ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. FOIAS
J. C. SAUT

Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 10, nº 1 (1983), p. 169-177
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_1_169_0>

Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires.

C. FOIAS - J. C. SAUT

Introduction.

On considère les équations de Navier-Stokes stationnaires, non homogènes, dans un ouvert Ω borné de $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3$ de frontière Γ:

$$(0.1)\qquad \begin{cases} -\nu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u + \operatorname{grad} p = f \text{ dans } \Omega \text{ où } D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \Gamma . \end{cases}$$

On sait depuis Leray [8] que l'équation (0.1) équivaut à une équation fonctionnelle en u seul,

$$(0.2)\qquad N_{\nu,\varphi}(u) = f , \quad \text{dans un cadre fonctionnel convenable} .$$

L'étude de l'équation (0.2) a été faite systématiquement dans [4], [5], [6]. En particulier, il est montré dans [5] que l'ensemble des valeurs critiques de (0.2) est un fermé d'intérieur vide, ce qui conduit à un théorème de finitude générique pour les solutions de (0.2).

Notre but ici est de préciser ces résultats; utilisant la structure de l'équation (0.2), nous donnons d'abord une réduction assez simple de (0.2) à une équation analytique dans un espace $\mathbf{R}^m$ (l'entier m étant uniforme pour les f dans une boule d'un espace fonctionnel ad hoc).

Ceci nous permet de retrouver très simplement la nature de l'ensemble $N_{\nu,\varrho}^{-1}(f)$ donnée dans [6]: c'est un ensemble C-analytique au sens de Bruhat-Whitney [3]. On en déduit également que l'ensemble des points critiques de $N_{\nu,\varphi}$ est un « joli ensemble analytique » au sens de Ruget [10]: c'est localement le produit d'un ensemble analytique de $\mathbf{R}^m$ par un espace de Hilbert

Pervenuto alla Redazione il 24 Aprile 1982.

de dimension infinie; nous montrons également qu'il ne contient pas de points isolés, autrement dit, s'il n'est pas vide, il contient au moins une courbe analytique.

Enfin en utilisant les résultats d'Hironaka [7] nous arrivons au Théorème de généricité «précisé»: quitte à bouger les m premières composantes de f pour éviter un ensemble sous-analytique de $\mathbf{R}^m$ de dimension $\leqq m-1$, l'ensemble des solutions de (0.2) est fini.

1. – Notations.

On considère un ouvert borné «régulier» Ω de $\mathbf{R}^n$, $n=2,3$ de frontière $\Gamma=\bigcup \Gamma_i$, où Γ_i, $i=1,\dots,k$ désignent les composantes connexes de Γ.

Pour $s\in\mathbf{R}$ on notera $H^s(\Omega)$ (resp $H^s(\Gamma)$) l'espace de Sobolev usuel construit sur $L^2(\Omega)$ (resp $L^2(\Gamma)$), et $\mathbf{H}^s(\Omega)=H^s(\Omega)^n$, $\mathbf{H}^s(\Gamma)=H^s(\Gamma)^n$, $\mathbf{L}^2(\Omega)=L^2(\Omega)^n$. L'espace des $\varphi\in\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$ tels que

(1.1) $\int_{\Gamma_i}\varphi\cdot\boldsymbol{n}\,d\Gamma_i=0\quad i=1,\dots,k,\quad \boldsymbol{n}=$ normale extérieure à Γ, sera noté par $\dot{\mathbf{H}}^{3/2}(\Gamma)$.

Comme d'habitude (voir par exemple (12)), on note

$$\mathcal{V}=\{v\in C_0^\infty(\Omega)^n,\ \operatorname{div}u=0\}\ ,$$

$V=$ adhérence de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $H=$ adhérence de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$; les normes correspondantes seront notées $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$. P désignera la projection orthogonale sur H dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $A=-P\Delta$ sera l'opérateur de Stokes, non borné dans H, de domaine $D(A)=\mathbf{H}^2(\Omega)\cap V$: enfin $B(u,v)=P[(u\cdot\operatorname{grad})v]$ pour $u,v\in D(A)$.

Soient alors les équations (de Navier-Stokes stationnaires) (0.1) où

$$\varphi\in\dot{\mathbf{H}}^{3/2}(\Gamma)\ ,\qquad f\in L^2(\Omega)\ . \tag{1.2}$$

On sait (voir [6] p. 344) que pour tout $\delta>0$, il existe un opérateur de relèvement $\Lambda_\delta\in\mathcal{L}(\dot{\mathbf{H}}^{3/2}(\Gamma),\mathbf{H}^2(\Omega))$ tel que

$$\begin{cases}\operatorname{div}\Lambda_\delta\varphi=0 & \text{dans } \Omega\\ \Lambda_\delta\varphi=\varphi & \text{sur } \Gamma\\ |b(u,\Lambda_\delta\varphi,u)|\leqq\delta\|\varphi\|_{\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)}\|u\|^2\end{cases} \tag{1.3}$$

$$\forall\varphi\in\dot{\mathbf{H}}^{3/2}(\Gamma)\ ,\qquad \forall u\in V$$

où $b(u,v,w)=(B(u,v),w)_H$.

Pour un $\delta > 0$, à choisir plus tard, le problème (0.1), (1.2) est donc équivalent à

$$(1.4) \quad N_{\nu,\varphi}(u) \underset{\text{def}}{=} \nu A u + B(u + \Lambda_\delta \varphi, u + \Lambda_\delta \varphi) - \nu A \Lambda_\delta \varphi = f \quad \text{donné dans } H.$$

2. – Réduction des équations de Navier-Stokes à une équation analytique en dimension finie.

Notons d'abord P_m la projection orthogonale dans H sur l'espace engendré par les m fonctions propres correspondant aux m premières valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de A, et $Q_m = I - P_m$.

Soit m entier, à fixer plus tard. On définit:

$$\Phi : D(A) \to D(A)$$

par $\Phi(u) = v$ où $P_m v = \nu P_m u$ et $Q_m v = A^{-1} Q_m N(u)$ et où pour simplifier on a noté $N = N_{\nu,\varphi}$.

Si $f \in B_R = \{w \in H, |w| < R\}$, on sait (voir [12] par exemple) que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqq \varrho(R, \nu, \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)})$.

LEMME 1. *Pour $m \geqq C(\varphi, R)$, Φ est un difféomorphisme analytique de*

$$B_\varrho = \{u \in D(A), \|u\|_{H^2(\Omega)} < \varrho\} \qquad \textit{sur } \Phi(B_\varrho)\,.$$

PREUVE. L'application Φ est clairement analytique. On voit facilement que sa dérivée en u est inversible si et seulement si

$$\nu I + A^{-1}\big(Q_m B(u, Q_m \cdot) + Q_m B(Q_m \cdot, u) + Q_m B(Q_m \cdot, \Lambda_\delta \varphi) + Q_m B(\Lambda_\delta \varphi, Q_m \cdot)\big)$$

est inversible.

Mais, pour tout $h \in H$ et w, $u \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\big(Q_m(B(u, Q_m w) + B(Q_m w, u) + B(Q_m w, \Lambda_\delta \varphi) &+ B(\Lambda_\delta \varphi, Q_m w)), h\big)\Big| \\
&\leqq c_1 |h| \big(|u|^{1/4} |Au|^{3/4} \|Q_m w\| + \|Q_m w\| \, \|u\|^{1/2} |Au|^{1/2} \\
&\quad + |\Lambda_\delta \varphi|^{1/4} |A \Lambda_\delta \varphi|^{3/4} \|Q_m w\| + \|Q_m w\| \, \|\Lambda_\delta \varphi\|^{1/2} |A \Lambda_\delta \varphi|^{1/2}\big)
\end{aligned}$$

(d'après des inégalités classiques (cf. [5]))

$$\leqq c_2\big(\|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)}, R\big) |h| \, \frac{|AQ_m w|}{\lambda_{m+1}^{1/2}}$$

puisque $\|Q_m w\| \leqq (1/\lambda_{m+1}^{1/2}) |AQ_m w|$.

Finalement,

$$\|A^{-1}(Q_mB(u, Q_m\cdot) + Q_mB(Q_m\cdot, u) + Q_mB(Q_m\cdot, \Lambda_\delta\varphi) + Q_mB(\Lambda_\delta\varphi, Q_m\cdot))\|_{\mathfrak{L}(D(A), D(A))}$$
$$\leqq c_2(\|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)}, R)\times\frac{1}{\lambda_{m+1}^{1/2}} < \nu \qquad \text{si } m \geqq c(\varphi, R)\,.$$

Pour un tel m, Φ est donc un difféomorphisme analytique local de B_ϱ sur $\Phi(B_\varrho)$.

Montrons que $\Phi\colon B_\varrho \to \Phi(B_\varrho)$ *est propre.* Supposons donc que $\Phi(u) = \nu u + Q_mA^{-1}B(u + \Lambda_\delta\varphi, u + \Lambda_\delta\varphi)$ appartienne à K compact de $D(A)$ contenu dans $\Phi(B_\varrho)$.

Puisque u est borné dans $D(A)$, $B(u + \Lambda_\delta\varphi, u + \Lambda_\delta\varphi)$ est borné dans H, donc $A^{-1}B(u + \Lambda_\delta\varphi, u + \Lambda_\delta\varphi)$ appartient à un compact de $D(A)$, ainsi que

$$\nu u = \Phi(u) - Q_mA^{-1}B(u + \Lambda_\delta\varphi, u + \Lambda_\delta\varphi)\,.$$

D'après un résultat classique (cf. [1], [2]), le cardinal de $\Phi^{-1}(v)$ est constant pour tout $v \in \Phi(B_\varrho)$.

Montrons que $\Phi^{-1}(\Phi(0)) = 0$, établissant ainsi que Φ est un difféomorphisme analytique *global* de B_ϱ sur $\Phi(B_\varrho)$.

Soit pour cela, $u \in D(A)$ tel que

$$\Phi(u) = \nu(P_mu + Q_mu) + Q_mA^{-1}B(u + \Lambda_\delta\varphi, u + \Lambda_\delta\varphi) - \nu Q_m\Lambda_\delta\varphi =$$
$$= \Phi(0) = Q_mA^{-1}B(\Lambda_\delta\varphi, \Lambda_\delta\varphi) - \nu Q_m\Lambda_\delta\varphi\,.$$

Alors $P_mu = 0$, et

$$\nu Q_mu + Q_mA^{-1}(B(u, u) + B(u, \Lambda_\delta\varphi) + B(\Lambda_\delta\varphi, u)) = 0$$

i.e.

$$\nu Au + Q_mB(u, u) + Q_mB(u, \Lambda_\delta\varphi) + Q_mB(\Lambda_\delta\varphi, u) = 0\,. \tag{2.1}$$

En multipliant scalairement (2.1) par $Q_mu = u$, il vient

$$\nu\|u\|^2 + b(u, u, u) + b(u, \Lambda_\delta\varphi, u) + b(\Lambda_\delta\varphi, u, u) = 0$$

d'où

$$\nu\|u\|^2 = -b(u, \Lambda_\delta\varphi, u)\,. \tag{2.2}$$

Mais d'après (1.3), on a $|b(u, \Lambda_\delta\varphi, u)| \leqq \delta\|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)}\|u\|^2$, en sorte que (2.2) implique $u = 0$ dès que

$$\delta < \frac{\nu}{\|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)}}, \qquad \textit{ce que nous supposerons désormais}\,. \tag{2.3}$$

Revenons à l'équation (1.4). D'après ce qui précède, elle équivaut, pour $f \in B_R$, à

$$(2.4) \qquad N_{\nu,\varphi}\Phi^{-1}(v) = \\ = \nu A\Phi^{-1}(v) + B(\Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi, \Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi) - \nu A\Lambda_\delta\varphi = f.$$

Soit, puisque

$$P_m N_{\nu,\varphi}(u) = AP_m v + P_m B(\Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi, \Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi) - \nu P_m A\Lambda_\delta\varphi$$

et $Q_m N_{\nu,\varphi}(u) = AQ_m v$, à

$$(2.5) \qquad Av + P_m B(\Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi, \Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi) - \nu P_m A\Lambda_\delta\varphi = f.$$

Soit encore à

$$(2.6) \qquad Av + P_m M(v) = f$$

où

$$(2.7) \qquad M(v) \underset{\text{déf}}{=} B(\Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi, \Phi^{-1}(v) + \Lambda_\delta\varphi) - \nu A\Lambda_\delta\varphi.$$

Posant $w = Av$, (2.6) équivaut encore à $Q_m w = Q_m f$ et

$$(2.8) \qquad P_m w + P_m M(A^{-1}P_m w + A^{-1}Q_m f) = P_m f.$$

Ceci nous permet de retrouver très simplement le résultat suivant dû à Foias-Temam [6]:

THÉORÈME 1. *L'ensemble $N_{\nu,\varphi}^{-1}(f)$ est analytiquement isomorphe à un ensemble C-analytique de $\mathbb{R}^m$.*

DÉMONSTRATION. L'ensemble des solutions de (2.8) est un ensemble C-analytique S de $P_m H \simeq \mathbb{R}^m$ (ensemble analytique réel défini *globalement* par une équation analytique).

On a alors $N_{\nu,\varphi}^{-1}(f) = \Phi^{-1}A^{-1}(S + Q_m f)$.

3. – Structure de l'ensemble des points critiques de $N_{\nu,\varphi}$.

Désignons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points critiques de $N_{\nu,\varphi}$, i.e. l'ensemble des u de $D(A)$ tel que la dérivée de $N_{\nu,\varphi}$ en u ne soit pas surjective.

Les résultats du n° 2 permettent alors de préciser la structure de $\mathcal{S}$. On rappelle que B_ϱ désigne l'ensemble $\{u \in D(A), \|u\|_{H^2(\Omega)} < \varrho\}$.

THÉORÈME 2. (i) *$\mathcal{S} \cap B_\varrho$ est analytiquement isomorphe à l'ensemble analytique $\Sigma \oplus Q_m D(A)$ où Σ désigne l'ensemble C-analytique des points singuliers de l'application $\xi \mapsto \xi + P_m M(A^{-1}\xi + Q_m^{-1} f)$ considérée dans* (2.8).

(ii) *On suppose ici pour simplifier que $\varphi = 0$. Alors $\mathcal{S}$ ne contient pas de points isolés; en particulier, si $\mathcal{S} \neq \emptyset$, il contient au moins un arc analytique.*

DÉMONSTRATION. (i) résulte immédiatement des considérations du n° 2. Démontrons le point (ii).

Notons $N = N_\nu$. Soit $u_0 \in D(A)$ un point singulier de N. Alors il existe $v_1, \ldots, v_K$, linéairement indépendants dans $D(A)$ tels que

$$\nu A v_k + B(u_0, v_k) + B(v_k, u_0) = 0 \qquad k = 1, \ldots, K . \tag{3.1}$$

Soit v un quelconque des v_k, et considérons les vecteurs de $D(A)$ $w_\pm = u_0 \pm \varepsilon v$ où $\varepsilon > 0$. On vérifie immédiatement que $w_\pm$ satisfait l'équation

$$\nu A w_\pm + B(w_\pm, w_\pm) = f_0 + \varepsilon^2 B(v, v) \tag{3.2}$$

où

$$f_0 = \nu A u_0 + B(u_0, u_0) . \tag{3.3}$$

On remarque que $B(v, v) \neq 0$; en effet, sinon, compte tenu de (3.1) et (3.3), pour tout λ réel, $u_0 + \lambda v$ vérifierait

$$N(u_0 + \lambda v) = f_0 , \quad \text{ce qui est absurde puisque } N \text{ est propre} .$$

Posons $f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon^2 B(v, v)$. On a donc exhibé des forces f_ε, arbitrairement voisines de f_0 telles que $N^{-1}(f_\varepsilon)$ ait *au moins* 2 *éléments* $u_0 \pm \varepsilon v$ arbitrairement voisins de u_0.

Supposons alors que u_0 soit un point singulier isolé; puisque N est une application non linéaire de Fredholm d'indice 0 et propre (cf. [5]), un résultat de Plastock [9] montre que N est un homéomorphisme local au voisinage de u_0; mais cela contredit ce qui prècède.

Si $\mathcal{S}$ est non vide il contient donc une variété analytique de dimension 1 d'après (i).

4. – Théorèmes de finitude générique précisés.

Nous précisons ici la structure du fermé rare mentionné dans l'introduction. Nous donnons notre résultat principal sous la forme d'un théorème de finitude générique des solutions des équations de Navier-Stokes stationnaires.

THÉORÈME 3. *Soient* $\nu > 0$, $\varphi \in \dot{\mathrm{H}}^{3/2}(\Gamma)$, $R > 0$ *fixés.*
Soit

$$B_R = \{v \in H,\ |v| < R\}.$$

Il existe alors un entier $m = m(R, \nu, \|\varphi\|_{\mathrm{H}^{3/2}(\Gamma)})$ *tel que pour tout élément* ξ_m *de* $Q_m H \cap B_R$ *on puisse trouver un ensemble sous-analytique* $S(\xi_m)$ *dans* $P_m H \cap B_{(R^2-|\xi|^2)^{1/2}}$, *de dimension* $\leqq m-1$, *tel que pour tout*

$$f \in \Big((P_m H \oplus \{\xi_m\}) \cap B_R\Big) \diagdown \Big(S(\xi_m) \oplus \{\xi_m\}\Big),$$

l'ensemble $N_{\nu,\varphi}^{-1}(f)$ *ait un nombre fini impair d'éléments.*

REMARQUE 1. Rappelons [7] qu'un ensemble sous-analytique de dimension $d < m$ dans $P_m H \oplus \{\xi_m\} \simeq \mathbb{R}^m$ se stratifie en sous-variétés (lisses) analytiques, de dimension au plus d; c'est donc un sous ensemble « très petit » de $\mathbb{R}^m$.

Le Théorème 3 implique que, pour un f donné dans H, quitte à bouger un peu $P_m f$ pour éviter un ensemble sous-analytique de $P_m H$, $N_{\nu,\varphi}^{-1}(f)$ est fini, l'entier m étant uniforme pour les f d'une boule de H.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. On a vu dans le n° 2 que l'équation (1.4) équivaut à l'équation (2.8).

Fixons $\xi_m = Q_m f$ dans $Q_m H \cap B_R$ (les notations sont celles du *n*° 2). Désignons par

$$\psi\colon P_m w \mapsto P_m w + P_m M(A^{-1} P_m w + A^{-1}\xi_m)$$

considérée comme application de $\psi^{-1}(B_{\sqrt{R^2-|\xi_m|^2}})$ sur $B_{\sqrt{R^2-|\xi_m|^2}}$ (boules dans $P_m H \simeq \mathbb{R}^m$).

La projection sur $P_m H$ de l'ensemble des valeurs critiques de $N_{\nu,\varphi}$ appartenant à $(P_m H \oplus \{\xi_m\}) \cap B_R$ coïncide avec l'ensemble $S(\xi_m)$ des valeurs critiques de ψ. L'application ψ est évidemment analytique (grâce à l'analyticité de $N_{\nu,\varphi}$) et propre. L'ensemble $S(\xi_m)$ est donc sous-analytique dans $B_{\sqrt{R^2-|\xi_m|^2}}$, comme image analytique et propre d'un ensemble analytique (voir [7]). D'après le Théorème de Sard, sa dimension est au plus égale à $m-1$.

Le Théorème est donc démontré, l'assertion sur l'imparité de $N_{\nu,\varphi}^{-1}(f)$ résultant d'un argument de degré topologique, comme dans [11]. ∎

Dans [5] il est établi que l'ensemble $\bigcup_{\nu>0} N_{\nu,\varphi}^{-1}(f)$ est, pour $\varphi \in \dot{\mathrm{H}}^{3/2}(\Gamma)$ fixé et f appartenant à un ensemble résiduel de H, une variété analytique de dimension 1.

Ce résultat peut être précisé de la manière suivante:

THÉORÈME 4. *Soient* $\nu_0 > 0$, $\varphi \in \dot{\mathrm{H}}^{3/2}(\Gamma)$, $R > 0$ *fixés. Soit* $B_R = \{v \in H,\ |v| < R\}$. *Il existe alors un entier* $m = m(R, \nu_0, \|\varphi\|_{\mathrm{H}^{3/2}(\Gamma)})$ *tel que pour tout élément* ξ_m *de* $Q_m H \cap B_R$, *on puisse trouver un ensemble sous-analytique* $S(\xi_m)$ *dans* $P_m H \cap B_{(R^2 - |\xi_m|^2)^{1/2}}$, *de dimension* $\leqq m-1$ *tel que pour tout* $f \in \big((P_m H \oplus \{\xi_m\}) \cap B_R\big) \setminus \big(S(\xi_m) \oplus \{\xi_m\}\big)$, *l'ensemble* $\bigcup_{\nu > \nu_0} N^{-1}_{\nu,\varphi}(f)$ *soit une variété analytique de dimension* 1.

DÉMONSTRATION. Elle suit de près celle du Théorème 3 en considérant l'application

$$N_\varphi \colon]\nu_0, \infty[\times D(A) \to H$$

définie par

$$N_\varphi(\nu, u) = N_{\nu,\varphi}(u)\,,$$

et la famille

$$\Phi_\nu \colon D(A) \to D(A)\,,$$

$$\Phi_\nu(u) = \nu P_m u + A^{-1} Q_m N_{\nu,\varphi}(u)\,.$$

On vérifie que les Φ_ν, $\nu \geqq \nu_0$ sont des difféomorphismes analytiques de B_ϱ sur $\Phi_\nu(B_\varrho)$ où $\varrho = \varrho(R, \varphi, \nu_0)$ et $m \geqq m_0(R, \varphi, \nu_0)$ et on conclut comme dans le Théorème 3.

REMARQUE 2. Ce théorème a une conséquence interessante concernant le problème fondamental des bifurcations des solutions stationnaires. Notamment il montre que ces bifurcations ne sont pas génériques une fois que le nombre des paramètres controlés est assez grand.

REFERENCES

[1] S. BANACH - S. MAZUR, *Über mehrdentige Abbildungen*, Studia Math., **5** (1934), pp. 174-178.

[2] YV. G. BORISOVICH - V. Q. ZVYAGIN - YV. I. SAPRONOV, *Nonlinear Fredholm maps and the Leray-Schauder theory*, Russian Math. Surveys, **32**, 4 (1977), pp. 1-54.

[3] F. BRUHAT - H. WHITNEY, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels*, Comment. Math. Helv., **33** (1959), pp. 132-160.

[4] C. FOIAS - R. TEMAM, *On the stationary statistical solutions of the Navier-Stokes equations and turbulence*, Publications Mathématiques d'Orsay, 1975.

[5] C. FOIAS - R. TEMAM, *Structure of the set of stationnary solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., **30** (1977), pp. 149-164.

[6] C. FOIAS - R. TEMAM, *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Série IV, **5**, 1 (1978), pp. 29-63.

[7] H. HIRONAKA, *Subanalytic sets*, in *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of P. Akizuki, Kinokuya, Tokyo, 1973, pp. 342-493.

[8] J. LERAY, *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl., **13** (1934), pp. 331-418.

[9] R. PLASTOCK, *Fredholm operators of index zero*, Proc. Amer. Math. Soc., **68** (1978), pp. 317-322.

[10] G. RUGET, *A propos des cycles analytiques de dimension infinie*, Invent. Math., **8** (1969), pp. 267-312.

[11] J. C. SAUT - R. TEMAM, *Generic properties of Navier-Stokes equations; genericity with respect to the boundary values*, Indiana Univ. Math. J., **29**, no. 3 (1980), pp. 427-446.

[12] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

Department of Mathematics
Indiana University,
Bloomington, Ind. 47401

Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay, France