa alle seguenti proprietà:*

α) *È definita quando gli* X_r *appartengono tutti ad una medesima giacitura.*

β) *Coincide in* $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ *con la funzione assegnata.*

γ) *È isotropa in* $\mathcal{S}_3$.

L'unicità è assicurata dalle proprietà α) e γ). Inoltre la proprietà γ) ci dice che Y deve appartenere ad ogni giacitura che contiene gli X_r.

Diamo qui la dimostrazione del teorema nel caso semplice nel quale la funzione in questione è un vettore $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, X)$ funzione di un vettore e di un tensore del secondo ordine. La dimostrazione in altri casi seguirebbe linee del tutto analoghe.

Sia $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$ la normale a $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ ed $\mathbf{n}$ la normale ad un'altra giacitura $\mathcal{S}_2$ qualunque, e si consideri un tensore ortogonale, O tale che $O \cdot \mathbf{n} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}$. Se O^* è uno di questi tensori la soluzione della equazione in O; $O \cdot \mathbf{n} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}$ si possono riassumere nella forma generale $O = (Q \pm \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot O^* \cdot (\overset{\circ}{Q} \pm \overset{\circ}{\mathbf{n}} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{n}})$, dove Q (ortogonale) appartiene a $\mathcal{S}_2$ e $\overset{\circ}{Q}$ (ortogonale) appartiene a $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$, Q e $\overset{\circ}{Q}$ hanno determinante dello stesso segno, e nel prodotto si devono prendere i segni superiori o inferiori a seconda che tale determinante sia positivo o negativo. Se $\mathbf{x}$ e X appartengono ad $\mathcal{S}_2$, $O^T \cdot \mathbf{x}$ e $O^T \cdot X \cdot O$ appartengono ad $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$. Si definisca:

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, X) = O \cdot \mathbf{f}(O^T \cdot \mathbf{x}, O^T \cdot X \cdot O).$$

Tale funzione è innanzitutto isotropa in $\mathcal{S}_2$.

Sia infatti Q_1 un tensore ortogonale di $\mathcal{S}_2$, allora

$$\mathbf{f}_0(Q_1 \cdot \mathbf{x}, Q_1 \cdot X \cdot Q_1^T) = O \cdot \mathbf{f}(O^T \cdot Q_1 \cdot \mathbf{x}, O^T \cdot Q_1 \cdot X \cdot Q_1^T \cdot O).$$

Ora $O^T \cdot Q_1 \cdot O$ è un tensore ortogonale di $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ e quindi: $(O^T \cdot Q_1 \cdot O) \cdot (O^T \cdot Q_1^T \cdot O) = \overset{\circ}{I}$, essendo $\overset{\circ}{I}$ l'unità in $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$. D'altra parte $\mathbf{f}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \overset{\circ}{X})$ è tale che $\overset{\circ}{I} \cdot \overline{\mathbf{f}}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \overset{\circ}{X}) = \overline{\mathbf{f}}(\overset{\circ}{\mathbf{x}}, \overset{\circ}{X})$. Quindi:

$$O \cdot \mathbf{f}(O^T \cdot Q_1 \cdot \mathbf{x}, O^T \cdot Q_1 \cdot X \cdot Q_1^T \cdot O) = O \cdot (O^T \cdot Q_1 \cdot O) \cdot (O^T \cdot Q_1^T \cdot O) \cdot$$
$$\cdot \mathbf{f}(O^T \cdot Q_1 \cdot \mathbf{x}, O^T \cdot Q_1 \cdot X \cdot Q_1^T \cdot O) = Q_1 \cdot O \cdot \mathbf{f}(O^T \cdot \mathbf{x}, O^T \cdot X \cdot O).$$

Inoltre risulta:

$$\mathbf{f}_0\,(\mathbf{x}, X) = Q\cdot O^*\cdot \mathbf{f}\,(O^{*T}\cdot Q^T\cdot \mathbf{x},\ O^{*T}\cdot Q^T\cdot X\cdot Q\cdot O^*).$$

Moltiplichiamo a sinistra entrambi i membri per Q^T e a primo membro portiamo Q^T a moltiplicare gli argomenti della funzione. Si trova che posto $Q^T\cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$, $Q^T\cdot X\cdot Q = X'$ è $\mathbf{f}_0\,(\mathbf{x}', X') = \mathbf{f}_{0^*}\,(\mathbf{x}', X')$; la funzione definita è quindi indipendente dal tensore ortogonale O usato per costruirla.

Siano ora $\mathbf{x}_1$, X_1 elementi appartenenti ad una giacitura $\mathcal{S}_2'$ e $\mathbf{x}_2$, X_2 appartenenti ad un'altra $\mathcal{S}_2''$.

Siano O_1 e O_2 due tensori ortogonali che trasformano $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ in $\mathcal{S}_2'$ e $\mathcal{S}_2''$ rispettivamente (7). È:

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{x}_1, X_1) = O_1\cdot \mathbf{f}\,(O_1^T\cdot \mathbf{x}_1,\ O_1^T\cdot X_1\cdot O_1),$$

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{x}_2, X_2) = O_2\cdot \mathbf{f}\,(O_2^T\cdot \mathbf{x}_2,\ O_2^T\cdot X_2\ O_2).$$

Sia O_{12} un tensore che trasforma la giacitura $\mathcal{S}_2'$ nella $\mathcal{S}_2''$, e le coppie di elementi scelti siano tali che:

$$\mathbf{x}_2 = O_{12}\cdot \mathbf{x}_1$$

$$X_2 = O_{12}\cdot X_1\cdot O_{12}^T\,.$$

Poichè risulta $O_{12} = O_2, O_1^T$, è:

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{x}_2, X_2) = O_2\cdot \mathbf{f}\,(O_2^T\cdot O_{12}\cdot \mathbf{x}_1,\ O_2^T\cdot O_{12}\cdot X_1\cdot O_{12}^T\cdot O_2) =$$

$$= O_{12}\cdot O_1\cdot \mathbf{f}\,(O_1^T\cdot \mathbf{x}_1,\ O_1^T\cdot X_1\cdot O_1) = O_{12}\cdot \mathbf{f}\,(\mathbf{x}_1\cdot X_1)\ \text{c. d. d.}\,.$$

Ritornando ora agli sviluppi del paragrafo precedente noi possiamo considerare estesa a qualunque giacitura la definizione delle funzioni a secondo membro nelle (4.5). Risultando esse funzioni isotrope dei loro argomenti, possiamo scrivere che:

$$\widehat{\varepsilon}\,(d_3, \delta_t, \lambda, B_1^{\frac{1}{2}}) = \widehat{\varepsilon}\,(d_3, R^{*T}\cdot \delta_t, R^{*T}\cdot \lambda, R^{*T}\cdot B_1^{\frac{1}{2}}\cdot R^*).$$

(7) Cioè trasformano ogni tensore che appartiene ad $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ in tensori che appartergono ad $\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}_2'$ e $\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}_2''$ rispettivamente.

Ma $R^{*T}\cdot\delta_t = \mathbf{d}_t$, $R^{*T}\cdot\lambda = \nabla\theta$. Risulta inoltre che:

$$F = R^{*T}\cdot F_1 = R^{*T}\cdot V_1\cdot O_1 = R^{*T}\cdot(B_1^{\frac{1}{2}} + \overset{\circ}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\circ}{\mathbf{n}})\, O_1 =$$
$$= R^{*T}\cdot(B_1^{\frac{1}{2}} + \overset{\circ}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\circ}{\mathbf{n}})\cdot R^*\cdot R^{*T}\cdot O_1 = [(R^{*T}B_1\cdot R^*)^{\frac{1}{2}} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}]\cdot(R^{*T}\cdot O_1) =$$
$$= (B^{\frac{1}{2}} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot(R^{*T}\cdot O_1),$$

avendo posto $V = (F\cdot F^T)^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$. È quindi; $R^{*T}\cdot B_1^{\frac{1}{2}}\cdot R^* = B^{\frac{1}{2}}$.

Tenuto conto dei risultati ora trovati, possiamo scrivere che:

$$\widehat{\varepsilon}\,(d_3\,,\,\delta_t\,,\lambda,\,B_1^{\frac{1}{2}}) = \widehat{\varepsilon}\,(d_3\,,\,\mathbf{d}_t\,,\,\nabla\theta,\,B^{\frac{1}{2}})\,.$$

Portando nelle (4.5) il tensore R^* dal primo al secondo membro ed operando come in precedenza seguono le:

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \widehat{\varepsilon}\,(d_3\,,\,\mathbf{d}_t\,,\,\nabla\theta,\,B^{1/2}) \\ \mathbf{h} = \widehat{\mathbf{h}}\,(d_3\,,\,\mathbf{d}_t\,,\,\nabla\theta,\,B^{1/2}) \\ T_s = \widehat{T}_s(d_3\,,\mathbf{d}_t\,,\,\nabla\theta,\,B^{1/2}) \\ \mathbf{t} = \widehat{\mathbf{t}}\,(d_3\,,\,\mathbf{d}_t\,,\,\nabla\theta,\,B^{1/2}) \end{cases}$$

(continuando ancora a sottintendere le altre variabili scalari ϱ, θ). *Le prime tre funzioni sono pari in d_3 e $\mathbf{d}_t$ separatamente, l'ultima è invece dispari in ciascuna di queste variabili.*

Le nostre funzioni possono anche esser calcolate nella giacitura $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_2$ per valori degli argomenti ruotati a partire da quelli contenuti nelle (5.1) di O^T, essendo O definito dalla decomposizione polare $F = O\cdot U$. Allora $B^{1/2}$ si trasforma in $C^{1/2}$ con C definito dalla $(F^T\cdot F)^{1/2} = C^{1/2} + \overset{\circ}{\mathbf{n}}\otimes\overset{\circ}{\mathbf{n}}$, ed abbiamo:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \widehat{\varepsilon}\,(d_3\,,\,O^T\cdot\mathbf{d}_t\,,\,O^T\cdot\nabla\theta,\,C^{1/2}) \\ \mathbf{h} = O\cdot\widehat{\mathbf{h}}\,(d_3\,,\,O^T\cdot\mathbf{d}_t\,,\,O^T\cdot\nabla\theta,\,C^{1/2}) \\ T_s = O\cdot\widehat{T}_s(d_3\,,\,O^T\cdot\mathbf{d}_t\,,\,O^T\cdot\nabla\theta,\,C^{1/2})\cdot O^T \\ \mathbf{t} = O\cdot\widehat{\mathbf{t}}\,(d_3\,,\,O^T\cdot\mathbf{d}_t\,,\,O^T\cdot\nabla\theta,\,C^{1/2}). \end{cases}$$

Si riconosce nelle (5.1) e (5.2) l'analogia con i risultati che si avrebbero, in maniera più immediata, in un simile caso tridimensionale.

Concludiamo osservando che le (5.1) ci dicono che ogni equazione costitutiva scalare o vettoriale risulta una funzione isotropa in $\mathcal{S}_3$ almeno se come argomenti di tali funzioni compaiono d_3, $\mathbf{d}_t$, B (al posto di $\mathbf{d}$ ed F). Una funzione tensoriale come T non gode invece, neppure con questa scelta delle variabili, di una tale proprietà, perchè la composizione

$$T(d_3, \mathbf{d}_t, \nabla\theta, B^{1/2}) = T_s(d_3, \mathbf{d}_t, \nabla\theta, B^{1/2}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}(d_3, \mathbf{d}_t, \nabla\theta, B^{1/2})$$

non gode della proprietà di isotropia non essendo, ad esempio, invariante in forma rispetto a riflessioni della normale (8).

---

(8) Nella verifica della proprietà di isotropia non dobbiamo stavolta, cambiando il verso di $\mathbf{n}$, cambiare segno a d_3.

BIBLIOGRAFIA

[1] TRUESDELL C., W. NOLL, « *The non-linear field theories of mechanics* », in « Handbuck der Physik », Vol. III/3, Springer 1965, p. 35.

[2] GREEN A. E., NAGHDI P. M., WAINWRIGHT W. L., *A general theory of a Cosserat surface,* Arch. Rational Mech. Anal. 20 (1965), pp. 287-308.

[3] POCCI G., *Trasformazioni termomeccaniche dei continui bidimensionali.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa. 1 (1969), pp. 205-222.