

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

B. BIGOLIN

## **Osservazioni sulla coomologia del $\partial\bar{\partial}$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 24, n° 3 (1970), p. 571-583*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1970\\_3\\_24\\_3\\_571\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_3_571_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# OSSERVAZIONI SULLA COOMOLOGIA DEL $\partial\bar{\partial}$

B. BIGOLIN

In questa nota mi propongo di apportare alcuni miglioramenti al contenuto della mia tesi [1].

In primo luogo dimostro come la risoluzione del fascio  $\mathcal{H}$  delle funzioni pluriarmoniche possa essere prolungata indefinitamente evitando il ricorso alla dualità di Serre.

Nella tesi ottenevo, per ogni scelta degli interi  $p$  e  $q$ , una risoluzione del fascio  $\mathcal{H}$ :

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}_{(p,q)}^1 \xrightarrow{h^1} \dots,$$

i cui ultimi tre termini erano di questo tipo:

$$\dots \rightarrow \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix} ;$$

adesso faccio vedere che la successione si prolunga con l'operatore  $d$  nel modo seguente:

$$\mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+3,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+2,q+2} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+3} \end{matrix} \xrightarrow{d} \dots$$

Questa utile osservazione mi è stata comunicata da A. Andreotti e F. Norguet.

In secondo luogo dimostro che i gruppi  $V^{p,q}$  e  $A^{p,q}$ , di cui è richiamata la definizione nel § 2, danno lo stesso risultato sia che si calcolino in forme a coefficienti  $C^\infty$ , sia che si calcolino in forme a coefficienti distribuzioni; ciò che permette di dare al teorema di dualità un aspetto più gradevole.

Pervenuto alla Redazione il 3 Marzo 1970.

L'autore è stato sostenuto dalla Fondazione « Francesco Severi » e dal Gruppo di ricerca per la Matematica del C. N. R..

§ 1. La risoluzione del  $\partial\bar{\partial}$ .

a) Sia  $X$  una varietà analitica complessa (di dimensione  $n$  su  $\mathbb{C}$ ), su cui consideriamo i seguenti fasci di forme differenziali :

$\mathcal{K}^{p,q}$  = fascio dei germi di  $(p, q)$ -correnti ;

$\mathcal{A}^{p,q}$  = » » » »  $(p, q)$ -forme  $C^\infty$  ;

$\Omega^p$  = » » » »  $p$ -forme olomorfe ;

$\bar{\Omega}^q$  = » » » »  $q$ -forme antiolomorfe ;

$\mathcal{H}$  = » » » » funzioni pluriarmoniche (i. e.  $\partial\bar{\partial}$ -chiusse).

La tesi [1] è dedicata essenzialmente alla costruzione di certe risoluzioni del fascio  $\mathcal{H}$ , risoluzioni che sono del tipo :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Omega}^1 \\ \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,0} \\ \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{i} \bar{\Omega}^1 \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,0} \\ \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,1} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{1,0} \\ \xrightarrow{\partial} \mathcal{A} \end{array} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,1} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{2,2} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{3,2} \oplus \mathcal{A}^{2,3} ;$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Omega}^1 \\ \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,0} \\ \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Omega}^2 \\ \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,1} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,0} \\ \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,0} \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,2} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{1,1} \\ \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,0} \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,2} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{2,1} \end{array} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{2,3} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{3,3} \oplus \mathcal{A}^{2,4}$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Omega}^1 \\ \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,0} \\ \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Omega}^2 \\ \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,1} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,0} \\ \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,0} \\ \xrightarrow{i} \bar{\Omega}^2 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{0,2} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{1,1} \\ \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,0} \\ \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{2,0} \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^{1,2} \\ \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{2,1} \end{array} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{2,3} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{3,3} \xrightarrow{d} \dots$$

In generale, fissata una coppia  $(p, q)$  di interi non negativi ed entrambi  $\leq n = \dim_{\mathbb{C}} X$ , si trova una risoluzione :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{i} \mathcal{L}_{(p, q)}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}_{(p, q)}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \rightarrow \mathcal{L}_{(p, q)}^{p+q} = \mathcal{A}^{p, q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{L}_{(p, q)}^{p+q+1} = \\
 (4) \quad \mathcal{A}^{p+1, q+1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}_{(p, q)}^{p+q+2} = \bigoplus_{\mathcal{A}^{p+1, q+2}} \mathcal{A}^{p+2, q+1},
 \end{aligned}$$

dove  $\mathcal{L}_{(p, q)}^i$  è :

1) somma diretta di un fascio fine, di un  $\mathcal{O}$ -modulo localmente libero, e da un  $\bar{\mathcal{O}}$ -modulo localmente libero, per  $i$  compreso tra 0 e  $\sup(p, q)$ ,

2) fine, per  $i \geq \sup(p, q)$ ,

e dove gli omomorfismi  $h^i$  sono indotti (come in (1), (2), (3)) da  $\partial$ ,  $\bar{\partial}$  e dalla iniezione, compatibilmente con le esigenze della bigraduazione. (Per una descrizione dettagliata della (4), si può vedere il Teor. (2.1) del § 2 di [1]).

b) La possibilità di completare a destra la risoluzione (4) in modo « naturale », e precisamente per mezzo dell'ordinario operatore di differenziazione esterna  $d$  :

$$\begin{aligned}
 \dots \rightarrow \mathcal{A}^{p, q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p+1, q+1} \xrightarrow{d} \bigoplus_{\mathcal{A}^{p+1, q+2}} \mathcal{A}^{p+2, q+1} \xrightarrow{d} \bigoplus_{\mathcal{A}^{p+1, q+3}} \mathcal{A}^{p+2, q+2} \xrightarrow{d} \dots \\
 (5) \quad \dots \rightarrow \bigoplus_{\mathcal{A}^{n, n-1}} \mathcal{A}^{n-1, n} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n, n} \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

poggia sul seguente :

LEMMA (1.1). Siano  $p$  e  $q$  degli interi  $\geq 0$ ,  $j$  un intero  $> 0$ . In  $\mathbb{C}^n$ , sia  $\varphi = \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = j}} \varphi_{\alpha\beta}$  una forma differenziale, con  $\varphi_{\alpha, \beta}$  forma di tipo  $(p + \alpha, q + \beta)$ .

Allora la condizione  $d\varphi = 0$  equivale all'esistenza di forme  $\psi_{\alpha, \beta}$  ( $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = j, \psi_{\alpha\beta}$  di tipo  $(p + \alpha, q + \beta)$ ) tali che, posto  $\psi = \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = j}} \psi_{\alpha\beta}$ ,

si abbia :

$$d\psi = \varphi.$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = j+1}} (\partial\varphi_{\alpha, \beta} + \bar{\partial}\varphi_{\alpha, \beta}) = \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta = j}} \partial\varphi_{\alpha, \beta+1} + \sum_{\substack{\alpha \geq 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = j}} \bar{\partial}\varphi_{\alpha+1, \beta} = \\ &= \bar{\partial}\varphi_{1, j} + \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = j}} (\partial\varphi_{\alpha, \beta+1} + \bar{\partial}\varphi_{\alpha+1, \beta}) + \partial\varphi_{j, 1}. \end{aligned}$$

Tenuto conto dei tipi di forme con cui operiamo, la condizione  $d\varphi = 0$  equivale all'insieme di condizioni:

$$\begin{cases} (*_1) & \bar{\partial}\varphi_{1, j} = 0 \\ (*_2) & \partial\varphi_{\alpha, \beta+1} + \bar{\partial}\varphi_{\alpha+1, \beta} = 0, \quad \text{per } \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = j \\ (*_3) & \partial\varphi_{j, 1} = 0. \end{cases}$$

La condizione  $(*_1)$  implica  $\varphi_{1, j} = \bar{\partial}\psi_{1, j-1}$ ; di conseguenza, la prima delle condizioni  $(*_2)$  (ottenuta per  $\alpha = 1$ ) si scrive:

$$\bar{\partial}(\varphi_{2, j-1} - \partial\psi_{1, j-1}) = 0,$$

da cui:

$$\varphi_{2, j-1} = \partial\psi_{1, j-1} + \bar{\partial}\psi_{2, j-2}.$$

La seconda delle condizioni  $(*_2)$  (ottenuta per  $\alpha = 2$ ) diviene allora:

$$\bar{\partial}(\varphi_{3, j-2} - \partial\psi_{2, j-2}) = 0,$$

da cui:

$$\varphi_{3, j-2} = \partial\psi_{2, j-2} + \bar{\partial}\psi_{3, j-3} \dots$$

Così proseguendo, si ricavano forme differenziali:

$$\psi_{\alpha, \beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq j, \quad \alpha + \beta = j$$

verificanti:

$$\begin{cases} (*_4) & \varphi_{1, j} = \bar{\partial}\psi_{1, j-1} \\ (*_5) & \varphi_{\alpha, \beta+1} = \partial\psi_{\alpha-1, \beta+1} + \bar{\partial}\psi_{\alpha, \beta}, \quad 1 < \alpha \leq j, \alpha + \beta = j. \end{cases}$$

L'ultima delle  $(*_5)$  (ottenuta per  $\alpha = j$ ) dà, in particolare:

$$\varphi_{j, 1} = \partial\psi_{j-1, 1} + \bar{\partial}\psi_{j, 0},$$

onde, sostituendo in  $(*_3)$ , si ottiene :

$$\bar{\partial}\bar{\partial}\psi_{j,0} = 0.$$

Da quest'ultima relazione risulta :

$$\bar{\partial}\psi_{j,0} = \bar{\partial}\theta_{j-1,1}, \quad \text{con} \quad \bar{\partial}\bar{\partial}\theta_{j-1,1} = 0;$$

e di conseguenza

$$(*_6) \quad \varphi_{j,1} = \bar{\partial}(\psi_{j-1,1} + \theta_{j-1,1}).$$

Se conveniamo di indicare  $\psi_{j-1,1} + \theta_{j-1,1}$  senz'altro con  $\psi_{j-1,1}$  (la « nuova »  $\psi_{j-1,1}$  è ottenuta alterando la « vecchia »  $\psi_{j-1,1}$  con un  $\bar{\partial}$ -cociclo), le  $(*_4)$ ,  $(*_5)$ ,  $(*_6)$  messe insieme dicono che :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1,j} = \bar{\partial}\psi_{1,j-1} \\ \varphi_{\alpha,\beta+1} = \bar{\partial}\psi_{\alpha-1,\beta+1} + \bar{\partial}\psi_{\alpha,\beta}, \quad 1 < \alpha < j, \alpha + \beta = j \\ \varphi_{j,1} = \bar{\partial}\psi_{j-1,1}. \end{array} \right.$$

Di qui viene finalmente :

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = j+1}} \varphi_{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\alpha > 0, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta = j}} \varphi_{\alpha,\beta+1} = \\ &= \bar{\partial}\psi_{1,j-1} + \sum_{\substack{1 < \alpha < j \\ \alpha + \beta = j}} \bar{\partial}\psi_{\alpha-1,\beta-1} + \sum_{\substack{1 < \alpha < j \\ \alpha + \beta = j}} \bar{\partial}\psi_{\alpha,\beta} + \bar{\partial}\psi_{j-1,1} = \\ &= \bar{\partial} \left( \sum_{\substack{1 < \alpha \leq j \\ \alpha + \beta = j}} \psi_{\alpha-1,\beta+1} \right) + \bar{\partial} \left( \sum_{\substack{0 < \alpha < j \\ \alpha + \beta = j}} \psi_{\alpha,\beta} \right) = \bar{d} \left( \sum_{\substack{0 < \alpha < j \\ \alpha + \beta = j}} \psi_{\alpha,\beta} \right). \end{aligned}$$

c. v. d..

OSSERVAZIONE. Per  $j$  abbastanza grande ( $j \geq n - \inf(p, q)$ ), ciò non è altro che il lemma di Poincaré per l'operatore  $\bar{d}$ .

c) Riprendiamo la risoluzione (5), di cui vogliamo dimostrare l'esattezza ; posto  $\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = i - (p+q-1)}} \mathcal{A}^{p+\alpha, q+\beta}$ , essa si scrive :

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q} = \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+1} \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+2} \xrightarrow{\bar{d}} \dots \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{2n-1} = \mathcal{A}^{n,n} \rightarrow 0.$$

L'inclusione  $\text{Im}(\mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+j} \xrightarrow{d} \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+j+1}) \subset \text{Ker}(\mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+j+1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+j+2})$  è evidente; l'inclusione inversa è il Lemma (1.1), applicato alle sezioni locali su un aperto coordinato (che possiamo supporre di Stein) della varietà-base  $X$ .

A questo punto non rimane che saldare le due risoluzioni (4) e (5), per ottenere (senza più le eccezioni di [1]) il:

**TEOREMA (1.2).** Su ogni varietà analitica complessa di dimensione  $n$  (su  $\mathbb{C}$ ), e per ogni (fissata) coppia di interi non negativi  $(p, q)$ , con  $p$  e  $q \leq n$ , si ha la seguente successione esatta di fasci:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}_{(p,q)}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q} = \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+1} = \\ = \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}_{(p,q)}^{p+q+2} \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{2n-1} = \mathcal{A}^{n,n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dove  $\mathcal{L}_{(p,q)}^i$  è fornito dalla tabella qui accanto (Tab. 1), e dove gli omomorfismi  $h^i$  sono indotti da  $\partial, \bar{\partial}$  e dall'iniezione, compatibilmente con le esigenze della bigraduazione.

Sostituendo ovunque, nelle nostre considerazioni, le forme  $C^\infty$  con le forme a coefficienti distribuzioni, si ha:

**TEOREMA (1.3).** Su ogni varietà analitica complessa e per ogni coppia  $(p, q)$  di interi non negativi, sussiste la risoluzione scritta nel Teorema (1.2), salvo ad avere ovunque  $\mathcal{K}^{i,j}$  al posto di  $\mathcal{A}^{i,j}$ .

## § 2. Dualità tra i gruppi di Aeppli.


a) Introduciamo le notazioni seguenti:

$$K^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{K}^{p,q}), \quad K_c^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{K}^{p,q})$$

$$A^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}), \quad D^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{A}^{p,q})$$

$$\Omega^p = \Gamma(X, \mathcal{Q}^p), \quad \bar{\Omega}^q = \Gamma(X, \bar{\mathcal{Q}}^q),$$

T A B. 1

	$0 \leq i \leq \inf(p, q) - 1$	$\inf(p, q) \leq i \leq \sup(p, q) - 1$	$\sup(p, q) \leq i \leq p + q$	$p + q + 1 \leq i \leq 2n - 1$
				
$p = 0$ $q = 0$			$\mathcal{L}_{(0,0)}^0 = \mathcal{A}^{0,0}$	$\mathcal{L}_{(0,0)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = i + 1}} \mathcal{A}^{\alpha, \beta}$
$p = 0$ $q \geq 1$		$\mathcal{L}_{(0,q)}^i = \bar{\Omega}^{i+1} \oplus \mathcal{A}^{0,i}$	$\mathcal{L}_{(0,q)}^q = \mathcal{A}^{0,q}$	$\mathcal{L}_{(0,q)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = i - q + 1}} \mathcal{A}^{\alpha, q + \beta}$
$p \geq 1$ $q = 0$		$\mathcal{L}_{(p,0)}^i = \mathcal{A}^{i,0} \oplus \Omega^{i+1}$	$\mathcal{L}_{(p,p)}^p = \mathcal{A}^{p,0}$	$\mathcal{L}_{(p,0)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = i - p + 1}} \mathcal{A}^{p + \alpha, \beta}$
$p, q \geq 1$ $p \leq q$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bar{\Omega}^{i+1} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha=0}^i \mathcal{A}^{\alpha, i-\alpha} \right) \oplus \Omega^{i+1}$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bar{\Omega}^{i+1} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha=0}^p \mathcal{A}^{\alpha, i-\alpha} \right)$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha \geq 0, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta = p + q - i}} \mathcal{A}^{p-\alpha, q-\beta}$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = i - (p+q-1)}} \mathcal{A}^{p+\alpha, q+\beta}$
$p, q \geq 1$ $p \geq q$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bar{\Omega}^{i+1} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha=0}^i \mathcal{A}^{\alpha, i-\alpha} \right) \oplus \Omega^{i+1}$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \left( \bigoplus_{\alpha=0}^q \mathcal{A}^{i-\alpha, \alpha} \right) \oplus \Omega^{i+1}$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha \geq 0, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta = p + q - i}} \mathcal{A}^{p-\alpha, q-\beta}$	$\mathcal{L}_{(p,q)}^i = \bigoplus_{\substack{\alpha > 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = i - (p+q-1)}} \mathcal{A}^{p+\alpha, q+\beta}$



e ricordiamo, da [1], le definizioni dei gruppi di Aeppli :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^{p,q} = \frac{\text{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1}} \quad [p, q \geq 1] \\ V^{0,q} = \frac{\text{Ker}(A^{0,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{1,q+1})}{\bar{\Omega}^q + \bar{\partial} A^{0,q-1}} \quad [q \geq 1] \\ V^{p,0} = \frac{\text{Ker}(A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p+1,1})}{\partial A^{p-1,0} + \Omega^p} \quad [p \geq 1] \\ V^{0,0} = \frac{\text{Ker}(A^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{1,1})}{\bar{\Omega}^0 + \Omega^0} \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{p,q} = \frac{\text{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{d} A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1})}{\bar{\partial} \bar{\partial} A^{p-1,q-1}} \quad [p, q \geq 1] \\ A^{0,q} = \frac{\text{Ker}(A^{0,q} \xrightarrow{d} A^{1,q} \oplus A^{0,q+1})}{\bar{\partial} \bar{\Omega}^{q-1}} \quad [q \geq 1] \\ A^{p,0} = \frac{\text{Ker}(A^{p,0} \xrightarrow{d} A^{p+1,0} \oplus A^{p,1})}{\partial \Omega^{p-1}} \quad [p \geq 1] \\ A^{0,0} = \text{Ker}(A^{0,0} \xrightarrow{d} A^{1,0} \oplus A^{0,1}). \end{array} \right.$$

Sostituendo ovunque, nelle (6) e nelle (7),  $A^{p,q}$  con  $D^{p,q}$  e  $\Omega^p$ ,  $\bar{\Omega}^q$  con  $\{0\}$ , si ottengono le analoghe definizioni per i gruppi a supporti compatti :

$$(8) \quad V_c^{p,q}, A_c^{p,q} \quad [p, q \geq 0].$$

Sostituendo ovunque, nelle (6), (7), (8), gli spazi di forme  $C^\infty A^{p,q}$  e  $D^{p,q}$  con gli spazi di correnti  $K^{p,q}$  e  $K_c^{p,q}$ , si ottengono i gruppi di Aeppli a coefficienti distribuzioni, che indicheremo con :

$$\tilde{V}^{p,q}, \tilde{A}^{p,q}, \tilde{V}_c^{p,q}, \tilde{A}_c^{p,q}.$$

b) Nel suo articolo [2], J. P. Serre dimostra un lemma, che qui riportiamo :

LEMMA (2.1). Siano  $L, M, N$  tre spazi di Fréchet, e  $u: L \rightarrow M, v: M \rightarrow N$  due omomorfismi lineari tali che  $v \circ u = 0$ . Siano  $L', M', N'$  i duali topologici di  $L, M, N$ , e  ${}^t u, {}^t v$  le applicazioni trasposte di  $u, v$ .

Poniamo  $C = v^{-1}(0), B = u(L), H = C/B$ , e  $C' = {}^t u^{-1}(0), B' = {}^t v(N'), H' = C'/B'$ .

Allora  $H$  è uno spazio di Fréchet, il cui duale topologico è isomorfo ad  $H'$ .

Consideriamo allora il complesso :

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} A^{p-1, q} & \xrightarrow{{}^t d} & A^{p, q} & \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} & A^{p+1, q+1} & \xrightarrow{d} & \begin{array}{c} A^{p+2, q+1} \\ \oplus \\ A^{p+1, q+2} \end{array} \\ \oplus & & & & & & \\ A^{p, q-1} & & & & & & \end{array}$$

dove gli spazi  $A^{i, j}$  si intendono muniti della topologia della convergenza uniforme sui compatti con tutte le derivate; ad esso corrisponde, per dualità, il complesso :

$$\begin{array}{ccccccc} K_c^{n-p+1, n-q} & \xleftarrow{d} & K_c^{n-p, n-q} & \xleftarrow{\partial\bar{\partial}} & K_c^{n-p-1, n-q-1} & \xleftarrow{{}^t d} & \begin{array}{c} K_c^{n-p-2, n-q-1} \\ \oplus \\ K_c^{n-p-1, n-q-2} \end{array} \\ \oplus & & & & & & \\ K_c^{n-p, n-q+1} & & & & & & \end{array}$$

essendo  $n$  la dimensione (su  $\mathbb{C}$ ) della varietà-base  $X$ .

Se, nella successione (9), gli operatori  ${}^t d, \partial\bar{\partial}, d$  sono omomorfismi<sup>(1)</sup>, il Lemma (2.1) applicato ponendo, la prima volta  $L = A^{p-1, q} \oplus A^{p, q-1}, M = A^{p, q}, N = A^{p+1, q+1}, u = {}^t d, v = \partial\bar{\partial}$ , la seconda volta  $L = A^{p, q}, M = A^{p+1, q+1}, N = A^{p+2, q+1} \oplus A^{p+1, q+2}, u = \partial\bar{\partial}, v = d$ , assicura che  $V^{p, q}$  e  $A^{p+1, q+1}$  sono spazi di Fréchet, e che i loro duali topologici sono isomorfi, rispettivamente, a  $\tilde{A}_c^{n-p, n-q}$  e  $\tilde{V}_c^{n-p-1, n-q-1}$ .

c) Dimostriamo adesso la seguente :

PROPOSIZIONE (2.2). Per ogni scelta degli interi  $p$  e  $q$ , sussistono gli isomorfismi algebrici :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{p, q} \simeq \tilde{V}^{p, q}, \quad A^{p, q} \simeq \tilde{A}^{p, q} \\ V_c^{p, q} \simeq \tilde{V}_c^{p, q}, \quad A_c^{p, q} \simeq \tilde{A}_c^{p, q}. \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> Nella Prop. (1.2) del § 4 della tesi [1], l'ipotesi che  $d$  sia un omomorfismo topologico è implicitamente ammessa (ma purtroppo non esplicitamente enunciata, come sarebbe necessario...).

E invero, per  $p$  e  $q$  fissati, riprendiamo la risoluzione del Teor. (1.2):

$$(10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^0 \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^1 \rightarrow \dots$$

e l'analogo (di cui al Teor. (1.3)), che si ottiene dalla (10) mettendo  $\mathcal{K}^{i,j}$  al posto di  $\mathcal{A}^{i,j}$  e che denoteremo con:

$$(11) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^1 \rightarrow \dots$$

Posto:

$$\mathcal{L}_{(p,q)} = \text{Ker} (\mathcal{L}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)+1}),$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)} = \text{Ker} (\tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)+1}),$$

le (10) e (11) forniscono delle successioni esatte:

$$(12) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)+1} \rightarrow \dots \\ 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{\text{sup}(p,q)+1} \rightarrow \dots \end{cases}$$

formate evidentemente di fasci fini.

Ad esempio, nel caso semplice della risoluzione (3), si ha:

$$\mathcal{L}_{(2,2)} = \text{Ker} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{0,2} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{1,2} \\ \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \oplus \\ \mathcal{A}^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{2,1} \\ \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}^{2,1} \\ \mathcal{A}^{2,0} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{2,1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(2,2)} = \text{Ker} \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{0,2} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}^{1,2} \\ \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \oplus \\ \mathcal{K}^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}^{2,1} \\ \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{K}^{2,1} \\ \mathcal{K}^{2,0} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}^{2,1} \end{pmatrix}$$

e le (12) diventano :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{A}^{0,2} & \xrightarrow{\partial} & & & \\
 & & \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}^{1,2} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{2,2} \\
 0 \rightarrow \mathcal{L}_{(2,2)} \rightarrow & & \mathcal{A}^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}^{2,2} \\
 & & \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}^{2,1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{3,2} \\
 & & \mathcal{A}^{2,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & & & \xrightarrow{d}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{K}^{0,2} & \xrightarrow{\partial} & & & \\
 & & \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{K}^{1,2} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}^{2,2} \\
 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(2,2)} \rightarrow & & \mathcal{K}^{1,1} & \xrightarrow{\partial} & \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{K}^{2,2} \\
 & & \oplus & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{K}^{2,1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}^{3,2} \\
 & & \mathcal{K}^{2,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & & & \xrightarrow{d} \dots
 \end{array}$$

Tornando al caso generale, discende subito dal Teorema di De Rham sulle risoluzioni acicliche che i gruppi di Aeppli a coefficienti  $C^\infty$  e a supporti arbitrari (rispett. compatti) sono alcuni tra i gruppi di coomologia  $H^k(X, \mathcal{L}_{(p,q)})$  (rispett.  $H_c^k(X, \mathcal{L}_{(p,q)})$ ), mentre i gruppi di Aeppli a coefficienti distribuzioni e a supporti arbitrari (rispett. compatti) sono gli analoghi tra i gruppi di coomologia  $H^k(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)})$  (rispett.  $H_c^k(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)})$ ).

Pertanto la nostra tesi sarà provata, se dimostreremo questa più generale :

PROPOSIZIONE (2.3). Per ogni coppia  $(p, q)$  di interi non negativi e per ogni intero  $k \geq 1$ , si hanno gli isomorfismi :

$$\begin{cases} H^k(X, \mathcal{L}_{(p,q)}) \simeq H^k(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}) \\ H_c^k(X, \mathcal{L}_{(p,q)}) \simeq H_c^k(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}) \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si fa per induzione su  $p+q$ . Siccome  $\mathcal{L}_{(0,0)} \simeq \tilde{\mathcal{L}}_{(0,0)} \simeq \mathcal{H}$  (ogni distribuzione  $\partial\bar{\partial}$ -chiusa è una funzione  $(C^\infty)$  pluriarmonica), l'asserto è certamente vero per  $p+q=0$ .

Supponiamolo dimostrato per tutte le coppie  $(i, j)$  tali che  $i+j = p+q-1$ , e dimostriamolo per  $(p, q)$ . Si abbia, per fissare le idee,  $0 \geq p \leq q$ .

Dalle risoluzioni (10) e (11) si ricavano le successioni esatte « brevi » :

$$(*_1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker} (\mathcal{L}_{(p,q)}^{q-1} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^q) \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^{q-1} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)} \rightarrow 0$$

$$(*_2) \quad 0 \rightarrow \text{Ker} (\tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{q-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^q) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{q-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)} \rightarrow 0.$$

Ora osserviamo che :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ker} (\mathcal{L}_{(p,q)}^{q-1} \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)}^q) \simeq \mathcal{L}_{(p,q-1)} \\ \text{Ker} (\tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{q-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^q) \simeq \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q-1)}, \end{array} \right.$$

e ricordiamo esplicitamente che :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{(p,q)}^{q-1} = \bar{\Omega}^q \oplus \left( \bigoplus_{a=0}^p \mathcal{A}^{\alpha, q-1-a} \right) \\ \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}^{q-1} = \bar{\Omega}^q \oplus \left( \bigoplus_{a=0}^p \mathcal{K}^{\alpha, q-1-a} \right), \end{array} \right.$$

di modo che le successioni  $(*_1)$  e  $(*_2)$  diventano :

$$(*_3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q-1)} \rightarrow \bar{\Omega}^q \oplus \left( \bigoplus_{a=0}^p \mathcal{A}^{\alpha, q-1-a} \right) \rightarrow \mathcal{L}_{(p,q)} \rightarrow 0$$

$$(*_4) \quad 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q-1)} \rightarrow \bar{\Omega}^q \oplus \left( \bigoplus_{a=0}^p \mathcal{K}^{\alpha, q-1-a} \right) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)} \rightarrow 0.$$

Passando alle corrispondenti successioni esatte di coomologia a supporti arbitrari, si ottiene il diagramma :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & H^k(X, \mathcal{L}_{(p,q-1)}) & \rightarrow & H^k(X, \bar{\Omega}^q) & \rightarrow & H^k(X, \mathcal{L}_{(p,q)}) & \rightarrow & H^{k+1}(X, \mathcal{L}_{(p,q-1)}) & \rightarrow & H^{k+1}(X, \bar{\Omega}^q) & \rightarrow & \dots \\ & & \alpha_k \downarrow & & \beta_k \downarrow & & \gamma_k \downarrow & & \alpha_{k+1} \downarrow & & \beta_{k+1} \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & H^k(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q-1)}) & \rightarrow & H^k(X, \bar{\Omega}^q) & \rightarrow & H^k(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q)}) & \rightarrow & H^{k+1}(X, \tilde{\mathcal{L}}_{(p,q-1)}) & \rightarrow & H^{k+1}(X, \bar{\Omega}^q) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

dove : 1) gli omomorfismi  $\beta$  sono tutti (evidentemente !) isomorfismi,

2) gli  $\alpha$  sono pure degli isomorfismi, per l'induzione ammessa.

Ma allora, mediante applicazione iterata del Lemma dei 5, si conclude che anche i  $\gamma_k$  sono isomorfismi, per  $k \geq 1$ .

Analoga conclusione ragionando sulle successioni esatte di coomologia a supporti compatti. c. v. d.

d) Grazie al risultato precedente, e in particolare agli isomorfismi algebrici della Prop. (2.2), siamo in grado di enunciare il teorema di dualità:

**TEOREMA (2.4).** A) Supponiamo che le due applicazioni lineari:

$$\begin{array}{c} A^{p-1, q} \\ \oplus \\ A^{p, q-1} \end{array} \xrightarrow{\iota d} A^{p, q} \xrightarrow{\bar{\partial}\bar{\partial}} A^{p+1, q+1}$$

siano omomorfismi topologici. Allora  $V^{p, q}$  è dotato di una struttura di spazio di Fréchet, e il suo duale topologico è  $A_c^{n-p, n-q}$  ( $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ ).

B) Analogamente, supponiamo che siano omomorfismi le due applicazioni lineari:

$$A^{p-1, q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}\bar{\partial}} A^{p, q} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} A^{p+1, q} \\ \oplus \\ A^{p, q+1} \end{array};$$

allora  $A^{p, q}$  è uno spazio di Fréchet, e il suo duale topologico è  $V_c^{n-p, n-q}$ .

*Istituto Matematico « L. Tonelli »  
Università di Pisa*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] B. BIGOLIN: *Gruppi di Aeppli*. Ann. Sc. Norm. Sup. Vol. XXIII (1969).  
[2] J. P. SERRE: *Un théorème de dualité*. Comm. Math. Helv. Vol. 29 (1955).