

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

HANS WERNER SCHUSTER

KLAUS-WERNER WIEGMANN

Ein Modulproblem für kohärente Unteralgebren

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26, n° 3 (1972), p. 739-745

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_739_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EIN MODULPROBLEM FÜR KOHÄRENTE UNTERALGEBREN

VON HANS WERNER SCHUSTER und KLAUS-WERNER WIEGMANN

Es sei \mathcal{A} eine kohärente Garbe von Algebren auf einem komplexen Raum X . Wir wollen die Unteralkgebren von \mathcal{A} (mit kompakten Trägern) *deformieren*, d. h. wir suchen einen komplexen Raum W sowie eine kohärente Garbe \mathcal{H} auf $W \times X$ von Unteralkgebren von \mathcal{A}_W , für die $\mathcal{A}_W/\mathcal{H}$ platt und eigentlich über W liegt, so dass das Paar W, \mathcal{H} universell ist bezüglich dieser Eigenschaften. Dann gilt:

1) Für jedes $w \in W$ ist $\mathcal{H}|_{\{w\} \times X} \subset \mathcal{A}$ eine kohärente Garbe von Unteralkgebren mit kompaktem Träger $\text{Supp}(\mathcal{A}/\mathcal{H}|_{\{w\} \times X})$.

2) Zu jeder kohärenten Unteralkgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ mit kompaktem $\text{Supp}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ existiert genau ein Punkt $w \in W$ mit $\mathcal{B} = \mathcal{H}|_{\{w\} \times X}$.

DOUADY [1] hat die Menge aller kohärenten Untermoduln von \mathcal{A} mit kompakten Trägern im angegebenen Sinn deformiert; \mathcal{A} braucht dabei nur ein \mathcal{O}_X -Modul zu sein. Mit den Methoden von DOUADY wurde in [5] bewiesen, dass auch die Menge aller komplexen Zwischenstrukturen mit kompakten Trägern eine (universelle) komplexe Struktur besitzt.

Wir wollen dieses Ergebnis verallgemeinern, indem wir das obige Problem lösen, wobei wir gleich den relativen Fall betrachten: Es sei X ein Raum über S und \mathcal{A} eine kohärente Algebra auf X . Dann ist die Gesamtheit $W_S(\mathcal{A})$ aller kohärenten Unteralkgebren von $\mathcal{A}|_{X_s}$, $s \in S$, mit kompakten Trägern ein universeller komplexer Raum. Ist \mathcal{A} sogar eine kohärente (unitäre) Oberalkgebra von \mathcal{O}_X und $\mathcal{A}/\mathcal{O}_X$ ein platter \mathcal{O}_S -Modul, so ist die Menge $W_S(\mathcal{A})$ aller kohärenten Zwischenalkgebren \mathcal{B} , $\mathcal{O}_{X_s} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}|_{X_s}$, mit kompaktem $\text{Supp}(\mathcal{A}|_{X_s}/\mathcal{B})$, $s \in S$, ebenfalls ein universeller komplexer Raum.

Die Beweise geschehen durch Zurückführen auf die Relativierung des Satzes von DOUADY, vgl. POURCIN [3]. Das Theorem aus [5] ist ein Spezialfall, weil die angegebene Plattebedingung für einen Basisraum $S = p_0$ trivial erfüllt ist.

1. Relative Familien kohärenter Unteralgebren.

Ist S ein komplexer Raum, so wollen wir eine kohärente \widehat{O}_S -Modulgarbe \mathcal{A} zusammen mit einem \widehat{O}_S -linearen Homomorphismus

$$\mu : \mathcal{A} \otimes_{\widehat{O}_S} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

eine *kohärente Algebra* auf S nennen. Ist $f : T \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung auf S , so ist

$$f^*(\mathcal{A}, \mu) := (f^* \mathcal{A}, f^* \mathcal{A} \otimes_{\widehat{O}_T} f^* \mathcal{A} \xrightarrow{\sigma} f^*(\mathcal{A} \otimes_{\widehat{O}_S} \mathcal{A}) \xrightarrow{f^* \mu} f^* \mathcal{A})$$

eine kohärente Algebra auf T . Dabei ist σ der kanonische Isomorphismus. Anstelle von (\mathcal{A}, μ) bzw. $f^*(\mathcal{A}, \mu)$ wird oft kurz \mathcal{A} bzw. $f^* \mathcal{A}$ geschrieben. Ist $i : \mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ eine kohärente Untermodulgarbe der kohärenten Algebra \mathcal{A} auf S , so ist \mathcal{A}' genau dann eine kohärente Unteralgebra von \mathcal{A} , wenn die Komposition

$$\mathcal{A}' \otimes_{\widehat{O}_S} \mathcal{A}' \xrightarrow{i \otimes i} \mathcal{A} \otimes_{\widehat{O}_S} \mathcal{A} \xrightarrow{\mu} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A}'$$

der Nullhomomorphismus ist.

Es sei nun S ein fester komplexer Raum, \mathbf{An}/S die Kategorie der komplexen Räume über S und $X \in \text{Ob}(\mathbf{An}/S)$ ein festes Objekt : $X \rightarrow S$. \mathcal{A} sei eine kohärente Algebra auf X .

Ist T ein weiterer Raum über S und $p : T \times_S X \rightarrow X$ die Projektion, so sei $\mathcal{A}_T := p^* \mathcal{A}$.

Wir betrachten nun den folgenden Funktor

$$\mathbf{W}'_S(\mathcal{A}) : (\mathbf{An}/S)^0 \rightarrow \mathbf{Ens}.$$

Für $T \in \text{Ob}(\mathbf{An}/S)$ sei $\mathbf{W}'_S(\mathcal{A})(T)$ die Menge aller kohärenten Unteralgebren \mathcal{F} von \mathcal{A}_T , für die $\mathcal{A}_T/\mathcal{F}$ eine T -platte und T -eigentliche Garbe auf $T \times_S X$ ist. Ist $f : T' \rightarrow T$ ein Morphismus über S , so sei $\mathbf{W}'_S(\mathcal{A})(f)(\mathcal{F}) := (f \times \text{id}_X)_s^* \mathcal{F}$.

SATZ 1. $W'_S(\mathcal{A})$ ist darstellbar.

Zum Beweis benutzen wir ein Resultat von POURCIN :

Ist Y ein komplexer Raum über Z , $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von kohärenten \mathcal{O}_Y -Moduln und \mathcal{G} eigentlich sowie platt über Z , so existiert ein abgeschlossener Unterraum $Z_0 \subset Z$, so dass gilt ;

i) Ist $i: Z_0 \times_Z Y \rightarrow Y$ der kanonische Morphismus, so ist $i^*f = 0$.

i) Ist Z' ein Raum über Z , so dass für die Projektion $\pi: Z' \times_Z Y \rightarrow Y$ gilt $\pi^*f = 0$, so gibt es genau einen Morphismus $Z' \rightarrow Z_0$ über Z .

Dies folgt sofort aus [3], Prop. 1. $Z_0 \rightarrow Z$ ist der bezüglich $\mathcal{G}_T \cong (\text{coker } f)_T$ universelle Raum über Z . Wir definieren $N(f) := Z_0$.

BEWEIS VON SATZ 1. Nach dem relativen Satz von DOUADY [1], vgl. POURCIN [3], Th. 2, gibt es einen Raum $H := H_S(\mathcal{A})$ über S und eine kohärente Modulgarbe $\check{\mathcal{R}}_S(\mathcal{A}) \xrightarrow{i} \mathcal{A}_H$ auf $H \times X$ die universell im Sinne von [3] sind. $\mathcal{R}_S(\mathcal{A}) := \mathcal{A}_H / \check{\mathcal{R}}_S(\mathcal{A})$ ist H -platt und H -eigentlich ; $p: \mathcal{A}_H \twoheadrightarrow \mathcal{R}_S(\mathcal{A})$ sei die Projektion. Man hat also die Homomorphismen

$$\check{\mathcal{R}}_S(\mathcal{A}) \otimes \check{\mathcal{R}}_S(\mathcal{A}) \xrightarrow{i \otimes i} \mathcal{A}_H \otimes \mathcal{A}_H \xrightarrow{\mu_H} \mathcal{A}_H \twoheadrightarrow \mathcal{R}_S(\mathcal{A}) ;$$

dabei ist μ_H die Multiplikation von \mathcal{A}_H . $f := p \circ \mu_H \circ (i \otimes i)$ sei die Komposition. Offenbar wird $W'_S(\mathcal{A})$ dargestellt durch $N(f) \hookrightarrow H$; q.e.d..

2. Unitäre Algebren.

Eine kohärente Algebra (\mathcal{A}, μ) auf einem komplexen Raum S heisst unitär, wenn es ein $1_{\mathcal{A}} \in \Gamma(S, \mathcal{A}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{A})$ gibt, so dass die Kompositionen

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{1_{\mathcal{A}} \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}$$

und

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}$$

die Identität auf \mathcal{A} sind. Eine kohärente Unteralgebra $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ heisst unitäre Unteralgebra von \mathcal{A} , wenn

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A}'$$

der Nullhomomorphismus ist.

Ist X wieder ein Objekt von \mathbf{An}/S , \mathcal{A} eine unitäre kohärente Algebra auf X , so betrachten wir den Funktor

$$\mathbf{W}_S(\mathcal{A}) : (\mathbf{An}/S)^0 \rightarrow \mathbf{Ens}.$$

Für $T \in \mathbf{Ob}(\mathbf{An}/S)$ ist $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})(T)$ die Menge aller \mathcal{F} aus $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})(T)$, die unitäre Unteralgebren von \mathcal{A}_T sind. Ist $f: T' \rightarrow T$ ein Morphismus über S und $\mathcal{F} \in \mathbf{W}_S(\mathcal{A})(T)$, so sei $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})(f)(\mathcal{F}) := \mathbf{W}'_S(\mathcal{A})(f)(\mathcal{F})$.

SATZ 2. $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})$ ist darstellbar.

BEWEIS. $\mathbf{W}'_S(\mathcal{A})$ werde durch $W' \rightarrow S$ dargestellt. Man hat eine universelle Unter algebra $\mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{A}_{W'}$. Offenbar wird dann $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})$ dargestellt durch $N(f) \hookrightarrow W'$, wenn f der Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{W' \times_S X} \xrightarrow{1_{\mathcal{A}_{W'}}} \mathcal{A}_{W'} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{W'}/\mathcal{H}'$$

ist; q.e.d..

Ist $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{An}/S)$ und \mathcal{A} eine kohärente (unitäre) Algebra auf X , so bezeichnen wir mit $\mathbf{W}'_S(\mathcal{A})$ bzw. $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})$ einen fest gewählten Raum über S , der den Funktor $\mathbf{W}'_S(\mathcal{A})$ bzw. $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})$ darstellt. Für einen Raum T über S gilt dann:

$$\mathbf{W}'_S(\mathcal{A}) \times_S T \cong \mathbf{W}'_T(\mathcal{A}_T), \quad \mathbf{W}_S(\mathcal{A}) \times_T T \cong \mathbf{W}_T(\mathcal{A}_T).$$

3. Komplexe Unterstrukturen.

Es sei X ein komplexer Raum und \mathcal{A} eine unitäre, kommutative und assoziative kohärente Algebra auf X . Der Strukturhomomorphismus $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$ sei injektiv, die Halme von \mathcal{A} seien lokale Ringe. Dann ist nach HOUZEL [2] auch (X, \mathcal{A}) ein komplexer Raum; \mathcal{A} heisst eine *Oberstruktur* von \mathcal{O}_X , \mathcal{O}_X wird *Unterstruktur* von \mathcal{A} (oder auf (X, \mathcal{A})) genannt. Ist dann $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine unitäre Unter algebra auf X , so ist auch (X, \mathcal{B}) ein komplexer Raum.

Nun sei $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{An}/S)$, \mathcal{A} eine Oberstruktur von \mathcal{O}_X , so dass $\mathcal{A}/\mathcal{O}_X$ ein platter \mathcal{O}_S -Modul ist. Für jedes $T \in \mathbf{Ob}(\mathbf{An}/S)$ gilt dann: \mathcal{A}_T ist eine Oberstruktur von $\mathcal{O}_{T \times_S X}$, jeder $\mathcal{B} \in \mathbf{W}_S(\mathcal{A})(T)$ ist eine Unterstruktur von \mathcal{A}_T , d. h. eine komplexe Struktur zwischen $\mathcal{O}_{T \times_S X}$ und \mathcal{A}_T . $\mathbf{W}_S(\mathcal{A})$ stellt somit den Funktor dar, der jedem $T \in \mathbf{Ob}(\mathbf{An}/S)$ zuordnet die Menge der komplexen Strukturen \mathcal{B} zwischen $\mathcal{O}_{X \times_S T}$ und \mathcal{A}_T , so dass der Quotient $\mathcal{A}_T/\mathcal{B}$ eigentlich und platt über T liegt.

Ist S ein einpunktiger, reduzierter Raum, $S = p_0$, X ein beliebiger Raum und \mathcal{A} eine Oberstruktur von \tilde{O}_X , so ist \mathcal{A}/\tilde{O}_X stets S -platt; man hat also als Corollar zu Satz 2 einen Satz von WIEGMANN [5]. Wir setzen in diesem Fall: $W(\tilde{O}_X, \mathcal{A}) := W_{p_0}(\mathcal{A})$.

SATZ 3. Ist \tilde{O}_X eine Unterstruktur von \tilde{O}_X , so ist der kanonische Morphismus $W(\tilde{O}_X, \mathcal{A}) \rightarrow W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})$ eine abgeschlossene Einbettung.

BEWEIS. Man betrachte die nach Satz 2 oder [5] existierende universelle Zwischenstruktur

$$\tilde{O}_{W(\tilde{O}_X, \mathcal{A}) \times \tilde{X}} \subset \mathcal{H}(\tilde{O}_X, \mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_{W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})},$$

$\tilde{X} := (X, \tilde{O}_X)$, und den Homomorphismus

$$f: \tilde{O}_{W(\tilde{O}_X, \mathcal{A}) \times X} \hookrightarrow \mathcal{A}_{W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})} / \mathcal{H}(\tilde{O}_X, \mathcal{A}).$$

Dann ist $W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})$ isomorph zu $N(f) \hookrightarrow W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})$, q.e.d..

4. Bestimmung des Tangentialraumes.

Wie DOUADY [1], 9.1, können wir allein aus den Eigenschaften des Funktors $W_S(\mathcal{A})$ die Tangentialräume des darstellenden Modulraumes $W_S(\mathcal{A})$ bestimmen, vgl. SCHLESSINGER [4]. Wir wollen uns dabei auf eine komplexe Oberstruktur \mathcal{A} von \tilde{O}_X und den absoluten Fall $S = p_0$ beschränken. $W := W(\tilde{O}_X, \mathcal{A})$ und $\mathcal{H} \in W_{p_0}(\mathcal{A})(W)$ mögen den Funktor $W := W_{p_0}(\mathcal{A}) : \mathbf{An}^0 \rightarrow \mathbf{Ens}$ repräsentieren. $p_1 \in \text{Ob}(\mathbf{An})$ sei der Doppelpunkt, das ist ein einpunktiger Raum mit der Algebra $\mathbb{C}[\varepsilon] := \mathbb{C}[T]/T^2$ der Dualzahlen als Struktur, $i: p_0 \rightarrow p_1$ sei die Reduktionsabbildung, definiert durch die Auswertung $\varepsilon: \mathbb{C}[\varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$. Wir bestimmen den Tangentialraum $T_{w_0}(W)$ von W in einem Punkt $w_0 \in W$. Für $\mathcal{B} := \mathcal{H}|_{\{w_0\} \times X}$, $\tilde{O}_X \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, gilt dann:

$$\begin{aligned} T_{w_0}(W) &= \{f \in \text{Hom}_{\mathbf{An}}(p_1, W) : \text{Bild } f = w_0\} \cong \\ &\cong \{\mathcal{S} \in W(p_1) : W(i)(\mathcal{S}) = \mathcal{B}\} =: W_{\mathcal{B}}(\mathbb{C}[\varepsilon]). \end{aligned}$$

Die Menge $W_{\mathcal{B}}(\mathbb{C}[\varepsilon])$ besteht also aus allen kohärenten Garben \mathcal{S} auf $p_1 \times X$ von Unterhalbgebren von $\mathbb{C}[\varepsilon] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ mit $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[\varepsilon]} \mathcal{S} = \mathcal{B}$, so dass $\mathbb{C}[\varepsilon] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} / \mathcal{S}$

ein platter $\mathbf{C}[\varepsilon]$ -Modul ist. $\mathbf{C}[\varepsilon] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{A}$ kann man identifizieren mit der Algebra

$\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{A}$, das ist der Vektorraum $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ mit der Multiplikation $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') := (\alpha\alpha', \alpha\beta' + \alpha'\beta)$. Insbesondere gilt $\mathbf{C}[\varepsilon] = \mathbf{C} + \varepsilon \mathbf{C}$. Ist $pr_i: \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ die Projektion $(f_1, f_2) \mapsto f_i$ (nur pr_1 ist ein Algebra-Homomorphismus, $pr_1 = \varepsilon \otimes \text{id}_{\mathcal{A}}$), so kann man für jedes $\mathcal{D} \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}[\varepsilon])$ die folgenden Eigenschaften beweisen:

- (i) $\mathcal{O}_X + \varepsilon \mathcal{O}_X \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{A}$.
- (ii) $pr_1(\mathcal{D}) = \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
- (iii) $\mathcal{D} \cap \text{Kern } pr_1 = 0 + \varepsilon \mathcal{B} \subset \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{A}$.

Jedes $\mathcal{D} \in \mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}[\varepsilon])$ definiert also einen Garbenmorphismus auf X , genauer auf (X, \mathcal{O}_X) :

$$\sigma(\mathcal{D}): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B}, \quad f \mapsto pr_2(\mathcal{D} \cap pr_1^{-1}(f)) \text{ mod } \mathcal{B}.$$

$\sigma(\mathcal{D})$ ist eine \mathcal{O}_X -lineare Derivation, $\sigma(\mathcal{D}) \in \text{Der}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B})$. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung

$$\sigma: \mathbf{W}_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}[\varepsilon]) \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B})$$

ein Isomorphismus ist.

$$\mathcal{D} = \{(f, g) \in \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{A} : f \in \mathcal{B} \text{ und } \sigma(\mathcal{D})(f) = g \text{ mod } \mathcal{B}\}.$$

Nach einem bekannten Satz von CARTAN-SERRE ist $\text{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B}) = \Gamma(X, \text{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B}))$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum, weil $\text{Supp}(\text{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B})) = \text{Supp}(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ kompakt ist;

$$\text{Der}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B}) \subset \text{Der}_{\mathbf{C}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}/\mathcal{B}).$$

LITERATUR

- [1] DOUADY, A.: *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.* Ann. Inst. Fourier **16**, 1-95 (1966).
- [2] HOUZEL, CH.: *Géométrie analytique locale.* Sémin. H. CARTAN, 1960-61, E.N.S., Paris.
- [3] POURCIN, G.: *Théorème de Douady au-dessus de S.* Annali Scuol. Norm. Sup. Pisa **23**, 451-459 (1969).
- [4] SCHLESSINGER, M.: *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **130**, 208-222 (1968).
- [5] WIEGMANN, K.-W.: *Der Modulraum der komplexen Zwischenstrukturen mit kompakten Trägern.* (Habilitationsschrift) München 1971.