ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO MIRANDA

Superficie minime illimitate

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 2 (1977), p. 313-322
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_2_313_0>

Superficie minime illimitate.

MARIO MIRANDA (*)

dedicato a Jean Leray

In questo articolo si introduce una generalizzazione del concetto di soluzione dell'equazione delle superficie minime avente lo scopo di unificare il trattamento delle superficie minime di codimensione 1 negli spazi euclidei. È noto che tali superficie possono essere qualitativamente molto diverse, analitiche come i grafici delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime oppure singolari come i coni minimi.

Nel primo paragrafo si studia la struttura delle soluzioni generalizzate e si fa vedere come queste siano descrivibili in termini di soluzioni classiche e cilindri minimi. Nel secondo paragrafo si prova un teorema di compattezza per successioni di soluzioni generalizzate. Nel terzo paragrafo si applicano i risultati dei primi due per dare un teorema di approssimazione di superficie minime singolari con superficie minime regolari. Nell'ultimo paragrafo si applicano i risultati dei primi due per dare un teorema di esistenza per il problema al contorno per l'equazione delle superficie minime su domini non limitati.

1. – *Diremo soluzione generalizzata dell'equazione delle superficie minime su un aperto Ω di R^n una funzione $f\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ($[-\infty, +\infty]$ sta ad indicare $R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$), che sia misurabile secondo Lebesgue e tale che l'insieme $E = \{(x, t) | x \in \Omega, t < f(x)\}$ abbia frontiera di misura minima in $\Omega \times R$.*

Ricordiamo alcune notazioni e definizioni (cfr. [1], § 2.1): con φ_E denotiamo la funzione caratteristica dell'insieme E, con $D\varphi_E$ denotiamo il gradiente, nel senso delle distribuzioni, di φ_E. Se $K \subset \Omega \times R$ è aperto denotiamo

(*) Facoltà di Scienze, Libera Università, Povo (Trento).

Pervenuto alla Redazione il 20 Maggio 1976 ed in forma definitiva il 26 Luglio 1976.

con $|D\varphi_E|(K)$ la variazione totale su K del gradiente di φ_E, cioè

$$(1.1) \qquad |D\varphi_E|(K) = \sup\left\{ \int_E \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} \phi_{n+1}(x,t) \right] dx\, dt \;\middle|\; \phi \in [C_0^1(K)]^{n+1},\ |\phi(x,t)| \leqslant 1 \right\}.$$

La proprietà « E ha frontiera di misura minima in $\Omega \times R$ » si esprime mediante le diseguaglianze

$$(1.2) \qquad |D\varphi_E|(K) < +\infty, \qquad \forall K \subset\subset \Omega \times R \ (^1),$$

$$(1.3) \qquad |D\varphi_E|(K) \leqslant |D\varphi_M|(K), \qquad \forall K \subset\subset \Omega \times R,\ \forall M \text{ con } M \,\Delta\, E \subset\subset K \ (^2).$$

I valori di una $f: \Omega \to [-\infty, +\infty]$ misurabile possono evidentemente essere modificati su un insieme di misura nulla senza che questo abbia influenza sulla validità delle (1.2) e (1.3), perchè tali modifiche non hanno influenza nella (1.1). Pertanto le soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime sono da considerarsi definite a meno di insiemi di misura nulla. Nel corso di questo articolo, parlando di tali soluzioni, noi sempre intenderemo che i valofi assunti siano scelti in modo da rendere tali funzioni continue ogni volta che cio sia possibile.

In questo spirito, la prima questione che vogliamo indagare è: punti di continuità e di discontinuità delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime.

Per l'insieme misurabile $E = \{(x,t) | x \in \Omega,\ t < f(x)\}$ possiamo supporre, grazie alla possibilità di ridefinire f, che siano valide le implicazioni

$$(1.4) \qquad \varrho > 0, \qquad \text{mis}\,[B_\varrho(x,t) \cap E] = \text{mis}\, B_\varrho(x,t) \Rightarrow (x,t) \in E \ (^3),$$

$$(1.5) \qquad \varrho > 0, \qquad \text{mis}\,[B_\varrho(x,t) \cap E] = 0 \Rightarrow (x,t) \notin E.$$

È infatti facile rendersi conto che ogni insieme misurabile può essere modificato, mediante opportuna aggiunzione e sottrazione di insiemi di misura nulla, in modo che valgano le (1.4) e (1.5) (cfr. Proposizione 3.4 di [2]).

Ricordiamo alcuni risultati fondamentali riguardanti le frontiere di misura minima:

(1) $K \subset\subset \Omega \times R \Leftrightarrow \bar{K}$ è compatto e $\bar{K} \subset \Omega \times R$.
(2) $E \,\Delta\, M = (E - M) \cup (M - E)$.
(3) $B_\varrho(x) = \{y \,|\, |x - y| < \varrho\}$.

TEOREMA (E. De Giorgi) (Cap. 2 di [1] oppure Teor. 6.5 di [3]). *Se E ha frontiera di misura minima in un aperto A di R^m e valgono le* (1.4) *e* (1.5), *allora esiste un aperto $A_0 \subset A$ tale che $\partial E \cap A_0$ è localmente grafico di una funzione analitica di $(m-1)$ variabili, soluzione dell'equazione delle superficie minime e inoltre si ha*

$$H_{m-1}(A - A_0) = 0 \text{ (4)}. \tag{1.6}$$

Denoteremo nel seguito con $\partial^* E$ la $\partial E \cap A_0$, cioè la parte regolare della frontiera di E in A.

TEOREMA (H. Federer) (cfr. [4]). *La tesi del Teorema di De Giorgi è precisabile nel modo seguente*

$$H_s(A - A_0) = 0 , \quad \forall \text{ reale } s > m - 8 . \tag{1.7}$$

Nel caso che a noi interessa e cioè $E = \{(x, t) | x \in \Omega, t < f(x)\}$ si ha che il versore normale $\nu(x, t)$ nei punti $(x, t) \in \partial^* E$, orientato in maniera da « uscire da E », forma con l'asse t un angolo non superiore a $\pi/2$. In altre parole, detto $\nu_{n+1}(x, t)$ il coseno di tale angolo, si ha

$$\nu_{n+1}(x, t) \geqslant 0 , \quad \forall (x, t) \in \partial^* E . \tag{1.8}$$

D'altra parte ν_{n+1} verifica la relazione differenziale (cfr. [5] formula 2.10))

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i\right) \nu_{n+1}(x, t) + c^2(x, t) \cdot \nu_{n+1}(x, t) = 0 , \quad \forall (x, t) \in \partial^* E , \tag{1.9}$$

dove $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i$ è l'operatore di Laplace-Beltrami su $\partial^* E$ e $c^2(x, t)$ è la somma dei quadrati delle curvature principali di $\partial^* E$ nel punto (x, t). Dalle (1.8) e (1.9) si ha che ν_{n+1} è funzione superarmonica su $\partial^* E$, quindi, grazie al Teorema 6 di [6], verifica, per ogni sfera B di raggio $\varrho < [\operatorname{dist}(B, \partial\Omega \times R)] \cdot \gamma(n)$ (5),

$$\nu_{n+1}(x, t) = 0 \ \forall (x, t) \in B \cap \partial^* E, \text{ oppure, } \inf\{\nu_{n+1}(x, t) | (x, t) \in B \cap \partial^* E\} > 0 . \tag{1.10}$$

Nel primo caso dell'alternativa (1.10) l'insieme E ha intersezione con B costituita di segmenti verticali e quindi la $\partial E \cap B$ è una superficie, eventual-

(4) H_{m-1} è la misura di Hausdorff $(m-1)$-dimensionale.

(5) $\gamma(n)$ è una costante positiva dipendente solo dalla dimensione dello spazio.

mente singolare, cilindrica verticale, mentre nel secondo caso la $\partial E \cap B$ è vuoto o è il grafico di una funzione lipschitziana su un aperto di R^n (cfr. Teorema 5.6 di [2]) e quindi analitica e soluzione dell'equazione delle superficie minime nel senso classico. Tale funzione non può che essere la f stessa. Osserviamo inoltre che se per una sfera B vale il primo caso dell'alternativa (1.10) allora lo stesso si verificherà per ogni sfera ottenuta traslando la B nella direzione verticale. Più precisamente se per $(x, t) \in \Omega \times R$, $\varrho < \gamma(n) \operatorname{dist}((x, t), \partial\Omega \times R)$ si ha che $\partial E \cap B_\varrho((x, t))$ è un cilindro verticale allora lo stesso vale per $\partial E \cap B_\varrho((x, s))$, $\forall s \in R$ e quindi $\partial E \cap (B_\varrho(x) \times R)$ è un cilindro verticale, e l'insieme $B_\varrho(x)$ è costituito di una parte P dove la funzione f vale $+\infty$, di una parte N dove la f vale $-\infty$ e di una parte residua contenuta nella $\partial P \cap \partial N$ e si ha

$$\partial E \cap (B_\varrho(x) \times R) = (\partial P \cap \partial N \cap B_\varrho(x)) \times R\,.$$

Da quanto sopra detto segue anche che se per una sfera B vale il secondo caso dell'alternativa (1.10) allora lo stesso si verifica per ogni sfera ottenuta traslando la B nella direzione verticale. Più precisamente se per $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega \times R$, $\varrho < \gamma(n) \operatorname{dist}((\bar{x}, \bar{t}), \partial\Omega \times R)$ si ha $\inf\{\nu_{n+1}(x, t) | (x, t) \in B_\varrho(\bar{x}, \bar{t}) \cap \cap \partial^* E\} > 0$ allora si avrà che $\partial E \cap (B_\varrho(x) \times R)$ è vuota oppure grafico di f che ora risulta analitica in un aperto G di R^n. L'aperto G non esaurisce necessariamente tutto $B_\varrho(x)$, vi potranno infatti essere parti di $B_\varrho(x)$ in cui la f vale $+\infty$ e parti in cui la f vale $-\infty$, cioè parti dell'insieme che abbiamo indicato con P e parti dell'insieme che abbiamo indicato con N. A proposito di questi due insiemi cogliamo l'occasione per osservare che, valendo le (1.4) e (1.5) varranno le

$$\varrho > 0\,, \quad \operatorname{mis}(B_\varrho(x) \cap P) = \operatorname{mis} B_\varrho(x) \Rightarrow x \in P\,, \tag{1.11}$$

$$\varrho > 0\,, \quad \operatorname{mis}(B_\varrho(x) \cap N(= \operatorname{mis} B_\varrho(x) \Rightarrow x \in N\,. \tag{1.12}$$

Osserviamo finalmente nel secondo caso dell'alternativa (1.10) che se $y \in B_\varrho(x) - G$ allora per ogni $t \in R$ si ha che $(y, t) \notin \partial E$ e deve quindi essere $(y, t) \in \mathring{E}$, $\forall t$ oppure $(y, t) \notin \bar{B}$, $\forall t$. Nel primo caso avremo

$$y \in P \quad \text{e} \quad \lim_{z \to y} f(x) = +\infty\,, \tag{1.13}$$

nel secondo caso

$$y \in N \quad \text{e} \quad \lim_{z \to y} f(z) = -\infty\,. \tag{1.14}$$

Riassumendo possiamo dire che *se f è una soluzione generalizzata dell'equazione delle superficie minime, con i valori precisati in modo che valgano le* (1.4) *e* (1.5), *esiste un aperto $G \subset \Omega$, eventualmente vuoto, tale che f è su G reale analitica e soluzione dell'equazione delle superficie minime in senso classico. Detti P e N gli insiemi, eventualmente vuoti, su cui f assume i valori $+\infty$ e $-\infty$ si ha che*

$$\partial E \cap (\Omega \times R) = [(\partial P \cap \partial N \cap \Omega) \times R] \cup \operatorname{graph} f|_G , \tag{1.15}$$

$$\Omega = G \cup P \cup N \cup (\partial P \cap \partial N \cap \Omega) , \tag{1.16}$$

$$\partial G \cap \Omega \subset P \cup N . \tag{1.17}$$

Quindi i valori di f sono precisabili in modo che f risulti continua in tutti i punti di Ω tranne che in quelli di $\partial P \cap \partial N$.

Gli insiemi $P \times R$ e $N \times R$, che possono essere visti come limiti nella convergenza quasi ovunque delle funzioni caratteristiche, dei traslati di E verso il basso e verso l'alto rispettivamente quando si faccia tendere all'infinito la lunghezza della traslazione, hanno frontiera di misura minima in $\Omega \times R$ (cfr. Teorema 3 di [5]). Ciò implica (cfr. [7]) che gli insiemi P e N hanno frontiera di misura minima in Ω.

2. – La famiglia delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime su un dato aperto è compatta rispetto alla convergenza quasi ovunque. Questo vale perchè è compatta la famiglia degli insiemi aventi frontiera di misura minima in un dato aperto, rispetto alla convergenza quasi ovunque delle funzioni caratteristiche (cfr. la diseguaglianza (3.11) di [3] e il Teorema 1.6 di [2] e il Teorema 3 di [5]). Per i problemi che affronteremo più avanti sarà utile enunciare il teorema di compattezza, a cui ora si è accennato, nel modo seguente:

TEOREMA 1. *Sia Ω_j una successione non decrescente di aperti di R^n e $f_j \colon \Omega_j \to [-\infty, +\infty]$ una successione di soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime. Allora esiste una successione crescente di interi $j(k)$ e una $f \colon \bigcup_j \Omega_j \to [-\infty, +\infty]$ soluzione generalizzata dell'equazione delle superficie minime tali che*

$$\lim_k f_{j(k)}(x) = f(x) \quad \textit{per quasi ogni } x \in \bigcup_j \Omega_j . \tag{2.1}$$

Possiamo utilizzare questo teorema di compattezza e le considerazioni della prima sezione di questo articolo sulle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime per precisare alcune osservazioni di W. H.

Fleming [8] e E. De Giorgi [9] sulle soluzioni classiche non banali dell'equazione delle superficie minime definite su tutto lo spazio. Ricordiamo che Fleming osservò che se $w; R^n \to R$ è soluzione dell'equazione delle superficie minime, se $\varrho_j \to +\infty$ e $f_j(x) = \varrho_j^{-1} w(\varrho_j x)$ è tale che graph f_j ha limite per $j \to \infty$ (nel senso che le funzioni caratteristiche degli insiemi $E_j = \{(x, t) | x \in R^n, t < f_j(x)\}$ hanno limite quasi ovunque in R^{n+1}) allora, nel caso in cui w non sia lineare, il $\lim_j$ graph f_j è una frontiera minima singolare in O. E. De Giorgi osservò che tale singolarità non può essere isolata. Da quanto noi abbiamo visto si ha che *se il* $\lim_j$ graph f_j *deve essere singolare allora esso deve essere un cilindro verticale, per cui ovviamente le sue singolarità non possono essere isolate.*

3. – Vogliamo qui considerare un caso particolare, ma significativo per lo studio delle singolarità delle frontiere di misura minima, di problema al contorno per l'equazione delle superficie minime con dati infiniti.

Indichiamo con B una sfera aperta di R^n e con C e D due aperti disgiunti di R^n con

$$C \cap \partial B \neq \emptyset, \quad D \cap \partial B \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Per ogni intero j indichiamo con f_j una funzione analitica in B, ivi soluzione dell'equazione delle superficie minime e tale che

$$\lim_{y \to x} f_j(y) = j, \quad \forall x \in C \cap \partial B, \tag{3.2}$$

$$\lim_{y \to x} f_j(y) = -j, \quad \forall x \in D \cap \partial B. \tag{3.3}$$

Non vi sono problemi riguardanti l'esistenza di f_j che può essere ad esempio la funzione minimizzante il funzionale

$$\int_B \sqrt{1 + |\text{grad}\, w|^2}\, dx + \int_{\partial B \cap C} |w - j| dH_{n-1} + \int_{\partial B \cap D} |w + j| dH_{n-1}. \tag{3.4}$$

Dal Teorema di compattezza della sez. 2 si ha che esiste una successione crescente di interi $j(k)$ e una funzione $f: B \to [-\infty, +\infty]$ tali che

$$\lim_k f_{j(k)}(x) = f(x), \quad \text{q.o. } x \in B. \tag{3.5}$$

Con un semplice confronto con opportuni iperpiani si ricava che $\forall x \in C \cap \partial B$, $\exists \varrho > 0$ tale che

$$\lim_j f_j(y) = +\infty, \quad \forall y \in B \cap B_\varrho(x); \tag{3.6}$$

e analogamente, $\forall z \in D \cap \partial B$, $\exists \varrho > 0$ tale che

$$\lim_j f_j(y) = -\infty\,, \qquad \forall y \in B \cap B_\varrho(z)\,. \tag{3.7}$$

Avremo allora che gli insiemi P e N in cui la funzione f verificante la (3.5) vale rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ sono non vuoti e contengono la parte interna a B di un intorno di $C \cap \partial B$ e di $D \cap \partial B$ rispettivamente. Ricordiamo inoltre che P e N hanno frontiera di misura minima in B. Se gli aperti C e D son tali da essere unico l'insieme $E \subset B$ avente frontiera di misura minima in B e traccia su ∂B eguale a $C \cap \partial B$ si avrà che, a meno di insiemi di misura nulla, vale

$$P = B - N\,. \tag{3.8}$$

Questa situazione sicuramente si verifica quando sia dato un insieme E con frontiera di misura minima in un aperto Ω di R^n, quando la sfera B sia contenuta in Ω con la sua chiusura e gli insiemi C e D siano rispettivamente l'interno di E e il complementare della sua chiusura. In questo caso soltanto $E \cap B$ ha la proprietà di avere frontiera di misura minima in B e traccia su ∂B eguale a $E \cap \partial B$ (cfr. Prop. 1 di [6]). Pertanto in questo caso la successione $f_{j(k)}$ avrà limite $+\infty$ in q.o. punto di $E \cap B$ e limite $-\infty$ in q.o. punto di $B - E$, anzi in questo caso tutta la successione f_j deve avere tale proprietà. Da quanto detto nella sezione 1 avremo che graph f_j ha per limite il cilindro verticale $(\partial E \cap B) \times R$ e ciò indipendentemente dal fatto che tale cilindro sia singolare o meno. Questo risultato può quindi essere visto come un teorema di approssimazione di frontiere di misura minima singolari mediante superficie minime analitiche di tipo grafico ed enunciato nel modo seguente

TEOREMA 2. *Se E ha frontiera di misura minima nell'aperto Ω di R^n, se $x_0 \in \partial E \cap \Omega$ e $\varrho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ allora esiste una successione f_j di soluzioni dell'equazione delle superficie minime in $B_\varrho(x_0)$ tale che*

$$\lim_j \operatorname{graph} f_j = (\partial E \cap B_\varrho(x_0)) \times R\,.$$

4. – Vogliamo ora considerare il problema di Dirichlet per l'equazione delle superficie minime su aperti non limitati. Per fissare le idee supporremo che Ω sia un aperto non limitato con frontiera non vuota, localmente lipschitziana e per esso assumeremo che

$$H_{n-1}(\partial\Omega \cap B_\varrho) \leqslant H_{n-1}(\partial(\Omega \cup E) \cap B_\varrho)\,, \qquad \forall \varrho > 0 \;\; \forall E \subset\subset B_\varrho\,. \tag{4.1}$$

Ad esempio la ipotesi (4.1) è verificata se Ω è convesso. Supporremo che g sia una assegnata funzione continua su $\partial\Omega$. Ci poniamo il problema di vedere se esistono funzioni f reali analitiche su Ω, ivi soluzioni dell'equazione delle superficie minime e verificanti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g(x_0), \qquad \forall x_0 \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

cioè $f \in C(\bar{\Omega})$ e $f|_{\partial\Omega} = g$.

Indichiamo con f_j la soluzione del problema di minimo

$$\min\left\{ \int\limits_{\Omega \cap B_j} \sqrt{1 + |\operatorname{grad} w|^2}\, dx + \int\limits_{\partial\Omega \cap B_j} |g - w|\, dH_{n-1} \,\middle|\, w \in C(\bar{\Omega} \cap B_j) \cap C^\omega(\Omega \cap B_j)\right\}. \tag{4.3}$$

Passando, secondo quanto visto nel § 2, ad una opportuna successione crescente di interi $j(k)$ per cui il $\lim_k f_{j(k)}(x)$ esista per quasi ogni $x \in \Omega$, avremo che gli eventuali insiemi P e N di punti di Ω in cui il $\lim_k f_{j(k)}$ è $+\infty$ o $-\infty$, oltre ad avere frontiera di misura minima in Ω, come visto in § 2, avranno, per la ipotesi (4.1), frontiera di misura minima in R^n. Per questo basterà verificare che $P \times R$ ha frontiera di misura minima in R^{n+1}, cioè provare che $\forall\, E$ misurabile di R^{n+1} tale che $(P \times R)\, \Delta\, E \subset\subset R^{n+1} \forall$ aperto A di R^{n+1} limitato tale che $(P \times R)\, \Delta\, E \subset\subset A$ dovrà aversi

$$|D\varphi_{P \times R}|(A) \leq |D\varphi_E|(A). \tag{4.4}$$

Per verificare la (4.4) basterà verificare, grazie appunto alla (4.1) la quale assicura la validità di

$$|D\varphi_{E \cap (\Omega \times R)}|(A) \leq |D\varphi_E|(A), \quad \text{(cfr. II diseguaglianza, pag. 362 di [10])} \tag{4.5}$$

che vale

$$|D\varphi_{P \times R}|(A) \leq |D\varphi_{E \cap (\Omega \times R)}|(A). \tag{4.6}$$

Osserviamo che poichè $P \subset \Omega$ vale la implicazione

$$(P \times R)\, \Delta\, E \subset\subset R^{n+1} \Rightarrow (P \times R)\, \Delta\, \big(E \cap (\Omega \times R)\big) \subset\subset R^{n+1}. \tag{4.7}$$

Se indichiamo con τ un numero reale verificante

$$\begin{aligned} \tau > \sup\, &\{g(x) | \exists t \in R,\ (x, t) \in (P \times R)\, \Delta\, E\} - \\ &- \inf\, \{t | \exists x \in R^n,\ (x, t) \in (P \times R)\, \Delta\, E\}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

e se indichiamo con $E_j^{(\tau)}$ l'insieme $\{(x, t) | x \in \Omega \cap B_j, t < f_j(x) - \tau\}$ avremo, se $B_j \times R \supset A \supset\supset (P \times R) \Delta E$, per la proprietà di minimo di f_j,

$$|D\varphi_{E_j^{(\tau)}}|(A) \leqslant |D\varphi_{E \cap (\Omega \times R)}|(A) \tag{4.9}$$

e quindi anche, posto $E^{(\tau)} = \lim_k E_{j(k)}^{(\tau)}$,

$$|D\varphi_{E^{(\tau)}}|(A) \leqslant |D\varphi_{E \cap (\Omega \times R)}|(A) . \tag{4.10}$$

Da quest'ultima, passando al limite per $\tau \to +\infty$, abbiamo

$$|D\varphi_{P \times R}|(A) \leqslant |D\varphi_{E \cap (\Omega \times R)}|(A) . \tag{4.11}$$

che insieme con la (4.5) dà la (4.4).

Se aggiungiamo alle ipotesi fatte su Ω il fatto di non contenere insiemi con frontiera di misura minima in R^n si può essere certi che gli insiemi P e N sono vuoti, ciò che implica che

$$\lim_k f_{j(k)}(x) = f(x) \in R , \qquad \forall x \in \Omega . \tag{4.12}$$

e che quindi f è analitica in Ω e ivi soluzione classica della equazione delle superficie minime.

Osserviamo che nel caso particolare in cui Ω è convesso la ipotesi di non contenere insiemi di frontiera minima in R^n equivale a dire che il convesso non è un semispazio.

Per quanto riguarda infine l'assunzione del dato g da parte di f si osservi che, per quanto è stato visto in [10] (cfr. la dimostrazione del Teorema 1), non può aversi l'esistenza di una successione $x_h \in \Omega$, $x_h \to x \in \partial\Omega$, $\lim_h f(x_h) = l \in R$, $l \neq g(x)$. Resta da vedersi che non può essere, per le stesse ipotesi sulla x_h, che $\lim_h f(x_h) = +\infty$. In quest'ultimo caso la successione di insiemi $E^{(h)} = \{(x, t) | x \in \Omega, t < f(x) - f(x_h)\}$, aventi frontiera di misura minima nella palla $B_1(x, 0)$ non appena $f(x_h) > \max\{g(y) | y \in \bar{B}_1(x) \cap \partial\Omega\}$ verificherebbe, non appena $|x_h - x| < \frac{1}{2}$, la diseguaglianza

$$\operatorname{mis} E^{(h)} \cap B_1(x, 0) \geqslant \frac{\omega_n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} , \tag{4.13}$$

(cfr. Teor. 2.9 di [1]). La (4.13) è assurda perchè al tendere di $h \to \infty$ si ha $E^{(h)} \to \emptyset$.

Possiamo perciò enunciare il seguente teorema di esistenza per il problema al contorno su aperti non limitati:

TEOREMA 3. *Se Ω è aperto non limitato di R^n con frontiera non vuota e localmente lipschitziana, se vale* (4.1) *e Ω non contiene insiemi con frontiera di misura minima in R^n allora per ogni g continua su $\partial\Omega$ esiste f analitica su Ω, ivi soluzione dell'equazione delle superficie minime e verificante la* (4.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. DE GIORGI - F. COLOMBINI - L. C. PICCININI, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*, Pubbl. Classe di Scienze Scuola Norm. Sup. Pisa (1972).

[2] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1964), pp. 517-542.

[3] M. MIRANDA, *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1965), pp. 626-665.

[4] H. FEDERER, *The singular sets of area minimizing...*, Bull. A. M. S. (1970), pp. 767-771.

[5] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Padova (1967), pp. 238-257.

[6] E. BOMBIERI - E. GIUSTI, *Harnack's inequality for elliptic equations on minimal surfaces*, Inv. Math. (1972), pp. 24-46.

[7] D. TRISCARI, *Sull'esistenza di cilindri con frontiera di misura minima*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1963), pp. 387-399.

[8] W. H. FLEMING, *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1962), pp. 69-90.

[9] E. DE GIORGI, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1965), pp. 79-85.

[10] M. MIRANDA, *Un principio di massimo forte ...*, Rend. Sem. Mat. Padova (1971), pp. 355-366.