Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

M. Fiorentini
A. T. Lascu

Un teorema sulle trasformazioni monoidali di spazi algebrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 26, nº 4 (1972), p. 871-888
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_4_871_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN TEOREMA SULLE TRASFORMAZIONI MONOIDALI DI SPAZI ALGEBRICI

M. FIORENTINI, A. T. LASCU

Introduzione.

Col criterio di rappresentabilità di M. Artin (cfr. [2]), s'introducono, come soluzione dei vari problemi di costruzione in Geometria Algebrica, gli *spazi algebrici* che costituiscono una categoria che contiene, come sottocategoria piena, quella degli *schemi*. In questo contesto una tappa naturale è il problema se un dato spazio algebrico è uno schema. Alcuni risultati, in questa direzione, sono stati già ottenuti e trovansi in [1], [3], [7].

Un modo di affrontare la questione è il seguente: sia $f\colon X' \longrightarrow X$ un morfismo di spazi algebrici, con X' (risp. X) uno schema. Trovare delle condizioni sul morfismo f affinché X (risp. X') sia uno schema. In base ad un lemma di Chow-Moisezon (cfr. [8], Ch. 4), per ogni spazio algebrico X di tipo finito sopra uno schema noetheriano S esiste una trasformazione monoidale $f\colon X' \longrightarrow X$, avente come centro un sottospazio algebrico chiuso Y di X, con $X \setminus Y$ denso in X e X' uno schema quasi-proiettivo su S.

In questa Nota (vedi, nel n. 2, teorema e corollario), si danno delle condizioni sufficienti affinché da una trasformazione monoidale $f\colon X' \longrightarrow X$, con X' uno schema e X uno spazio algebrico, si ricavi che X è uno schema.

n. 1. Alcune definizioni e lemmi preparatori.

DEFINIZIONE 1. Sia $Y \overset{i}{\subset\!\!\longrightarrow} X$ una immersione chiusa di spazi algebrici, X' uno spazio algebrico, $X' \xrightarrow{f} X$ un morfismo.

$X' \xrightarrow{f} X$ è una *trasformazione monoidale di centro* Y se

Pervenuto alla Redazione il 6 Settembre 1971.

1) $\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$ è invertibile, dove $\mathcal{J}$ è l'ideale di Y in $\mathcal{O}_X$

2) per ogni spazio algebrico S e per ogni morfismo $S \to X$ tale che $\mathcal{J}\mathcal{O}_S$ sia invertibile esiste un morfismo unico $S \to X'$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Osservazione 1. È sufficiente che la condizione 2) sia verificata per ogni S *schema* invece che per ogni S *spazio algebrico*. Infatti sia S uno spazio algebrico, $R \rightrightarrows S' \to S$ un diagramma esatto, con S' uno schema e R una relazione di equivalenza etale. Allora $J = \mathcal{J}\mathcal{O}_{S'}$ è invertibile, quindi esiste un morfismo unico $S' \to X'$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Bisogna verificare che il morfismo $S' \to X'$ rende uguali le due frecce $R \rightrightarrows S'$. Ma il diagramma

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[dr] & \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

è commutativo, quindi le due frecce sono uguali (in virtù dell'unicità in 2). Così si è verificata l'*esistenza* del morfismo $S \to X'$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

L'*unicità* è conseguenza dell'unicità del morfismo $S' \to X'$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

tenendo conto del fatto che $S' \to S$ è un epimorfismo.

LEMMA 1. Sia $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ una immersione chiusa di spazi algebrici e $U \to X$ un ricoprimento etale con U uno schema. Sia X' uno spazio algebrico e $X' \to X$ un morfismo.

$X' \to X$ è una trasformazionc monoidale di centro Y se e solo se $X' \times_X U \to U$ è una trasformazione monoidale di centro $Y \times_X U$.

DIMOSTRAZIONE. Il « solo se » è immediato. Siano $U' = X' \times_X U$, $U' \to U$ la proiezione, $V = Y \times_X U$ e $V \hookrightarrow U$ l'immersione chiusa $Y \times_X U \hookrightarrow U$. Sia $\mathcal{J}$ l'ideale di U in $\mathcal{O}_X$ e $S \to X$ un morfismo tale che $\mathcal{J}\mathcal{O}_S$ sia invertibile. Sia $S_U = U \times_X S$ e $S_U \to U$ la sua proiezione. Allora $(\mathcal{J}\mathcal{O}_S)\,\mathcal{O}_{S_U} = \mathcal{J}\mathcal{O}_{S_U}$ è invertibile, pertanto esiste una freccia unica $S_U \to U'$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} S_U \arrow[d] \arrow[dr] & \\ U' \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Ora $S_U \to S$ è un ricoprimento etale, quindi

$$R_U = S_U \times_S S_U \rightrightarrows S_U \to S$$

è esatto. Sia $S_U \to X'$ il morfismo composto $S_U \to U' \to X'$ dove $U' \to X'$ è la protezione $X' \times_X U \to X'$. Per mostrare che esiste un morfismo $S \to X'$ tale che

$$\begin{tikzcd} S_U \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[dl] \\ X' & \end{tikzcd} \tag{*}$$

sia commutativo occorre dimostrare che le due frecce $R_U \rightrightarrows S_U$ sono rese uguali componendole con $S_U \to X'$. Abbiamo $R_U = R \times_X S$, con $R = U \times_X U$, mentre la doppia freccia $R_U \rightrightarrows S_U$ è definita dalla proiezione $R_U \to S$ insieme alla doppia freccia $R_U \to R \rightrightarrows U$. D'altra parte

$$R \times_X X' \rightrightarrows U' \to X'$$

è esatto, quindi basta dimostrare che esiste un morfismo

$$R \times_X S \to R \times_X X'$$

tale che il diagramma

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} R \times_X S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & S_U \arrow[d] \\ R \times_X X' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U' \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Ora

$$\begin{tikzcd} R \times_X X' \arrow[r, "pr_i"] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\ R \arrow[r, "pr_i"'] & U \end{tikzcd} \qquad (i = 1, 2)$$

è un diagramma cartesiano, quindi $R \times_X X' \to R$ è una trasformazione monoidale di centro $\mathcal{J}\mathcal{O}_R$. E' evidente che $\mathcal{J}\mathcal{O}_{R \times_X S}$, è invertibile, giacchè $\mathcal{J}\mathcal{O}_S$ lo è. Pertanto esiste un morfismo $R \times_X S \to R \times_X X'$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} R \times_X S \arrow[rr] \arrow[dr] & & R \times_X X' \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Questo morfismo rende (**) commutativo perché nel diagramma

$$
\begin{tikzcd}
R \times_X S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & S_U \arrow[d] \\
R \times X' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U
\end{tikzcd}
$$

abbiamo che i diagrammi

$$
\begin{tikzcd}
R \times_X X' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \times_X S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & S_U \arrow[d] \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U
\end{tikzcd}
$$

sono commutativi, mentre $U' \to U$ è un monomorfismo, essendo una trasformazione monoidale. A questo punto, l'unicità di $S \to X'$ segue dall'unicità di $S_U \to X'$ che, a sua volta, è conseguenza dell'unicità del morfismo $S_U \to U'$ che rende commutativo il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
S_U \arrow[d] \arrow[dr] & \\
U' \arrow[r] & U
\end{tikzcd}
$$

OSSERVAZIONE 2. Lo stesso ragionamento sussiste anche nel caso in cui U non è più uno schema pur essendo un ricoprimento etale e ciò mostra che la proprietà di essere una trasformazione monoidale per un morfismo $X' \to X$ di spazi algebrici è una *proprietà di discesa* (nella topologia etale degli spazi algebrici).

DEFINIZIONE 2. Sia $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ una immersione chiusa di spazi algebrici. L'*algebra graduata* di i oppure l'*algebra graduata di Y rispetto a X* è per definizione

$$\mathcal{S} = i^* \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n \right)$$

dove $\mathcal{I}$ è l'ideale di Y in $\mathcal{O}_X$.

Osserviamo che dato il diagramma cartesiano

$$\begin{array}{ccc} Y' & \overset{j}{\hookrightarrow} & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

l'ideale di Y' in $\mathcal{O}_{X'}$ è $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{I}$. Inoltre il morfismo $\mathcal{O}_X \longrightarrow f_* \mathcal{O}_{X'}$ induce un morfismo $\mathcal{I}^n \longrightarrow f_* \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'}$ che definisce un morfismo di $\mathcal{O}_Y$-algebre $\mathcal{S} \xrightarrow{\omega} q_* \mathcal{S}'$, tale che ω_n sia il morfismo composto $i^* \mathcal{I}^n \longrightarrow i^* f_* \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow$ $\longrightarrow q_* j^* \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'}$, dove $i^* f_* \longrightarrow q_* j^*$ è il morfismo canonico.

DEFINIZIONE 3. Il morfismo di $\mathcal{O}_Y$-algebre dianzi definito è chiamato il *morfismo canonico associato a f.*

LEMMA 2. Sia X uno spazio algebrico, Y uno schema, $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ una immersione chiusa,

$$\begin{array}{ccc} Y' & \overset{j}{\hookrightarrow} & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

il diagramma cartesiano della trasformazione monoidale di centro Y. Sia $\mathcal{S}$ l'algebra graduata di Y rispetto a X, $\mathcal{S}'$ l'algebra graduata di Y' rispetto a X' e $\omega : \mathcal{S} \longrightarrow q_* \mathcal{S}'$ il morfismo canonico associato a f.

Sia $P = \operatorname{Proj}(\mathcal{S})$, $p : P \longrightarrow Y$ la proiezione canonica e $\alpha : \mathcal{S} \longrightarrow$ $\longrightarrow p_* \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_P(n) \right)$ il morfismo canonico (cfr. [5], II, 3).

Sotto dette ipotesi abbiamo che

1) ω definisce un Y-morfismo $r : Y' \longrightarrow P$ e un $\mathcal{O}_P$-morfismo $\gamma : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_P(n) \longrightarrow r_* (\mathcal{S}')$ tale che

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\omega"'] & & p_*\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_P(n)\right) \arrow[dll, "p_*(\gamma)"] \\
q_*\mathcal{S}' & &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

2) r e γ sono degli isomorfismi, cioè Y' s'identifica con Proj ($\mathcal{S}$), mentre ω s'identifica con l'omomorfismo α.

DIMOSTRAZIONE. Quando X è uno schema il lemma è noto e segue facilmente da [5], II, (8.1.7), (3.5.3), (3.5.4).

Sia $U \to X$ un ricoprimento etale con U uno schema affine. Per cambiamento della base mediante $U \to X$ troviamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
Y'_U \arrow[rrr, "j_U"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddd, "q_U"'] & & & X'_U \arrow[dl, "g_U"'] \arrow[ddd, "f_U"] \\
& Y' \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "q"] & X' \arrow[d, "f"] & \\
& Y \arrow[r, hook, "i"] & X & \\
Y_U \arrow[rrr, hook, "i_U"] \arrow[ur, "h"] & & & U \arrow[ul, "h_U"']
\end{tikzcd}$$

dove i due quadrati concentrici e i quattro trapezi periferici sono tutti cartesiani. Segue che $X'_U \to U$ è una transformazione monoidale di U di centro Y_U, l'algebra graduata $\mathcal{S}_U$ di $Y_U \subset U$ è $\mathcal{S}_U = h^*(\mathcal{S})$, l'algebra graduata $\mathcal{S}'_U$ di $Y'_U \subset X'_U$ è $\mathcal{S}'_U = g^*(\mathcal{S}')$ e q è un ricoprimento etale. Inoltre, se $\omega : \mathcal{S} \to q_*\mathcal{S}'$ è il morfismo canonico associato a f, allora il morfismo composto

$$\mathcal{S}_U \xrightarrow{h^*(\omega)} h^* g_* \mathcal{S}' \to q_{U_*} g^*(\mathcal{S}') = q_{U_*}(\mathcal{S}')$$

è proprio il morfismo canonico ω_U associato a h_U. Ora per concludere basta dimostrare il seguente

LEMMA 3. Si consideri il seguente diagramma cartesiano di schemi

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q_1"'] & Y' \arrow[d, "q"] \\ Y_1 \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

con h etale suriettivo. Supponiamo che esistano una $\mathcal{O}_Y$ algebra graduata quasi-coerente $\mathcal{S}$, una $\mathcal{O}_{Y'}$-algebra graduata quasi-coerente $\mathcal{S}'$ ed un morfismo $\mathcal{S} \xrightarrow{\omega} q_* \mathcal{S}'$, tale che l'omomorfismo composto

$$\omega_1 : h^* (\mathcal{S}) \xrightarrow{h(\omega)} h^* q_* \mathcal{S}' \longrightarrow q_{1*} g^* \mathcal{S}'$$

soddisfi le seguenti condizioni

1) $\mathcal{S}_1 = g^* (\mathcal{S}')$ insieme a ω_1 definisce un Y_1-morfismo $r_1 : Y_1' \longrightarrow P_1 = \operatorname{Proj}(\mathcal{S}_1)$, con $\mathcal{S}_1 = h^* (\mathcal{S})$, ed un morfismo $\gamma_1 = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{P_1}(n) \longrightarrow r_{1*} \mathcal{S}_1$, tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_1 = h^* (\mathcal{S}) \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\omega_1"'] & & p'_* \left(\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{P_1}(n) \right) \arrow[dl, "p'_* (\gamma_1)"] \\ & q_{1*} (\mathcal{S}') & \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

2) r_1 e γ_1 sono degli omomorfismi.

Sotto queste ipotesi (S, ω) definisce un Y-morfismo $r : Y' \longrightarrow P$ ed un $\mathcal{O}_P$-morfismo $r : \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_P(n) \longrightarrow r_* (\mathcal{S}')$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & p_* \left(\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_P(n) \right) \arrow[dl, "p_* (\gamma)"] \\ q_* (\mathcal{S}') & \end{tikzcd}$$

sia commutativo; inoltre r e γ sono isomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. Le proprietà a, c (vedi [4]), per $(\mathcal{S}, \omega)$ sono conseguenza delle proprietà rispettive per $(g^*(\mathcal{S}'), \omega^*)$ dato che g è suriettivo. La proprietà b (vedi [4]), per $(\mathcal{S}, \omega)$ si ricava dalla proprietà b per $(g^*(\mathcal{S}'), \omega^*)$ per discesa fedelmente piatta. Pertanto sussistono i citati morfismi r e γ ([4]). Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Y'_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r_1"'] & Y' \arrow[d, "r"] \\ P_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "p_1"'] & P \arrow[d, "p"] \\ Y_1 \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

dove il quadrato inferiore e il quadrato totale sono cartesiani. Ne segue che il quadrato superiore è anch'esso cartesiano. Ora, poiché r_1 è un isomorfismo, mentre $P_1 \to P$ è un morfismo etale suriettivo, per discesa r è un isomorfismo. D'altra parte $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{P_1}(n) = h_1^*\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_P(n)\right)$ ed il morfismo γ_1 è proprio il morfismo composto

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{P_1}(n) \xrightarrow{h_1^*(\gamma)} h_1^* r_*(\mathcal{S}') \to r_{1*} j^*(\mathcal{S}') = r_{1*}(\mathcal{S}'_1).$$

Ora, r e r_1 essendo degli isomorfismi, il morfismo canonico $h_1^* r_* \to r_{1*} g^*$ è un isomorfismo. Quindi $h_1^*(\gamma)$ è un isomorfismo e ciò mostra che anche γ lo è per discesa fedelmente piatta.

LEMMA 4. Sia $f: X' \to X$ una trasformazione monoidale di spazi algebrici, con X normale. Allora f è un epimorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $V \to X$ un ricoprimento etale con V uno schema. Allora $V' = V \times_X X' \to V$ è una trasformazione monoidale e V è normale. Poiché $V \to X$ è un epimorfismo, il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d] & V' \arrow[l] \arrow[d] \\ X & V \arrow[l] \end{tikzcd}$$

mostra che per dimostrare l'asserto basta far vedere che $V' \to V$ è un epimorfismo. Possiamo quindi supporre che X è uno schema. Ma in tal caso f è suriettivo e $f_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$. Ciò mostra che f è un epimorfismo di spazi anellati.

n. 2. Un teorema sulle trasformazioni monoidali di spazi algebrici.

TEOREMA. Sia X uno spazio di tipo finito sopra un campo algebrico separato, normale, localmente di tipo finito sopra uno schema S, Y uno schema, $i: Y \hookrightarrow X$ una immersione chiusa,

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

il diagramma cartesiano della trasformazione monoidale di centro Y. Sia $\mathcal{J}$ l'ideale di Y in $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{S}$ l'algebra graduata di Y in X. Supponiamo $i^*\mathcal{J}$ localmente libero, $\mathcal{S}$ isomorfa con l'algebra simmetrica di $i^*\mathcal{J}$.

Siano $\mathcal{J}' = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X'} f_0 : X'_{\text{top}} \to X_{\text{top}}$ l'applicazione continua definita da $X' \to X$, $\mathcal{D}_n = R^1 f_{0*} \mathcal{J}'^n$ il fascio di gruppi abeliani sopra X_{top} definito dal prefascio $U \to H^1(f^{-1}(U), \mathcal{J}'^n)$ per ogni aperto U di X_{top}. Supponiamo che $\mathcal{D}_n = 0$ per $n >> 0$. Allora, se X' è uno schema, X è uno schema.

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare che X ha un ricoprimento $\{U_\alpha\} \to X$ con U_α uno schema e $U_\alpha \to X$ una immersione aperta. Siccome $X' \setminus Y' \approx$ $\approx X \setminus Y$, basta mostrare che per ogni $y \in Y$ esiste un intorno affine cioè uno schema U e una immersione aperta $U \hookrightarrow X$ tale che $y \in U_{\text{top}}$. Il problema è locale rispetto a S quindi possiamo supporre S affine, $S = \operatorname{Spec} R$. Inoltre sostituendo X con un opportuno aperto possiamo supporre Y affine, cioè $Y = \operatorname{Spec} B$ con B una R-algebra di tipo finito $B = R[b_1, \dots, b_k]$ e $i\mathcal{J} = \widetilde{L}$, con L un B modulo libero di rango r, $L = \sum_{1 \le i \le r} Bt_i$. Ne segue che l'algebra graduata $\mathcal{S}$ di Y in X è $\mathcal{S} = \widetilde{S}$, con $S = B[t_1, \dots, t_r]$ l'algebra di polinomi sopra B nelle indeterminate $t_1, \dots, t_r$ e $L = S_1$. Quindi Y' si identifica con $\operatorname{Proj}(\mathcal{S})$, q con la proiezione canonica, $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(n)$ con l'algebra graduata $\mathcal{S}'$ di Y' rispetto a X', $\mathcal{S}' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} j^* \mathcal{J}'^n$ (con $\mathcal{J}' = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$) e l'omomorfismo canonico $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ con l'omomorfismo $\tilde{\alpha}: \mathcal{S} \to q_*\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(n)\right)$, (vedi il lemma 2). Ora $\tilde{\alpha}$ è definito dall'omomorfismo $\alpha: \mathcal{S} \to \Gamma_a\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(n)\right)$ che in questo caso è un isomorfismo (vedi [5], III, 2.1.12), quindi α è un isomorfismo.

Mostriamo ora che $\mathcal{D}_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. Abbiamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{J}'^{n+1} \to \mathcal{J}'^{n} \to j_* \mathcal{O}(n) \to 0 \quad (n \geq 0),$$

da cui

$$0 \to f_0\mathcal{J}'^{n+1} \to f_0\mathcal{J}'^{n} \to f_{0*}j\,\mathcal{O}(n) \to \mathcal{D}_{n+1} \to \mathcal{D}_n \to R^1 f_0 j_* \mathcal{O}(n).$$

Ora $f_*j_*\mathcal{O}(n) = i_*q_*\mathcal{O}(n) = i_*\mathcal{S}_n$ perché $\tilde{\alpha}$ è un isomorfismo, $R^1 f_{0*} j^* \mathcal{O}(n) = R^1 i_{0*} q_* \mathcal{O}(n) = i_{0*} R^1 q_* \mathcal{O}(n)$, pertanto $R^1 q_* \mathcal{O}(n) = 0$ per $n \geq 0$, (vedi [5], III, 2.1.15). Supponiamo che $\mathcal{D}_{n+1} = 0$. Allora dalla successione esatta

$$\mathcal{D}_{n+1} \to \mathcal{D}_n \to R^1 f_{0*} j_* \mathcal{O}(n)$$

si ricava $\mathcal{D}_n = 0$. Ne segue che l'ipotesi $\mathcal{D}_n = 0$ per $n >> 0$ implica $\mathcal{D}_n = 0$, per ogni $n \geq 0$.

Possiamo adesso dimostrare che esiste un intorno $Y_y = \mathrm{Spec}(B_b)$ di y in Y con $b \in B$, un aperto V di X_{top} tale che $V \cap Y = Y_y$ ed elementi a_i, $a \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{X'})$, $i = 1, \ldots, k$, tali che $a_i \mapsto b_i/Y_x$, $a \mapsto b/Y_y$ mediante l'omomorfismo canonico $\mathcal{O}_{X'} \to j_*\mathcal{O}_{Y'}$. Qui abbiamo tenuto conto del fatto che $\Gamma(Y_y, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(q^{-1}(Y_y), \mathcal{O}_{Y'})$ perché $\tilde{\alpha}$ è un isomorfismo. Ne risulterà, sostituendo X con V, X' con $f^{-1}(V)$, e quindi Y con Y_y, Y' con $q^{-1}(Y_y)$, $(b_1, \ldots, b_k, b)$, che possiamo supporre ogni elemento b_i proveniente da una sezione $a_i \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ mediante $\mathcal{O}_{X'} \to j_*\mathcal{O}_{Y'}$. Abbiamo che $f_{0*}\mathcal{O}_{X'} \to f_{0*}j_*\mathcal{O}_{Y'}$ è suriettivo perché $\mathcal{D}_1 = 0$. D'altra parte $f_{0*}j_* = i_{0*}q_*$ e $q_*\mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{O}_Y$, quindi $f_{0*}j_*\mathcal{O}_{Y'} = i_{0*}\mathcal{O}_Y$. Ne segue che esiste un intorno U di y in X_{top} e $a_i \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$ tale che $a_i \mapsto b_i / (Y \cap U)$ per $i = 1, \ldots, r$. Sia $Y_y = \mathrm{Spec}\, B_b \subset U$ un intorno affine di y in Y con $b = P(b_1, \ldots, b_r)$ dove P è un polinomio con coefficienti in R. Possiamo supporre $Y_y = U \cap Y$. Allora $a = P(a_1, \ldots, a_r) \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$ e $(f^{-1}(U))_a \cap Y' = q^{-1}(Y_y)$ perché $a \mapsto b$ mediante $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma(q^{-1}(Y_y, Y)$.

Sia $F' = f^{-1}(U) \setminus (f^{-1}(U)_a)$; $F = f(F')$ è chiuso perché F' è chiuso e f è proprio. Abbiamo $F \cap Y = Y \setminus Y_y$ cioè $(X \setminus F) \cap Y = Y_y$, quindi basta prendere $V = X \setminus F$. Pertanto possiamo supporre che esistano elementi $a_i \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ tali che $a_i \mapsto b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, mediante l'omomorfismo $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \to (Y', \mathcal{O}_{Y'}) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Ora $f_{0*}\mathcal{J} \to f_{0*}j_*\mathcal{O}(1)$ è suriettivo perché $\mathcal{D}_2 = 0$; $f_{0*}j_*\mathcal{O}(1) = i_{0*}i^*\mathcal{J}$ perché $f_{0*}j_*\mathcal{O}(1) = i_{0*}q\,\mathcal{O}(1)$, e $q_*\mathcal{O}(1) = i^*\mathcal{J}$. Quindi esiste un aperto U di X con $y \in U$ e $u_i \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{J}')$, $i = 1, \dots, r$, tali che $u_i \mapsto t_i$ mediante l'omomorfismo

$$\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{J}') \to \Gamma(f^{-1}(V \cap Y), \mathcal{O}(1)), \quad \text{con} \quad \mathcal{O}(1) = j^*\mathcal{J}'.$$

Possiamo supporre $U \cap Y = \operatorname{Spec} B_b$, dove $b = P(b_1, \dots, b_k)$ con P polinomio con coefficienti in R. Allora $a = P(a_1, \dots, a_k) \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ e possiamo sostituire X con $X \setminus F$, $F = f(X' \setminus X'_a)$ e X' con $f^{-1}(X \setminus F)$. Si vede così che alle ipotesi precedenti possiamo aggiungere il fatto che esistono elementi $u_i \in \Gamma(X', \mathcal{J}')$, $i = 1, \dots, r$, tali che $u_i \mapsto t_i$ mediante l'omomorfismo $\Gamma(X', \mathcal{J}') \to \Gamma(Y, \mathcal{O}(1))$.

Osserviamo ora che $\sum_{1 \le i \le r} t_i \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{O}(1) = j^*\mathcal{J}'$, perché l'immagine canonica di $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{O}(1)$ genera $\mathcal{O}(1)$. Dunque, per ogni $y' \in Y'$, si ha $\mathcal{J}'_{y'} \subset \sum_{1 \le i \le r} u_i \mathcal{O}_{X', y'} + \mathcal{J}'^2_{y'}$ ciò che implica, per il lemma di Nakayama, che $\mathcal{J}'_{y'} = \sum_{1 \le i \le r} u_i \mathcal{O}_{X', y'}$. Ne segue che $\mathcal{J}'_{x'} = \sum_{1 \le i \le r} u_i \mathcal{O}_{X', x'}$ per x' contenuto in un intorno U' di Y' in X'. Quindi, sostituendo X con $X \setminus F$, $F = f(X' \setminus U')$ e X' con $f^{-1}(X \setminus F)$ possiamo supporre $\mathcal{J}' = \sum_{1 \le i \le r} u_i \mathcal{O}_{X'}$.

Sia C la chiusura integrale in $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ di $R[a, u]$, con $a = (a_1, \dots, a_k)$, $u = (u_1, \dots, u_r)$ e sia $X' \to Z = \operatorname{Spec} C$ il morfismo definito dall'applicazione d'inclusione $C \to \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$. Il morfismo composto $Y' \to X' \to Z$ si fattorizza in $Y' \xrightarrow{q} Y \to Z$, dove $Y \to Z$ è un'immersione chiusa. Infatti $Y' \hookrightarrow X' \to Z$ è definito dall'omomorfismo composto $C \hookrightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$.

Ora $\Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'}) = (Y, \mathcal{O}_Y)$ e ciò mostra che $Y' \hookrightarrow X' \to Z$ si fattorizza tramite q

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

dove $Y \to Z$ è definito dall'omomorfismo composto

$$C \hookrightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'}) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y).$$

D'altro canto $R[a, u] \subset C$ e l'omomorfismo composto

$$R[a, u] \hookrightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'}) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$$

è suriettivo, perché $a_i \mapsto b_i$ $(i = 1, \dots, k)$ e $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = R[b]$, $b = (b_1, \dots, b_k)$. Quindi $C \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ è suriettivo, cioè $Y \to Z$ è una immersione chiusa. Mostriamo che $\mathcal{P}\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{J}'$, dove $\mathcal{P} = \ker(C \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y))$. Infatti $\mathcal{P} \subset \ker(\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})) \to \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$, pertanto $\mathcal{P}\mathcal{O}_{X'} \subset \mathcal{J}'$. D'altra parte $\sum_{1 \leq i \leq r} u_i \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{J}'$ e $u_i \in \mathcal{P}$, quindi $\mathcal{J}' \subset \mathcal{P}\mathcal{O}_{X'}$. Sia ora

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ Y \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

la trasformazione monoidale di centro Y. Il fatto che $\mathcal{P}\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{J}'$ mostra $\mathcal{P}\mathcal{O}_{X'}$ è invertibile, quindi, per la proprietà universale di $M \to Z$ esiste un morfismo $X' \to M$ tale che

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr] \arrow[dr] & & M \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

sia commutativo. L'immagine inversa di N mediante $X' \to M$ è Y', cioè si ha un diagramma cartesiano

$$(***) \qquad \begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook, dash] \arrow[d] & X' \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, hook, dash] & M \end{tikzcd}$$

Ora $M = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n\right)$ e il morfismo $X' \to M$ è definito dall'omomorfismo

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X', \mathcal{J}'^n)$$

dove $\mathcal{P}^n \to \Gamma(X', \mathcal{O}'^n)$ è fornito dall'applicazione d'inclusione $\mathcal{P}^n \subset$——$\subset$——$\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$. Pertanto, $N = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n/\mathcal{P}^{n+1}\right)$ e il morfismo $Y' \to N$ è definito dall'omomorfismo

$$T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n/\mathcal{P}^{n+1} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(Y', \mathcal{O}(n)) = S$$

dove $\mathcal{P}^n/\mathcal{P}^{n+1} \to \Gamma(Y', \bar{O}(n))$ è dato dall'omomorfismo composto

$$\mathcal{P}^n \to \Gamma(X', \mathcal{J}'^n) \to \Gamma(Y', \bar{O}(n)).$$

Abbiamo che $S = B[t_1, \dots, t_r]$ e $t_1, \dots, t_r$ sono contenuti nell'immagine di $\mathcal{P} \to S_1$, perché $u_i \in \mathcal{P}$ e $u_i \mapsto t_i$ $(i = 1, \dots, r)$. Si ha pertanto che $T \to S$ è un omomorfismo suriettivo e ciò mostra che $Y' \to N$ è iniettivo, cioè $X' \to M$ è iniettivo lungo Y', perché il diagramma (***) è cartesiano. Secondo lo Z. M. T. (il teorema principale di Zariski), esiste un aperto U' di X' tale che $Y' \subset U'$, in guisa che $U' \to X' \to M$ si fattorizza mediante

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[d] \\ U' \arrow[ur, hook] \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

dove M' è la normalizzata di M e $U' \hookrightarrow M'$ è un'immersione aperta.

Sia φ il morfismo composto $M' \to M \to Z$. φ è birazionale suriettivo e Z è normale quindi $\varphi_* \bar{O}_{M'} = \bar{O}_Z$. Ne segue che le fibre di φ sono connesse, secondo un teorema di connessione di Zariski-Grothendieck (vedi [5], III, 4.3.2.). Ora $Y' \subset U' \subset M'$ con U' aperto. D'altra parte $q^{-1}(Y) = Y'$ e ciò mostra che $Y' = \varphi^{-1}(Y) \cap U'$. Sia Y_0 una componente connessa. Ora $q^{-1}(Y_0)$ è un sottoschema chiuso non vuoto connesso di Y', perché $q_* \bar{O}_{Y'} = \bar{O}_Y$ (vedi [5], III, 4.3.2). Quindi $q^{-1}(Y_0)$ è un sottoschema chiuso non vuoto connesso di U'. Ne segue che $q^{-1}(Y_0)$ è una componente connessa di $\varphi^{-1}(Y_0)$, quindi $q^{-1}(Y_0) = \varphi^{-1}(Y_0)$, $\varphi^{-1}(Y_0)$ essendo connesso, perché φ è a fibre connesse. Ciò implica $\varphi^{-1}(Y) = Y'$. Ne segue che l'immagine inversa di N_{top} in M'_{top} è proprio Y'_{top}. D'altra parte $M \setminus N \approx Z \setminus Y$ e quindi è normale. Pertanto $M' \setminus Y' \approx M \setminus N$; ciò mostra che $M' \to M$ è biiettivo e abbiamo il diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\ N \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd}$$

dove $Y' \to N$ è un immersione chiusa. Ne segue, per il lemma di Nakayama, che $M' = M$. Quindi l'immagine V di U' in M è un aperto isomorfo a U'. Abbiamo $N \subset V$ quindi $g(V') = U$ è un aperto di Z tale che $Y \subset U$ e

$g^{-1}(U) = V$. Similmente, $f(U') = X_0$ è un aperto di X tale che $Y \subset X$ e $f^{-1}(X_0) = U'$. Possiamo restringere X' a U' quindi X a X_0, inoltre M a V quindi Z a U. Quest'ultimo si può supporre affine. Con le precedenti restrizioni possiamo supporre che nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Y & Y' \arrow[l, "q"'] \arrow[r, "q"] & Y \\ Z \arrow[u, hookleftarrow, "k"'] & X' \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] \arrow[u, hookleftarrow, "j"'] & X \arrow[u, hookleftarrow, "i"'] \end{tikzcd}$$

ciascuno dei due quadrati rappresenta una trasformazione monoidale. Ne segue che Z_{top} coincide con lo spazio quoziente di X'_{top} mediante la relazione di equivalenza definita da $q_0: Y'_{\text{top}} \to Y_{\text{top}}$. Pertanto $Z_{\text{top}} = X_{\text{top}}$ mentre f e g inducono la stessa applicazione $X'_{\text{top}} \to Z_{\text{top}}$. Quindi $R^1 g_* \mathcal{J}^n \mathcal{O}_{X'} = 0$, perché $\mathcal{D}_n = 0$, per $n \geq 0$. Abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{P}^{n+1}\mathcal{O}_Z/\mathcal{P}^{n+2}\mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_Z/\mathcal{P}^{n+2}\mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_Z/\mathcal{P}^{n+1}\mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & q_*(\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+2}\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r] & q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+2}\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r] & q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con le righe esatte. A questo punto basta far vedere che il morfismo precedente $\mathcal{O}_Z/\mathcal{P}^{n+1}\mathcal{O}_Z \to q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'})$ è un isomorfismo. Infatti abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{J}^{n+1}/\mathcal{J}^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & q_*(\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+2}\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r] & q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+2}\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r] & q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con le righe esatte. Osserviamo che

$$\alpha_n: \mathcal{J}^{n+1}/\mathcal{J}^{n+2} \to q_*(\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+2}\mathcal{O}_{X'})$$

è un isomorfismo, quindi

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+1} \xrightarrow{\sim} q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}) \quad \text{implica} \quad \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+2} \xrightarrow{\sim} q_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{n+2}).$$

Ma $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \to q_*\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ è proprio α_0 che è un isomorfismo. Per induzione si ricava che

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1} \to q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'})$$

è un isomorfismo per ogni $n \geq 0$. Abbiamo allora $\mathcal{O}_Z/\mathcal{P}^{n+1}\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{n+1}$, quindi un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[d, hook] & Y'_n \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y_n \arrow[d, hook] \\
Z & X' \arrow[l] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

dove $Y_n \subset Z$ è il sottoschema chiuso di Z d'ideale $\mathcal{P}^{n+1}$ ed i due quadrati sono delle trasformazioni monoidali. Il diagramma precedente rappresenta una coppia di modificazioni che inducono la stessa modificazione formale nel senso di M. Artin [3]), cioè esiste un morfismo $\mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, hook] & Y' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\
\mathscr{Z} & \mathscr{X}' \arrow[l] \arrow[r] & \mathscr{X} \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Secondo [3], una modificazione di spazi algebrici è univocamente determinata dalla modificazione formale indotta quindi esiste un isomorfismo $X \to Z$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& X' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Z & & X \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

cioè X è uno schema. Resta dunque soltanto da dimostrare il precedente asserto.

Ora abbiamo la successione esatta

$$0 \to g_*(\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}) \to g_*\mathcal{O}_{X'} \to g_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'}) \to 0$$

di fasci coerenti sopra $\mathcal{O}_Z$ (vedi [5], III, 3.2.1) dove $g_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_Z$ perché g è suriettivo e Z normale. Quindi $\mathcal{O}_Z/\mathcal{P}^{n+1}\mathcal{O}_Z \to q_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'})$ è definito dall'omomorfismo $C/\mathcal{P}^{n+1} \to C/\Gamma(X', \mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'})$ indotto dall'inclusione $\mathcal{P}^{n+1} \subset \subset \Gamma(X', \mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'})$, perché Z è affine. Quindi bisogna mostrare che $\mathcal{P}^n = \Gamma(X', \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'})$ per ogni $n \geq 1$. Ora

$$\Gamma(Y', \mathcal{O}(n)) = \Gamma(X', \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'})/\Gamma(X', \mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{X'})$$

perché la successione

$$0 \to \mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'} \to j_* \mathcal{O}(n) \to 0$$

è esatta, $R^1 g_* \mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_{X'} = 0$, g_* trasforma fasci coerenti in fasci coerenti e Z è affine.

In definitiva, abbiamo

1) $\mathcal{P}^n \subset \Gamma(X', \mathcal{I}^n \mathcal{O}(n))$

2) $\Gamma(X', \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{P}^n + \Gamma(X', \mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_{X'})$

per ogni $n \geq 1$, giacché $\mathcal{P}^n/\mathcal{P}^{n+1} \to \Gamma(Y', \mathcal{O}(n))$ è suriettivo.

Per concludere la dimostrazione basta sapere che $\mathcal{P}^n = (\Gamma(X', \mathcal{I}^n \mathcal{O}_{X'})$ per $n >> 0$ e ciò è vero in base a [5], III, 2.3.1.

COROLLARIO. Sia X uno spazio algebrico separato, normale, localmente di tipo finito sopra uno schema S di tipo finito sopra un campo, sia Y uno schema, $i: Y \hookrightarrow X$ una immersione chiusa,

$$\begin{array}{ccc} Y' & \overset{j}{\hookrightarrow} & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \underset{i}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

il diagramma cartesiano della trasformazione monoidale di centro Y. Supponiamo che Y sia non singolare e X sia non singolare nei punti di Y. Siano $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_X$, $f: X'_{\text{top}} \to X_{\text{top}}$ l'applicazione continua definita da $X' \to X$ (con X' schema) e $\mathcal{D}_n$ il fascio di gruppi abeliani sopra X_{top} definito dal prefascio $U \mapsto H^1(f^{-1}(U), \mathcal{I}'^n)$ per ogni aperto U di X_{top}. Supponiamo che $\mathcal{D}_n = 0$, per $n >> 0$. Allora, se X' è uno schema, X è uno schema.