Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

François Rouvière

Sur la résolubilité locale des opérateurs bi-invariants

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 3, nº 2 (1976), p. 231-244
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1976_4_3_2_231_0>

Sur la résolubilité locale des opérateurs bi-invariants.

FRANÇOIS ROUVIÈRE (*)

dédié à Hans Lewy

Soit P un opérateur différentiel linéaire sur une variété G. P est dit *localement résoluble sur* G si tout point de G admet un voisinage ouvert U tel que $P\mathcal{D}'(U) \supset \mathcal{D}(U)$ (où $\mathcal{D}'(U)$ est le dual de l'espace $\mathcal{D}(U)$ des fonctions C^∞ à support compact dans U). Si G est un groupe de Lie, et P invariant à gauche sur G, il suffit de rechercher s'il y a résolubilité locale au voisinage de l'élément neutre. Divers résultats ont été publiés sur ce problème (cf. [1] [2] [3] [7]): la réponse est en général négative pour des opérateurs invariants à gauche quelconques (Cerezo et Rouvière [1]), mais elle est affirmative pour tous les opérateurs *bi-invariants* (non nuls) sur un groupe de Lie nilpotent (Raïs [7]), semi-simple (Helgason [3]), et résoluble (Duflo et Raïs [2]). Nous renvoyons à [2] § 6 pour un examen détaillé de tous ces résultats.

Le résultat essentiel de cet article s'énonce ainsi (théorème II): pour que tout opérateur bi-invariant (non nul) soit localement résoluble sur un groupe de Lie, il suffit que l'on ait la même propriété pour le groupe dérivé. L'application aux groupes résolubles est immédiate, et redonne le résultat mentionné ci-dessus; on obtient aussi une solution élémentaire sur tout ouvert relativement compact, dans le cas où G est résoluble simplement connexe (corollaire du théorème II) (*). Nous donnons enfin un résultat d'existence de solutions dans L^2 (proposition 3).

La méthode de démonstration est tout-à-fait indépendante de l'analyse harmonique sur le groupe considéré, outil essentiel dans [2] et [7]. Elle consiste à généraliser à un groupe de Lie l'inégalité de Hörmander ([5] § 2.3) des opérateurs à coefficients constants sur $\boldsymbol{R}^n$: pour tout opérateur P bi-invariant sur un groupe de Lie G, on peut construire un opérateur Q bi-inva-

(*) I.M.S.P. Mathématiques, Parc Valrose - 06034 Nice, Cedex.

(*) C'est M. Duflo qui a attiré mon attention sur ce point, je l'en remercie.

Pervenuto alla Redazione il 17 Ottobre 1975.

riant sur le groupe dérivé DG, $Q \neq 0$ si $P \neq 0$, tel que l'on ait l'inégalité entre normes L^2

$$\|Qu\| \leq \|Pu\| \, .$$

pour u C^∞ sur G à support suffisamment petit (théorème I). La construction de Q se fait par abaissement progressif du degré de P au moyen de dérivations de l'algèbre enveloppante (proposition 1).

1. – Notations.

$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, et $\boldsymbol{N}$ désignent l'ensemble des nombres réels, complexes, et entiers ≥ 0 respectivement.

Dans tout cet article, nous ne considérons que des groupes et algèbres de Lie *réels*.

Si G est un groupe de Lie, nous notons e, $\mathfrak{g}$, exp, respectivement, l'élément neutre, l'algèbre de Lie, et l'application exponentielle de G. Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante *complexifiée* de $\mathfrak{g}$, de centre $Z(\mathfrak{g})$; les éléments de $U(\mathfrak{g})$ sont identifiés à des opérateurs différentiels invariants *à gauche* sur G; pour $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(G)$, $g \in G$

$$Xf(g) = \frac{d}{dt} f(g \cdot \exp tX)_{t=0} \, ,$$

et ceux de $Z(\mathfrak{g})$ aux opérateurs bi-invariants sur G.

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, nous identifions $U(\mathfrak{h})$ à une sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$; on a $U(\mathfrak{h}) \cap Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{h}) \cap Z(\mathfrak{g})$. On note $D\mathfrak{g}$ l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$, i.e. l'espace vectoriel engendré par les $[X, Y]$, X, $Y \in \mathfrak{g}$, et DG le sous-groupe connexe de G d'algèbre $D\mathfrak{g}$.

Si U est un ouvert de G, l'espace $\mathfrak{D}(U)$ des fonctions C^∞ à support compact dans U sera muni de sa topologie habituelle de limite inductive; soit $\mathfrak{D}'(U)$ son dual, et $\langle \, , \, \rangle$ le crochet de dualité. On note δ, ou δ_G pour préciser, la mesure de Dirac à l'élément neutre de G. Prenons des mesures de Haar à gauche $d_l g$, et à droite, $d_r g$, de G liées par le relation $d_l g = \Delta(g)\, d_r g$, où Δ est la fonction modulaire. Notons $(\, , \,)$ le produit scalaire de $L^2(U, d_r g)$, $\| \; \|$, ou $\| \; \|_U$ pour préciser, sa norme. Nous prendrons ici $f \mapsto f \cdot d_r g$ pour injection de $\mathfrak{D}(U)$ dans $\mathfrak{D}'(U)$.

Soit $\mathrm{Diff}(U)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients C^∞ sur U. Pour $P \in \mathrm{Diff}(U)$ on définit l'adjoint P^* et le transposé ${}^tP$ par

$$(P^* u, v) = (u, Pv) \qquad \langle {}^tPT, u \rangle = \langle T, Pu \rangle \, ,$$

u, $v \in \mathfrak{D}(U)$, $T \in \mathfrak{D}'(U)$. $U(\mathfrak{g})$ et $Z(\mathfrak{g})$ sont stables par $*$ et ^{t} car $X^* = {}^tX = -X$ pour $X \in \mathfrak{g}$ (c'est pourquoi nous avons pris une mesure de Haar à droite), et $[P^*, X]^* = {}^t[{}^tP, X] = [P, X]$ pour $P \in U(\mathfrak{g})$.

Enfin nous utiliserons des espaces de Sobolev définis comme suit: si U est un ouvert de G, m un entier $\geqslant 0$, et $X_1, \ldots, X_n$ une base de $\mathfrak{g}$, $H^m(U)$ est l'espace des u tels que $X^\alpha u \in L^2(U, d_r g)$ pour $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$; $H^m(U)$ sera muni de la norme

$$\|u\|_{m,U} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|X^\alpha u\|_U^2\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

$H_0^m(U)$ est la fermeture de $\mathfrak{D}(U)$ dans $H^m(U)$, et $H^{-m}(U) \subset \mathfrak{D}'(U)$ le dual de $H_0^m(U)$, muni de la norme duale.

2. – Une généralisation de l'inégalité de Hörmander.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $X_1, \ldots, X_n$ une base de $\mathfrak{g}$ obtenue par complétion d'une base $X_{r+1}, \ldots, X_n$ de $D\mathfrak{g}$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$. On sait que les X^α forment une base de $U(\mathfrak{g})$; pour $1 \leqslant j \leqslant n$, nous définissons les endomorphismes ∂_j de $U(\mathfrak{g})$ par

$$\partial_j(X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}) = X_1^{\alpha_1} \ldots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \alpha_j X_j^{\alpha_j - 1} X_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \ldots X_n^{\alpha_n} ;$$

ces endomorphismes commutent entre eux. Pour $P \in U(\mathfrak{g})$, $\partial_j P$ est nul si et seulement si X_j ne figure pas dans l'écriture de P dans la base des X^α.

PROPOSITION 1. *∂_j est une dérivation de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ si et seulement si X_j n'appartient pas à $D\mathfrak{g}$.*

La proposition résultera du

LEMME 1. *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe de deux sous-espaces: $\mathfrak{g} = \boldsymbol{R}X_0 \oplus \mathfrak{g}'$. Pour qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(G)$ (réelle) telle que $X_0 f = 1$, et $X'f = 0$ pour $X' \in \mathfrak{g}'$, il faut et il suffit que $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. *a*) *Condition nécessaire*: on doit avoir $[X, Y]f = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$; la différentielle de f en e est donc une forme linéaire nulle sur $D\mathfrak{g}$, sur $\mathfrak{g}'$, et prenant la valeur 1 sur X_0, d'où $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$.

b) *Condition suffisante*: Si $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, par suite le sous-groupe connexe G' correspondant est fermé dans G et simplement connexe (cf. Hochschild [4], theorem XII.1.2). Soit $\boldsymbol{R} \cdot G'$ le produit semi-direct de $\boldsymbol{R}$ par G' pour l'action $\exp(-tX_0)g\cdot\exp tX_0$ de $t\in\boldsymbol{R}$ sur $g\in G'$; alors l'application de $\boldsymbol{R}\cdot G'$ sur G

$$(t, g)\mapsto \exp tX_0\cdot g$$

est un isomorphisme local, donc global, de groupes de Lie. Définissons f sur G par $f(\exp tX_0\cdot g)=t$; f est invariante à droite par G', d'où $X'f=0$ pour $X'\in\mathfrak{g}'$; de plus f est manifestement centrale, d'où

$$X_0 f(\exp tX_0\cdot g)=\frac{d}{ds}f(\exp tX_0\cdot g\cdot\exp sX_0)_{s=0}=\frac{d}{ds}f(\exp(t+s)X_0\cdot g)_{s=0}=1\ ,$$

ce qui démontre le lemme 1.

Démonstration de la proposition 1. *a*) *Condition nécessaire*: Si ∂_j est une dérivation de $U(\mathfrak{g})$, alors pour $X,\ Y\in\mathfrak{g}$

$$\partial_j[X,\ Y]=[\partial_j X,\ Y]+[X,\ \partial_j Y]=0$$

puisque $\partial_j X$ et $\partial_j Y$ sont des scalaires. Donc ∂_j s'annule sur $D\mathfrak{g}$, ce qui équivaut à $X_j\notin D\mathfrak{g}$:

b) *Condition suffisante*: Si $X_j\notin D\mathfrak{g}$, appliquons le lemme 1 en prenant $X_0=X_j$ et pour $\mathfrak{g}'$ le sous-espace engendré par les X_k, $k\neq j$; il donne une fonction f_j, C^∞ sur le groupe G connexe et simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{g}$, telle que

$$X_j f_j=1\ ,\qquad X_k f_j=0\quad \text{si } k\neq j\ .$$

En utilisant le crochet de l'algèbre associative Diff (G) on a

$$[X_j^{\alpha_j}, f_j]=\alpha_j X_j^{\alpha_j-1}\ ,\qquad [X_k^{\alpha_k}, f_j]=0\qquad \text{pour } k\neq j\ ;$$

par suite, pour $P\in U(\mathfrak{g})$,

$$\partial_j P=[P, f_j]\ ;$$

ceci entraîne que ∂_j est une dérivation de $U(\mathfrak{g})$, d'où la proposition 1.

Théorème I. *Soit G un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{g}$. Pour tout $P\in Z(\mathfrak{g})$, $P\neq 0$, il existe $Q\in Z(D\mathfrak{g})\cap Z(\mathfrak{g})$, $Q\neq 0$, tel que l'inégalité*:

(1) *pour tout entier $k\geqslant 0$ et tout $u\in\mathfrak{D}(U)$* $\|Qu\|_{k,G}\leqslant C\|Pu\|_{k,G}$

ait lieu dans chacune des situations suivantes:

i) *il existe un voisinage U de e dans G tel que* (1) *soit vérifiée avec* $C = 1$

ii) *si* $P \notin Z(D\mathfrak{g})$, *pour tout* $C > 0$ *il existe un voisinage U de e dans G tel que* (1) *soit vérifiée*;

iii) *si G est simplement connexe, pour tout ouvert relativement compact U de G, il existe* $C > 0$ *tel que* (1) *soit vérifiée.*

REMARQUE. Si P est exprimé au moyen d'une base $X_1, \ldots, X_n$ choisie comme ci-dessus, on peut prendre pour Q toute dérivée en $X_1, \ldots, X_r$ (au sens de la proposition 1), non nulle d'ordre maximum, de P.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I. Nous allons traiter simultanément les trois cas i), ii) et iii).

Notre point de départ est l'identité générale suivante, que l'on vérifie sans difficulté:

$$\|P'u\|^2 = -(P'u, fPu) + (P^*u, f(P')^*u) - \\ -(P^*u, (P'')^*u) + ([P^*, P']u, fu), \tag{2}$$

où U est un ouvert de G, $u \in \mathfrak{D}(U)$, $f \in C^\infty(U)$, réelle, $P \in \mathrm{Diff}(U)$, $P' = [P, f]$, et $P'' = [P', f]$.

Soit $X_j \notin D\mathfrak{g}$ (notations du début de ce paragraphe). Le lemme 1, appliqué avec $X_0 = X_j$ et $\mathfrak{g}'$ engendré par les X_k, $k \neq j$, donne une fonction f, réelle, C^∞ au voisinage de e si G est quelconque, C^∞ partout si G est connexe et simplement connexe, telle que

$$f(e) = 0, \quad X_j f = 1, \quad X_k f = 0 \quad (k \neq j).$$

Soit U un ouvert relativement compact de G, contenant e et contenu dans le domaine de définition de f. Si P appartient à $Z(\mathfrak{g})$, alors il en est de même de $P' = \partial_j P$ et $P'' = \partial_j^2 P$ grâce à la proposition 1, ainsi que de leurs adjoints; donc le dernier terme de (2) disparaît ici, et

$$\|\partial_j^\alpha Pu\| = \|(\partial_j^\alpha P)^* u\| \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots$$

puisque $\partial_j^\alpha P$ commute à son adjoint. On déduit alors de (2) avec ces choix de U, f, et P:

$$\|\partial_j Pu\|^2 \leqslant \|Pu\|\big(2C_U\|\partial_j Pu\| + \|\partial_j^2 Pu\|\big) \tag{3}$$

pour $u \in \mathfrak{D}(U)$, où C_U est la borne supérieure de $|f|$ sur U. Par récurrence sur l'ordre m de P on en déduit

$$(4) \qquad \|\partial_j Pu\| \leqslant 2mC_U \|Pu\| , \qquad u \in \mathfrak{D}(U) .$$

En effet, si $m = 1$, on a $\partial_j^2 P = 0$, et (4) résulte de (3). Si P est d'ordre $m+1$, alors $\partial_j P$ est d'ordre m au plus, d'où

$$\|\partial_j^2 Pu\| \leqslant 2mC_U \|\partial_j Pu\|$$

par l'hypothèse de récurrence, ce qui reporté dans (3) donne

$$\|\partial_j Pu\| \leqslant 2(m+1)\, C_U \|Pu\| .$$

Soit Q une dérivée non nulle d'ordre maximum a de P en $X_1, \ldots, X_r$. On a $Q \in Z(\mathfrak{g})$ par la proposition 1, et $Q \in U(D\mathfrak{g})$ car $\partial_j Q = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$; donc $Q \in Z(D\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})$. De plus

$$\|Qu\| \leqslant (2mC_U)^a \|Pu\| , \qquad u \in \mathfrak{D}(U) ,$$

par applications répétées de l'inégalité (4). Comme P et Q sont bi-invariants sur G

$$\|QX^\alpha u\| = \|X^\alpha Qu\| , \qquad \|PX^\alpha u\| = \|X^\alpha Pu\|$$

pour $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, d'où pour tout entier $k \geqslant 0$

$$\|Qu\|_{k,G} \leqslant (2mC_U)^a \|Pu\|_{k,G} , \qquad u \in \mathfrak{D}(U) ,$$

avec $C_U = \sup_U |f|$. Le théorème résulte de cette inégalité: dans le cas iii), on se ramène aussitôt par translation à droite à raisonner sur la composante connexe de e, i.e. à supposer G connexe et simplement connexe, et on peut alors prendre pour U un ouvert relativement compact arbitraire de G; si $P \notin Z(D\mathfrak{g})$, alors $a \geqslant 1$, donc $(2mC_U)^a$ est arbitrairement petit pourvu que U soit assez petit (cas ii); enfin si $P \in Z(D\mathfrak{g})$, l'inégalité a lieu trivialement avec $a = 0$, $Q = P$ (cas i).

3. – Application à la résolubilité locale.

PROPOSITION 2. *Soient G un groupe de Lie et P un opérateur bi-invariant sur G. Les propriétés suivantes sont équivalentes (U désignant toujours un* *voisinage ouvert de e dans G)*

i) *il existe U tel que $P\mathfrak{D}'(U)\supset\mathfrak{D}(U)$ (résolubilité locale);*

ii) *il existe U et $E\in\mathfrak{D}'(U)$ tels que $PE=\delta$ sur U (solution élémentaire locale);*

iii) *il existe U tel que $PC^\infty(U)\supset\mathfrak{D}(U)$.*

La méthode de démonstration est tout-à-fait standard. D'abord nous démontrons le

LEMME 2. *Soit G un groupe de Lie (de dimension n). Il existe un voisinage ouvert U de e dans G, et pour tout entier $k\geqslant 0$ un opérateur $A\in U(\mathfrak{g})$ (d'ordre $n(k+2)$) et une fonction $f\in C^k(U)$ tels que $Af=\delta$ sur U.*
Si G est résoluble simplement connexe, on peut prendre $U=G$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une base de $\mathfrak{g}$. L'application

$$t=(t_1,\ldots,t_n)\mapsto g(t)=\exp t_1X_1\ldots\exp t_nX_n$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\boldsymbol{R}^n$ sur un voisinage U de e dans G. Pour $u\in\mathfrak{D}(U)$, $k\in\boldsymbol{N}$, on a:

$$\int_0^{+\infty} X_n^{k+2}u\big(g(t_1,\ldots,t_n)\big)\frac{t_n^{k+1}}{(k+1)!}\,dt_n=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{k+2}u(g(t))\cdot\frac{t_n^{k+1}}{(k+1)!}\,dt_n=$$
$$=(-1)^k u\big(g(t_1,\ldots,t_{n-1},0)\big)\,,$$

d'où aisément:

$$\int\limits_{t_1\geqslant 0,\ldots,t_n\geqslant 0} X_n^{k+2}\ldots X_1^{k+2}u\big(g(t)\big)\frac{t_1^{k+1}}{(k+1)!}\cdots\frac{t_n^{k+1}}{(k+1)!}\,dt_1\ldots dt_n=(-1)^{nk}u(e)\,.$$

Soient j la fonction C^∞ sur U définie par

$$dt_1\ldots dt_n=j(g)\,d_rg\,,$$

et f la fonction C^k sur U définie par

$$f\big(g(t)\big)=\frac{(t_1\cdots t_n)^{k+1}}{(k+1)!^n}H(t_1)\ldots H(t_n)\,j\big(g(t)\big)\,,$$

où H est la fonction de Heaviside; il vient

$$u(e) = (-1)^{nk} \int_G X_n^{k+2} \dots X_1^{k+2} u(g) f(g)\, d_r g\,, \qquad u \in \mathfrak{D}(U)\,,$$

soit

$$X_1^{k+2} \dots X_n^{k+2} f = \delta\,.$$

Si G est résoluble simplement connexe, et connexe (on se ramène aussitôt à ce cas), alors pour un choix convenable de la base $X_1, \dots, X_n$ l'application $t \mapsto g(t)$ est un difféomorphisme global de $\boldsymbol{R}^n$ sur G (cf. Hochschild [4], theorem XII.2.2); on peut donc prendre $U = G$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Donnons tout de suite une conséquence du lemme 2 qui servira un peu plus loin:

LEMME 3. *Soit G un groupe de Lie (de dimension n). Il existe un voisinage V de e dans G et, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, une constante $C > 0$ telle que, pour $u \in \mathfrak{D}(V)$*

$$\sup_{g \in G} |X^\alpha u(g)| \leqslant C \|u\|_{|\alpha|+2n}\,.$$

Si G est résoluble simplement connexe, on peut prendre pour V un ouvert relativement compact arbitraire de G.

REMARQUES: *a*) D'après ce lemme, on peut indifféremment se servir des semi-normes $\sup|X^\alpha u|$, $\alpha \in \boldsymbol{N}^n$, ou $\|u\|_k$, $k \in \boldsymbol{N}$, dans la définition de la topologie de $\mathfrak{D}(V)$. *b*) La méthode de démonstration utilisée permet en fait de remplacer $|\alpha| + 2n$ par $|\alpha| + n$ dans l'inégalité ci-dessus.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Le lemme 2, avec $k = 0$, donne U, A, et $f \in C^0(U)$ tels que $u(e) = \langle Af, u\rangle = \langle f, {}^tAu\rangle$ pour $u \in \mathfrak{D}(U)$. Soient U' et V deux voisinages de e dans G tels que U' soit relativement compact dans U et $V^{-1}\cdot V \subset U'$. Pour $u \in \mathfrak{D}(V)$, $g \in V$, $u_g(x) = u(gx)$, on a $u_g \in \mathfrak{D}(U')$, par suite

$$u(g) = \int_G f(x)\, {}^tA(u_g)(x)\, d_r x = \int_{U'} f(x)\, {}^tAu(gx)\, d_r x\,,$$

d'où

$$\sup |u| \leqslant \|f\|_{U'} \Big(\int |{}^tAu(gx)|^2 d_r x\Big)^{\frac12}\,.$$

Si l'on repasse à la mesure de Haar à gauche $d_l x = \Delta(x)\, d_r x$, cette dernière intégrale s'écrit:

$$\int_{U'} |{}^tAu(gx)|^2 \Delta(x)^{-1} d_l x \leqslant \sup_{U'} \Delta^{-1} \int_{U'} |{}^tAu(x)|^2 d_l x \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{U'} \Delta^{-1} \int_{U'} |{}^tAu(x)|^2 \Delta(x)\, d_r x \leqslant \sup_{U'} \Delta^{-1} \cdot \sup_{U'} \Delta \cdot \|{}^tAu\|^2 .$$

Finalement, pour $u \in \mathfrak{D}(V)$,

$$\sup |u| \leqslant \|f\|_{U'} \cdot \sup_{U'} \Delta^{-\frac{1}{2}} \cdot \sup_{U'} \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot \|{}^tAu\| .$$

En appliquant cette inégalité à $X^\alpha u$, et en exprimant ${}^tAX^\alpha$ dans la base des X^β, on en déduit le lemme 3.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. i) *implique* ii): Supposons $P\mathfrak{D}'(U) \supset \mathfrak{D}(U)$; en diminuant au besoin U, on peut supposer que c'est aussi l'ouvert du lemme 2. Si V est un voisinage ouvert de e relativement compact dans U, nous montrons que P admet une solution élémentaire sur V. D'abord il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que pour tout $f \in C^k(U)$ il existe $u \in \mathfrak{D}'(U)$ tel que $Pu = f$ sur V. Rappelons brièvement l'argument d'analyse fonctionnelle qui donne ce résultat (cf. Hörmander [6] proposition 3.3.2): l'hypothèse $P\mathfrak{D}'(U) \supset \mathfrak{D}(U)$ implique que la forme bilinéaire $(f, v) \mapsto \int_G f \cdot v \cdot d_r g$ est séparément continue sur $C^\infty(U) \times \mathfrak{D}(V)$ si l'on prend pour f la topologie usuelle de $C^\infty(U)$ et pour v la topologie la moins fine qui rende continue l'application $v \mapsto {}^tPv$ de $\mathfrak{D}(V)$ dans $C^\infty(U)$. Donc cette forme est continue (Banach-Steinhaus), i.e. il existe $C > 0$, des entiers $k, l \geqslant 0$, et un compact K de U tels que

$$|\langle f, v\rangle| \leqslant C \sup_{g \in K, |\alpha| \leqslant k} |X^\alpha f(g)| \sup_{g \in K, |\beta| \leqslant l} |X^{\beta\, t}Pv(g)| ,$$

pour $f \in C^\infty(U)$, $v \in \mathfrak{D}(V)$. L'inégalité se prolonge à $f \in C^k(U)$ et montre que l'application ${}^tPv \mapsto \langle f, v\rangle$ est continue pour la topologie induite sur ${}^tP\mathfrak{D}(V)$ par $C^\infty(U)$; on en déduit (Hahn-Banach) qu'il existe $u \in \mathfrak{D}'(U)$ tel que $Pu = f$ sur V, comme annoncé. Il suffit maintenant de prendre pour f la fonction donnée par le lemme 2, et de poser $E = Au \in \mathfrak{D}'(U)$ pour avoir:

$$PE = PAu = APu = Af = \delta \quad \text{sur } V.$$

ii) *implique* iii). Soient $E \in \mathfrak{D}'(U)$ une solution élémentaire de P sur U, et V un voisinage ouvert de e tel que $V^{-1} \cdot V \subset U$; alors $PC^\infty(V) \supset \mathfrak{D}(V)$.

En effet pour $f \in \mathfrak{D}(V)$ la fonction

$$u(g) = \langle E_x, f(gx^{-1})\rangle$$

(où l'indice indique sur quelle variable porte l'opération) est C^∞ sur V; d'autre part, pour $\varphi \in \mathfrak{D}(U)$,

$$\begin{aligned} P_g\langle\varphi(x), f(gx^{-1})\rangle &= P_g\langle\varphi(xg), f(x^{-1})\rangle \\ &= \langle P\varphi(xg), f(x^{-1})\rangle \quad (P \text{ invariant à gauche}) \\ &= \langle P\varphi(x), f(gx^{-1})\rangle\ ; \end{aligned}$$

cette formule s'étend au cas où $\varphi \in \mathfrak{D}'(U)$, et montre que

$$Pu(g) = \langle PE_x, f(gx^{-1})\rangle = f(g)\,,$$

d'où la proposition 2.

THÉORÈME II. – *Soit G un groupe de Lie, d'algèbre* $\mathfrak{g}$ *et de groupe dérivé DG. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *tout élément non nul de $Z(\mathfrak{g})$ est localement résoluble sur G*;

ii) *tout élément non nul de $Z(D\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})$ est localement résoluble sur DG.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II. Le théorème est local, on peut donc supposer G connexe et simplement connexe. Alors DG est une sous-variété fermée de G, simplement connexe, et il existe un relèvement ϱ de la projection canonique $\pi: G \to G/DG$ tel que l'application $\varphi: (x, y) \mapsto x\varrho(y)$ soit un difféomorphisme de $DG \times (G/DG)$ sur G (cf. Hochschild [4] theorem XII.1.2); on peut évidemment supposer que $\varrho(\pi(e)) = e$, d'où $\varphi(e, \pi(e)) = e$.

Remarquons que les opérateurs $Q \in Z(D\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})$ sont invariants par φ, au sens suivant: pour $f \in C^\infty(G)$, et $\varphi^* f = f \circ \varphi$, on a

$$\varphi^*(Qf) = (Q_x \otimes 1_y)(\varphi^* f)\,,$$

puisque Q commute à la translation à droite par $\varrho(y)$ dans G. Pour étudier la résolubilité locale de Q au voisinage de e dans G, on peut donc aussi bien raisonner au voisinage de $(e, \pi(e))$ dans $DG \times (G/DG)$.

i) *implique* ii): Soit $Q \in Z(D\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})$, $Q \neq 0$. D'après l'hypothèse i) et la proposition 2, il existe un voisinage U de e dans G tel que $QC^\infty(U) \supset \mathfrak{D}(U)$. En passant à $DG \times (G/DG)$ par φ^{-1}, et en prenant les traces sur la sous-variété $y = \pi(e)$, on en déduit grâce aux remarques ci-dessus qu'il existe un voisinage V de e dans DG tel que $QC^\infty(V) \supset \mathfrak{D}(V)$.

ii) *implique* i): Soient $P \in Z(\mathfrak{g})$, $P \neq 0$, et $Q \in Z(D\mathfrak{g}) \cap Z(\mathfrak{g})$, $Q \neq 0$, un opérateur associé à ${}^tP$ par le théorème I. D'après l'hypothèse ii) et la proposition 2, il existe un voisinage ouvert V de e dans DG, et $F \in \mathcal{D}'(V)$, tels que ${}^tQF = \delta_{DG}$ sur V. Alors

$$({}^tQ \otimes 1)(F \otimes \delta_{G/DG}) = \delta_{DG} \otimes \delta_{G/DG} = \delta_{DG \times (G/DG)}$$

(en prenant le point $\pi(e)$ pour origine dans G/DG); cette égalité, transportée par le difféomorphisme φ, montre que ${}^tQ$ admet sur G une solution élémentaire locale. En exprimant la continuité de cette distribution on voit grâce au lemme 3 qu'il existe $C > 0$, un entier $k \geqslant 0$ et un voisinage U de e dans G tels que

$$|u(e)| \leqslant C \|Qu\|_{k,G}, \qquad u \in \mathcal{D}(U),$$

d'où

$$|u(e)| \leqslant C \|{}^tPu\|_{k,G}$$

par le théorème I (cas i)). Par suite la forme linéaire ${}^tPu \mapsto u(e)$ est continue sur ${}^tP\mathcal{D}(U)$ pour la topologie induite par $H_0^k(U)$; soit $E \in H^{-k}(U)$ un prolongement continu de cette forme linéaire:

$$\langle PE, u \rangle = \langle E, {}^tPu \rangle = u(e), \qquad u \in \mathcal{D}(U)$$

donc E est une solution élémentaire locale de P, ce qui démontre le théorème II.

COROLLAIRE. *Sur un groupe de Lie résoluble tout opérateur bi-invariant non nul est localement résoluble, et de plus admet une solution élémentaire sur tout ouvert relativement compact si le groupe est résoluble simplement connexe.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. – Par applications répétées du théorème II, il suffit de vérifier que tout opérateur bi-invariant non nul est localement résoluble sur l'un des groupes dérivés successifs $DG, D^2G, \ldots, D^kG, \ldots$: Or l'un d'eux est réduit à l'élément neutre, et le problème y est trivial.

La deuxième assertion du corollaire s'obtient en reprenant la démonstration de la partie « ii) implique i) » du théorème II au moyen de la version globale du théorème I (cas iii)) et du lemme 3; on ramène ainsi le problème de G à DG, puis DG étant à nouveau résoluble simplement connexe, aux groupes dérivés successifs jusqu'au cas trivial $D^kG = \{e\}$.

Dans la démonstration du théorème II, nous avons remonté de DG à G une solution élémentaire. Si, au lieu de cela, on cherche à remonter des inégalités L^2, on obtient la

PROPOSITION 3. – *Soient G un groupe de Lie résoluble, P un opérateur bi-invariant non nul sur G. Il existe un voisinage ouvert U de e dans G, et $C > 0$,* *tels que pour k entier $\geqslant 0$, $u \in \mathfrak{D}(U)$,*

$$\|u\|_{k,G} \leqslant C\|Pu\|_{k,G}.$$

Si G est résoluble simplement connexe, on peut prendre pour U un ouvert relativement compact arbitraire de G.

CONSÉQUENCES. *a*) On a $PH^{-k}(U) \subset H^{-k}(U)$ (avec les notations de la proposition 3), en particulier $PL^2(U) \supset L^2(U)$. En effet l'inégalité appliquée à ${}^tP$ entraîne

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_{-k} \cdot \|u\|_k \leqslant C\|f\|_{-k} \cdot \|{}^tPu\|_k$$

pour $f \in H^{-k}(U)$, $u \in \mathfrak{D}(U)$; par un argument déjà utilisé plus haut, il existe donc $T \in H^{-k}(U)$ tel que

$$\langle PT, u\rangle = \langle T, {}^tPu\rangle = \langle f, u\rangle\,, \qquad u \in \mathfrak{D}(U)\,,$$

soit $PT = f$.

b) P admet une solution élémentaire dans $H^{-n}(U)$, où n est la dimension de G. En effet δ_G appartient à $H^{-n}(U)$ d'après le lemme 3 (cf. remarque *b*), et *b*) résulte de *a*).

c) Si G est résoluble simplement connexe, P bi-invariant non nul sur G, et $u \in \mathfrak{D}(G)$, alors $Pu = 0$ entraîne $u = 0$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3. Comme P est bi-invariant, $X^\alpha Pu = PX^\alpha u$, et il suffira de démontrer l'inégalité pour $k = 0$. D'autre part il suffit de démontrer l'assertion de la proposition 3 concernant un groupe résoluble simplement connexe, puisqu'un groupe résoluble quelconque est localement isomorphe à un tel groupe. Nous allons montrer que cette assertion pour le groupe G est conséquence de l'assertion correspondante pour le groupe DG; de proche en proche, on sera ainsi ramené au cas trivial d'un groupe réduit à e.

Supposons donc que G est connexe et simplement connexe (il en sera alors de même de DG), et que pour tout $Q \in Z(D\mathfrak{g})$, $Q \neq 0$, et tout ouvert relativement compact V de DG, il existe $C > 0$ tel que, pour $v \in \mathfrak{D}(V)$

$$\|v\|_{DG} \leqslant C\|Qv\|_{DG}\,. \tag{5}$$

Soit U un ouvert relativement compact de G; prenons V relativement compact dans DG, et contenant $(U^{-1} \cdot U) \cap DG$. Pour $u \in \mathfrak{D}(U)$, $g \in U$,

$u_g(x) = u(gx)$, on a $u_g \in \mathcal{D}(V)$ et, d'après (5)

$$\int_{DG} |u(gx)|^2 \, d_r x \leqslant C^2 \int_{DG} |Q(u_g)(x)|^2 \, d_r x \, .$$

Q est invariant à gauche sur G, donc $Q(u_g)(x) = Qu(gx)$; DG est unimodulaire, car nilpotent, et il vient

$$(6) \qquad \int_{DG} |u(gx)|^2 \, d_l x \leqslant C^2 \int_{DG} |Qu(gx)|^2 \, d_l x \, , \qquad g \in U, \; u \in \mathcal{D}(U) \, .$$

Soient π la projection canonique de G sur G/DG, et dy une mesure de Haar (à gauche et à droite) de G/DG, normalisée pour que

$$\int_G f(g) \, d_l g = \int_{G/DG} dy \int_{DG} f(gx) \, d_l x \, , \quad f \in \mathcal{D}(G) \, \big(y = \pi(g)\big) \, .$$

En intégrant l'inégalité (6) sur $\pi(U)$ avec la mesure dy, on obtient:

$$\int_G |u(g)|^2 \, d_l g \leqslant C^2 \int_G |Qu(g)|^2 \, d_l g \, .$$

Revenons à la mesure de Haar à droite $d_r g = \Delta(g)^{-1} d_l g$.

$$(7) \qquad \inf_U \Delta \cdot \|u\|_G^2 \leqslant C^2 \sup_U \Delta \cdot \|Qu\|_G^2 \, , \qquad u \in \mathcal{D}(U) \, .$$

Soit maintenant $P \in Z(\mathfrak{g})$, $P \neq 0$. D'après le théorème I, cas iii), il existe $Q \in Z(D\mathfrak{g})$, $Q \neq 0$, et $C' > 0$ tels que

$$\|Qu\|_G \leqslant C' \|Pu\|_G \, , \qquad u \in \mathcal{D}(U) \, .$$

Cette inégalité, jointe à (7), donne

$$\|u\|_G \leqslant C'' \|Pu\|_G \, ,$$

et achève la démonstration de la proposition 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Cerezo - F. Rouviere, *Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre*, Ann. Sci. E.N.S., **4** (1971), pp. 21-30.