

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

DENIS SERRE

**Équations de Navier-Stokes stationnaires avec données peu régulières**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 4 (1983), p. 543-559

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1983\\_4\\_10\\_4\\_543\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_4_543_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Equations de Navier-Stokes stationnaires avec données peu régulières.

DENIS SERRE

### 0. – Introduction.

Nous nous intéressons dans la première partie de ce texte (§ 1 et 2) à l'existence d'une solution  $(\mathbf{u}, p)$  de l'équation de Navier-Stokes stationnaire, lorsque les données  $f$  et  $\varphi$  sont peu régulières:

$$(N-S) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $R^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ) et que le bord  $\partial\Omega$  est une sous-variété fermée de codimension 1, de classe  $C^2$ . Les composantes connexes du bord sont notées  $\Gamma_k$ ,  $0 \leq k \leq N$ .

Rappelons que  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) désigne l'espace des (classes de) fonctions réelles mesurables sur  $\Omega$  dont la puissance  $p$ -ième est intégrable; muni de la norme  $|v|_p = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$ , c'est un espace de Banach. L'ensemble  $W^{1,p}(\Omega)$  des éléments de  $L^p(\Omega)$  dont les dérivées premières (au sens des distributions) sont également dans  $L^p(\Omega)$  est également un espace de Banach dont la norme est

$$\|v\|_p = \left( |v|_p^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_p^p \right)^{1/p}.$$

L'application linéaire définie sur  $C^1(\Omega)$  à valeurs dans  $L^p(\partial\Omega)$ , qui fait correspondre à  $v$  sa restriction à  $\partial\Omega$ , se prolonge par continuité à  $W^{1,p}(\Omega)$  en un morphisme noté  $\gamma$ . L'image de  $W^{1,p}(\Omega)$  par  $\gamma$  est notée  $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ ;

Pervenuto alla Redazione il 16 Marzo 1983.

c'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme  $\{\Phi_p\} = \text{Inf}_{\gamma v = \Phi} \|v\|_p$ . D'autre part, l'espace des distributions sur  $\Omega$  qui s'écrivent sous la forme

$$f + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad f, f_i \in L^p(\Omega)$$

est noté  $W^{-1,p}(\Omega)$ . C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{-1,p} = \text{Inf}_{v=f+\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}} \left( |f|_p^p + \sum_{i=1}^n |f_i|_p^p \right)^{1/p}.$$

De plus, on pose  $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \cap \text{Ker } \gamma$ . Enfin, si  $X$  est un espace de Banach, on pose  $\mathbf{X} = X^n$ , et on utilisera la même notation pour la norme dans  $\mathbf{X}$  et la norme dans  $X$ .

L'existence d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est bien connue (Leray [1], Hopf [2]) lorsque  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$ , et  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,2}(\Gamma)$  et que les conditions suivantes sont vérifiées ( $\mathbf{n}(\sigma)$  étant la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  au point  $\sigma$ ):

$$(0.1) \quad \int_{\Gamma_k} \boldsymbol{\varphi}(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) \, d\sigma = 0, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Nous prouvons ci-dessous l'existence d'une solution de l'équation de Navier-Stokes lorsque  $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)$ ,  $\varphi \in \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Omega)$ ,  $n/2 < p < 2$ , les conditions (1) ci-dessus étant satisfaites. La solution  $\mathbf{u}(x)$  se trouve dans l'espace auquel on s'attend selon les résultats de Cattabriga [3], c'est-à-dire  $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ . En fait, si  $\mathbf{u}^0$  est la solution du problème de Stokes linéaire dont les données sont  $\mathbf{f}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$ , alors la différence  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^0$  se trouve dans un espace  $\mathbf{W}^{1,q}(\Omega)$  avec  $q > p$ .

La difficulté essentielle du problème est l'obtention d'une estimation a priori. Pour cela, il faut « détruire » le terme non-linéaire, en deux étapes. Premièrement, on construit un relèvement  $\mathbf{u}^*$  de  $\varphi$  à divergence nulle (Lemme 3) tel que le champ  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^*$  soit solution d'une équation de Navier-Stokes homogène, perturbée par le terme linéaire  $(\mathbf{u}^* \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \cdot \nabla \mathbf{u}^*$ , et dont le second membre est dans  $\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$ . On applique ensuite la méthode de Hopf, avec une légère modification due au manque de régularité de  $\mathbf{u}^*$ .

Cette méthode nous permet dans la deuxième partie de l'article de traiter quelques problèmes de mécanique des fluides pour lesquels le bord du domaine, qui n'est pas nécessairement de classe  $C^2$ , est animé d'un mouvement uniforme de translation ou de rotation. Quelques exemples sont

développés aux paragraphes 3 et 4, l'écoulement dans une cavité et le problème de Taylor. C'est M. T. B. Benjamin qui a attiré notre attention sur le fait que les résultats d'existence connus pour les équations de Navier-Stokes stationnaires (cf. par exemple [4]) ne s'appliquaient pas à l'écoulement de Taylor, et nous l'en remercions.

Enfin, nous considérons au paragraphe 5 le problème d'évolution. On indique comment le résoudre lorsque  $\mathbf{f} \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}^{-1,p}(\Omega))$  et  $\Phi \in \mathcal{W}^{1,\infty}(0, T; \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\Omega))$  où  $\mathcal{W}^{1,\infty}(0, T)$  est l'espace des fonctions lipschitziennes sur  $(0, T)$ . Ces hypothèses peuvent être affaiblies pour les problèmes de la cavité et de Taylor; dans ces deux cas

$$\Phi \in \mathcal{W}^{1,2}(0, T; \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\Omega)), \quad p \geq \frac{4n}{n+4} \text{ suffit.}$$

Il semble que ces résultats ne soient pas optimaux: les hypothèses sur  $\Phi$  et  $\mathbf{f}$ , très fortes, sont dues à l'utilisation brutale de la technique adaptée au cas stationnaire.

### 1. - Existence.

**THÉORÈME 1.1.** Soient  $\mathbf{f} \in \mathcal{W}^{-1,p}(\Omega)$  et  $\varphi \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\Omega)$  ( $n/2 < p < 2$ ) vérifiant les conditions de flux à travers les parois:

$$(1.1) \quad \int_{\Gamma_k} \varphi(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) d\sigma = 0 \quad 0 \leq k \leq N.$$

Il existe une solution  $\mathbf{u} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $p \in L^2(\Omega)$  de l'équation de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_i + \operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma \mathbf{u} = \varphi. \end{cases}$$

De plus, si  $\mathbf{u}^0$  désigne la solution du problème de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u}^0 + \mathbf{grad} p^0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma \mathbf{u}^0 = \varphi. \end{cases}$$

la différence  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^0$  est dans  $\mathcal{W}^{1,q}(\Omega)$  avec  $1/q = 2/p - 2/n$ ,  $q > p$ .

LEMME 1.2. *S'il existe un relèvement  $\mathbf{v} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  de  $\boldsymbol{\varphi}$  (i.e.  $\gamma\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}$ ), à divergence nulle, et une pression  $\pi \in L^p(\Omega)$  tels que  $-\nu \Delta v_i + \operatorname{div}(v_i \mathbf{v}) + \partial\pi/\partial x_i - f_i \in \mathcal{W}^{-1,r}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $p \leq r \leq 2$ , alors il existe un relèvement  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ , à divergence nulle, de  $\Omega$ , et une pression  $\bar{\pi} \in L^p(\Omega)$  tels que*

$$-\nu \Delta w_i + \operatorname{div}(w_i \mathbf{w}) + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,s}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \quad (\text{donc } s > r).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.2. D'après Cattabriga [3], il existe une solution  $(\mathbf{v}', \pi') \in \mathcal{W}^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega)$  du problème de Stokes linéaire suivant:

$$\begin{cases} -\nu \Delta v'_i + \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} = -\nu \Delta v_i + \operatorname{div}(v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial \pi}{\partial x_i} - f_i & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma \mathbf{v}' = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Posons  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ ,  $\bar{\pi} = \pi - \pi'$ . Puisque  $r \geq p$ , on a  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  et  $\bar{\pi} \in L^p(\Omega)$ . De plus:

$$-\nu \Delta w_i + \operatorname{div}(w_i \mathbf{w}) + \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_i} - f_i = \operatorname{div}(v'_i \mathbf{v}' + v_i \mathbf{v}' + v'_i \mathbf{v}).$$

Cependant, d'après le théorème d'immersion de Sobolev, on a

$$\mathbf{v}' \in L^a(\Omega), \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}, \quad \text{et } \mathbf{v} \in L^b(\Omega), \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{a}.$$

Il s'ensuit

$$\operatorname{div}(v'_i \mathbf{v}' + v'_i \mathbf{v} + v_i \mathbf{v}') \in W^{-1,s}(\Omega), \quad \text{avec } \frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n},$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 1.3. *Il existe un relèvement  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ , à divergence nulle, de  $\boldsymbol{\varphi}$ , et une pression  $\pi^* \in L^p(\Omega)$  tels que*

$$-\nu \Delta u_i^* + \operatorname{div}(u_i^* \mathbf{u}^*) + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,2}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.3. D'après Cattabriga [3], la solution

$(\mathbf{u}^0, p_0)$  du problème de Stokes linéaire de donnée  $\mathbf{f}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$  existe, avec  $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $p_0 \in L^p(\Omega)$ . Alors

$$-\nu \Delta \mathbf{u}_i^0 + \operatorname{div} (\mathbf{u}_i^0 \mathbf{u}^0) + \frac{\partial p_0}{\partial x_i} - f_i = \operatorname{div} (\mathbf{u}_i^0 \mathbf{u}^0) \in W^{-1,q}(\Omega)$$

avec

$$\frac{1}{q} = \frac{2}{p} - \frac{2}{n}, \quad q > p.$$

En appliquant le Lemme 1.2 et en raisonnant par récurrence, on obtient une suite  $(\mathbf{u}^j, p_j)$  d'éléments de  $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  vérifiant pour  $0 \leq j \leq n(2-p)/(4p-2n)$ :

$$-\nu \Delta \mathbf{u}_i^j + \operatorname{div} (\mathbf{u}_i^j \mathbf{u}^j) + \frac{\partial p_j}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,r_j}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n,$$

avec

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{p} + (j+1) \left( \frac{1}{p} - \frac{2}{n} \right).$$

Lorsque  $j$  est égal à la partie entière de  $n(2-p)/(4p-2n)$ , on pose  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^j$ ; on a alors  $r_j \geq 2$ , ce qui prouve le lemme.

Puisque  $\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0$  et  $\int_{\Gamma_k} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$  pour tout  $0 \leq k \leq N$ , il est connu (Temam [4]) qu'il existe un champ  $\zeta \in (W^{2,p}(\Omega))^{n(n-1)/2}$  tel que  $\mathbf{u}^* = \operatorname{rot} \zeta$ .

Nous appliquons alors la méthode de Hopf. Soit  $\varrho(x) = d(x, \partial\Omega)$  la distance de  $x$  au bord de  $\Omega$ . Hopf [2] construit pour tout  $\varepsilon > 0$  une fonction  $\theta_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$  jouissant des propriétés suivantes:

- i)  $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$  dans  $\Omega$ , et  $\theta_\varepsilon = 1$  dans un voisinage de  $\partial\Omega$ ,
- ii)  $\theta_\varepsilon = 0$  si  $\varrho(x) \geq 2\delta(\varepsilon)$ ,  $\delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon)$ ,
- iii)  $|D_i \theta_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon/\varrho(x)$  si  $\varrho(x) \leq 2\delta(\varepsilon)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

On montre alors:

LEMME 1.4. Soit  $\mathbf{u}^\varepsilon = \operatorname{rot} (\theta_\varepsilon \zeta) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ . Le champ  $\mathbf{u}^\varepsilon$  est un relèvement à divergence nulle de  $\boldsymbol{\Omega}$ . De plus, si  $\varepsilon$  est assez petit, on a:

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \, dx \right| \leq \frac{\nu}{4} \|v\|_2^2 \quad \text{pour tout } v \in W^{1,2}(\Omega).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.4. L'espace des champs de vecteurs de classe  $C^1(\Omega)$  à support compact est dense dans l'espace  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Il suffit donc de prouver l'inégalité pour ces champs.

Par intégration par partie, on a :

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} dx \right| = \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i v_j) dx \right| \leq c_1 \|v\|_2 \sum_{i,j=1}^n |v_i u_j^\varepsilon|_2.$$

Cependant, puisque  $u^\varepsilon = \mathbf{rot}(\theta_\varepsilon \zeta)$  et  $\zeta \in (L^\infty(\Omega))^{n(n-1)/2}$  :

$$|v_i u_j^\varepsilon|_2 \leq |v_i \theta_\varepsilon u_j^*|_2 + |\zeta|_\infty |v_i D \theta_\varepsilon|_2 \leq \left( \int_{\varrho(x) \leq 2\delta(\varepsilon)} v_i^2 |u_j^*|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon |\zeta|_\infty \left| \frac{v_i}{\varrho} \right|_2.$$

Enfin, le théorème de Sobolev montre que  $u^* \in L^n(\Omega)$ ,  $|v|_\alpha \leq c_2 \|v\|_2$  pour  $1/\alpha = \frac{1}{2} - 1/n$  <sup>(1)</sup>, et l'inégalité de Hardy entraîne (Temam [4])  $|v_i/\varrho|_2 \leq c_3 \|v\|_2$ .

On en déduit :

$$|v_i u_j^\varepsilon|_2 \leq |v_i|_\alpha \left( \int_{\varrho(x) \leq 2\delta(\varepsilon)} |u_j^*|^n dx \right)^{1/n} + c_3 \varepsilon |\zeta|_\infty \|v\|_2 \leq \mu(\varepsilon) \|v\|_2,$$

où

$$\mu(\varepsilon) = c_2 \left( \int_{\varrho(x) \leq 2\delta(\varepsilon)} |u_j^*|^n dx \right)^{1/n} + c_3 \varepsilon |\zeta|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, on a donc  $c_1 n^2 \mu(\varepsilon) \leq \nu/4$ , ce qui prouve le lemme.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1. Si  $\beta$  est un nombre réel  $> 0$ , on peut trouver un champ  $\xi \in (C^2(\bar{\Omega}))^{n(n-1)/2}$  et à support compact tel que  $\|(1 - \theta_\varepsilon)\zeta - \xi\|_n \leq \beta$ . Si on pose  $y = \mathbf{rot} \xi$ , on a  $y \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\text{supp } y \subset\subset \Omega$  et  $|u^* - u^\varepsilon - y|_n \leq c_4 \beta$ .

Posons  $v^* = u^* - y$ . Si  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , on a :

$$\left| \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} dx \right| + \left| \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial (u_j^* - u_j^\varepsilon - y_j)}{\partial x_i} dx \right|.$$

<sup>(1)</sup> Pour  $n = 2$ , on n'a pas  $|v|_\alpha \leq c_2 \|v\|_2$ . Mais  $u^* \in L^m(\Omega)$ ,  $m > 2$ , et avec  $1/\alpha = \frac{1}{2} - 1/m$ , on a  $|v|_\alpha \leq c_2 \|v\|_2$ .

Puis, avec  $\alpha^{-1} = \frac{1}{2} - 1/n$ :

$$\left| \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j^* - u_j^e - y_j) dx \right| = \left| \int_{\Omega} (u_j^* - u_j^e - y_j) \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i v_j) dx \right| \\ \leq 2c_4 \beta |v|_{\alpha} \|v\| \leq 2c_3 c_4 \beta \|v\|^2.$$

Donc:

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} dx \right| \leq \left( \frac{\nu}{4} + 2n^2 c_3 c_4 \beta \right) \|v\|^2.$$

Choisissons  $\beta$  de façon que  $\nu/4 + 2n^2 c_3 c_4 \beta = \nu/2$ . On a alors, pour tout champ  $v$  de classe  $C^2(\bar{\Omega})$ , à divergence nulle et à support compact, et pour toute pression  $q$  de classe  $C^1(\bar{\Omega})$ :

$$\int_{\Omega} \sum_i v_i \left( -\nu \Delta v_i + \operatorname{div} (v_i v + v_i v^* + v_i^* v) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) dx \geq \frac{\nu}{2} \|v\|^2.$$

Il est alors classique que pour tout second membre  $g \in W^{-1,2}(\Omega)$ , il existe une solution de l'équation de Navier-Stokes perturbée:

$$(N-S. 1) \begin{cases} -\nu \Delta v_i + \operatorname{div} (v_i v + v_i v^* + v_i^* v) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = g_i & \text{dans } \Omega, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_i v = 0. \end{cases}$$

Et on a de plus  $\|v\|_2 \leq (2/\nu) \|g\|_{-1,2}$ . Lorsqu'on choisit

$$g_i = f_i + \nu \Delta v_i^* - \operatorname{div} (v_i^* v^*) - \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i},$$

on a  $g \in W^{-1,2}(\Omega)$ . Si on pose  $u = v + v^*$ , où  $(v, q)$  est la solution de (N-S. 1), et  $p = q + \pi^*$ , alors  $(u, p) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  est une solution de l'équation de Navier-Stokes dont les données sont  $f$  et  $\varphi$ .

Enfin:

$$u - u^0 = v + v^* - u^0 = v - y + u^* - u^0 = v - y + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n(2-p)}{4p-2n} \rfloor - 1} (u^{j+1} - u^j) \in W^{1,q}(\Omega)$$

où  $1/q = 2/p - 2/n$ ,  $q > p$ . En effet, le terme le moins régulier de la somme du membre de droite est  $u^1 - u^0$ , qui est dans  $W^{1,q}(\Omega)$ .



## 2. – Unicité et régularité.

RÉGULARITÉ. Supposons que  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sont deux solutions dans  $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > n/2$ , de l'équation de Navier-Stokes. En posant  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , on a :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{w} + \nabla p = -(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce système, le théorème de Sobolev et le théorème de régularité de Cattabriga impliquent que si  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{1,s_m}(\Omega)$ , alors

$$\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{1,s_{m+1}}(\Omega) \quad \text{si} \quad \frac{1}{s_{m+1}} = \frac{1}{s_m} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n} > 0.$$

Puisque  $p > n/2$  et  $s_0 = p$ , on en déduit que  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{1,s}(\Omega)$  pour tout  $s < +\infty$ .

PROPOSITION 2.1 (Régularité). Si  $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) \in \mathcal{W}^{-1,p}(\Omega) \times \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\Omega)$ ,  $p > n/2$ , et si  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$  sont deux solutions de l'équation de Navier-Stokes, alors  $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathcal{W}^{1,s}(\Omega)$  pour tout  $s < \infty$ .

En d'autres termes, l'irrégularité d'une solution ne dépend pas de la solution choisie mais seulement des données  $\mathbf{f}$  et  $\boldsymbol{\varphi}$ .

UNICITÉ. On peut prendre le produit scalaire de la première équation par  $\mathbf{w}$ . On obtient :

$$(2.1) \quad \nu \|\mathbf{w}\|^2 - b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = 0.$$

Ici

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|^2$$

est une norme sur  $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$  équivalente à celle induite par  $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ , et

$$b(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n w_i u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx.$$

Par l'inégalité de Hölder et le théorème de Sobolev, on a :

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{u})| &\leq C_1 \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{w}\|_r \|\mathbf{u}\|_n, & \frac{1}{r} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{2}, \\ &\leq C_2(\Omega) \|\mathbf{w}\|^2 \|\mathbf{u}\|_{1,n/2}. \end{aligned}$$

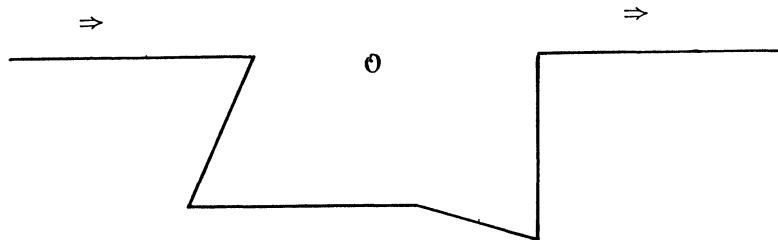
Si bien que, si  $\|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq C_3(\Omega)\nu$ , on obtient  $\|\mathbf{w}\| = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{w} = 0$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ . Cependant, d'après le théorème d'inversion locale au voisinage de  $\mathbf{u} = 0$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  et d'après les estimations de Cattabriga, il existe des constantes  $C_4(\Omega)$  et  $C_5(\Omega)$  telles que si  $\|\mathbf{f}\|_{-1,p} \leq \nu^2 C_4(\Omega)$  et  $\{\boldsymbol{\varphi}\}_p \leq \nu C_5(\Omega)$ , il existe une solution de l'équation de Navier-Stokes vérifiant  $\|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq C_6(\Omega)(\|\mathbf{f}\|_{-1,p}\nu^{-1} + \{\boldsymbol{\varphi}\}_p)$ .

De ce qui précède, on déduit:

**PROPOSITION 2.2 (Unicité).** *Il existe des constantes  $C_7$  et  $C_8$ , ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$ , telles que si  $n/2 < p \leq 2$ , si  $\nu > 0$  et si  $\|\mathbf{f}\|_{-1,p} \leq \nu^2 C_7$ ,  $\{\boldsymbol{\varphi}\}_p \leq \nu C_8$ , alors la solution  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega)$  de l'équation de Navier-Stokes est unique.*

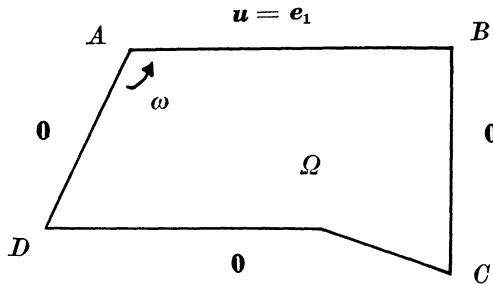
### 3. - Un exemple: la cavité ( $n = 2$ ).

Nous considérons dans ce paragraphe un flot stationnaire dans un ouvert, réunion du demi-espace supérieur  $\{x_2 > 0\}$  et d'un domaine polygonal du demi-espace inférieur, dont un côté est porté par l'axe  $x_2 = 0$ :



La vitesse du fluide est donnée à l'infini, parallèle à l'axe  $Ox_1$ , et on fait l'approximation suivante: la vitesse du fluide est constante ( $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ ) dans le demi-espace supérieur. De plus, on suppose que le fluide adhère aux parois du polygone. Le système à résoudre est alors:

$$(N-S) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \overline{AB}. \end{cases}$$



La condition du bord, qui présente une discontinuité de première espèce, n'est pas dans l'espace  $\mathcal{W}^{1/2,2}(\Omega)$  (mais nous verrons qu'elle appartient à  $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\Omega)$  pour tout  $p < 2$ ); le système ne peut donc pas être résolu directement. Suivant le premier paragraphe, nous cherchons une solution de l'équation de Stokes:

$$(S) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \overline{AB}. \end{cases}$$

LEMME 3.1. *L'équation de Stokes ci-dessus possède une solution unique*  $p_0 \in \bigcap_{p < 2} L^p(\Omega)$ ,  $\mathbf{u}_0 \in \bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ .

La démonstration du Lemme est donnée ci-après.

Ce lemme et le théorème de trace prouvent que la condition au bord appartient à  $\bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\Omega)$ . La démonstration du Théorème 1.1 montre que la résolution du problème de Stokes fournit le relèvement  $(\mathbf{u}^*, \pi^*) = (\mathbf{u}_0, p_0)$ . On en déduit:

THÉORÈME 3.2. *L'équation de Navier-Stokes (N-S) possède une solution*  $\mathbf{u} \in \bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $p \in \bigcap_{p < 2} L^p(\Omega)$ . De plus,  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$ ,  $p - p_0 \in L^2(\Omega)$ .

PREUVE DU LEMME 3.1. Soient  $(r, \theta)$  le coordonnées polaires du plan, centrées en  $A$ . On pose

$$b(\theta) = \frac{1}{\omega^2 - \sin^2 \omega} \{ \omega(\theta + \omega) \sin \theta - \theta \sin \omega \sin(\theta + \omega) \}$$

et  $\Phi_A(r, \theta) = rb(\theta)$ . La fonction  $\Phi_A$  vérifie:

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi_A = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Phi_A = 0 & \text{sur } \overline{AB} \cup \overline{AD}, \\ \frac{\partial \Phi_A}{\partial x_2} = 1 & \text{sur } \overline{AB}, \\ \frac{\partial \Phi_A}{\partial n} = 0 & \text{sur } \overline{AD}. \end{cases}$$

Définissons alors

$$\mathbf{u}^A = \text{rot } \Phi_A = \left( \frac{\partial \Phi_A}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Phi_A}{\partial x_1} \right) \quad \text{et} \quad p_A = \frac{\nu}{r}(b' + b'').$$

Il s'ensuit:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u}^A + \nabla p_A = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^A = \mathbf{0} & \text{sur } \overline{AD}, \\ \mathbf{u}^A = \mathbf{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}. \end{cases}$$

Remarquons que  $|\nabla \mathbf{u}^A| = (2/r)(b + b'')$ , et donc  $\mathbf{u}^A \in \bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ . De même  $p_A \in \bigcap_{p < 2} L^p(\Omega)$ .

On construit de même un champ et une pression  $\mathbf{u}^B \in \bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $p_B \in \bigcap_{p < 2} L^p(\Omega)$ , solutions de:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u}^B + \nabla p_B = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u}^B = \mathbf{0} & \text{sur } \overline{BC}, \\ \mathbf{u}^B = \mathbf{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}. \end{cases}$$

Soit alors  $\varrho_A$  une fonction de classe  $C^\infty(\Omega)$  vérifiant  $\varrho_A = 1$  dans un voisinage de  $A$ ,  $\varrho_A \equiv 0$  en dehors d'un second voisinage de  $A$  ne rencontrant pas la partie  $\widehat{BCD}$  du bord. On choisit  $\varrho_B$  jouissant des mêmes propriétés à partir de  $B$ , et on pose:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^A = \text{rot } (\varrho_A \Phi_A) \\ \mathbf{v}^B = \text{rot } (\varrho_B \Phi_B). \end{cases}$$

Il est clair que  $\mathbf{v}^A, \mathbf{v}^B \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus A)$ , si bien que  $-\nu \Delta \mathbf{v}^A + \nabla p_A \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Posons alors  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}^A - \mathbf{v}^B$  et  $q = p - p_A - p_B$ . Le couple  $(\mathbf{u}, p)$  est

solution de (S) si et seulement si le couple  $(\mathbf{v}, q)$  est solution de:

$$(S') \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{g} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce système, les données  $\boldsymbol{\varphi}$  et  $\mathbf{g}$  sont dans  $C^\infty(\partial\Omega)$  et  $C^\infty(\bar{\Omega})$ . Ce système admet donc une solution  $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Ce qui prouve le lemme.

#### 4. - Deuxième exemple: le problème de Taylor.

On étudie l'équilibre d'un fluide dans une section cylindrique de  $R^3$ , définie en coordonnées cylindriques par  $R_1 < r < R_2$ ,  $-L < z < L$ . Le cylindre extérieur et les deux faces horizontales sont fixes, tandis que le cylindre intérieur est en rotation autour de son axe, avec une vitesse angulaire  $\omega$  <sup>(2)</sup>.

On veut donc résoudre l'équation de Navier-Stokes avec

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi}(R_1, z, \theta) = \omega \mathbf{e}_\theta, \quad \boldsymbol{\varphi}(R_2, z, \theta) = \boldsymbol{\varphi}(r, \pm L, \theta) = \mathbf{0}.$$

De même que dans l'exemple précédent,  $\boldsymbol{\varphi} \in \bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1-1/p, p}(\partial\Omega)$ , et on obtient:

**THÉORÈME 4.1.** *Il existe une solution  $(\mathbf{u}, p) \in \bigcap_{p < 2} \mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$  de la équation de Navier-Stokes suivante:*

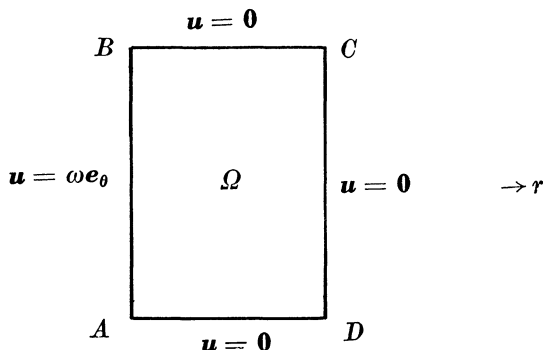
$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(R_1, z, \theta) = \omega \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{u}(R_2, z, \theta) = \mathbf{u}(r, \pm L, \theta) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad \begin{cases} R_1 < r < R_2, \\ -L < z < L, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

<sup>(2)</sup> On pourrait aussi supposer que le cylindre extérieur est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega'$ .

On peut mettre l'ouvert

$$\Omega = \{(r, z, \theta); R_1 < z < R_2, -L < z < L, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

sous la forme  $\Omega = S^1 \times \Omega_0$ :



Comme précédemment, la résolution de l'équation de Stokes linéaire fournit le relèvement  $(\mathbf{u}^*, \pi^*)$  du Lemme 1.3. Ce relèvement est en fait sous la forme  $\mathbf{u}^* = v(r, z)\mathbf{e}_\theta$ ,  $\pi^* = 0$ , où  $v$  est la solution du problème:

$$(\mathcal{F}) \quad \begin{cases} -\Delta v + \frac{1}{r^2}v - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ v = \omega & \text{sur } \overline{AB}, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus \overline{AB}. \end{cases}$$

Soit alors  $v_0 \in C^\infty(\overline{\Omega_0} \setminus \{A, B\})$  une fonction vérifiant

$$v_0(r, z) = \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{z + L}{r - R_1}$$

au voisinage de  $A$ ,

$$v_0(r, z) = \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{L - z}{r - R_1}$$

au voisinage de  $B$  et  $v_0 = 0$  au voisinage de  $C$  et  $D$ .

Posons  $w = v - v_0$ . Le problème  $(\mathcal{F})$  équivaut à:

$$(\mathcal{F}') \quad \begin{cases} -\Delta w + \frac{1}{r^2}w - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = -\Delta v_0 + \frac{1}{r^2}v_0 - \frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial r} & \text{dans } \Omega, \\ w = \omega - v_0 & \text{sur } \overline{AB}, \\ w = -v_0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus \overline{AB}. \end{cases}$$

Il est clair que la condition au bord du problème (F') est de classe  $C^1(\partial\Omega_0)$  (elle est nulle au voisinage des sommets). D'autre part, le second membre

$$h = -\Delta v_0 + \frac{1}{r^2} v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r}$$

appartient à  $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{A, B\})$ . Au voisinage de  $A$  et  $B$ , on a :

$$h = -\Delta v_0 + \frac{1}{r^2} v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{1}{r^2} v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r}.$$

Si bien que  $h \in W^{-1,\infty}(\Omega)$ . La méthode variationnelle fournit alors une solution  $w \in W^{1,2}(\Omega)$ , bien que l'ouvert  $\Omega$  ne soit que lipschitzien et non  $C^2$ . On obtient de même l'existence d'une solution variationnelle à l'équation de Navier-Stokes perturbée, grâce à la méthode de Hopf :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{z} + (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \nabla p = -(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{z} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{z} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solution  $(\mathbf{z}, p)$  ainsi obtenue est dans  $W^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . La solution  $(\mathbf{u}, p)$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{u}^*$ , de l'équation de Navier-Stokes vérifie donc

$$\mathbf{u}^* \in \bigcap_{p < 2} W^{1,p}(\Omega), \quad p \in L^2(\Omega).$$

Ce qui prouve le théorème.

## 5. - Remarques sur les problèmes d'évolution.

Considérons l'équation de Navier-Stokes d'évolution :

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \operatorname{div} (u_i \mathbf{u}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

**THÉOREME 5.1.** *Soit  $n/2 < p \leq 2$ , et supposons que:*

- i)  $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega))$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Omega))$ ,
- ii)  $\mathbf{a} \in L^2(\Omega)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ ,
- iii)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi}|_{t=0} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\partial\Omega$ ,
- iv)  $\int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$  pour tout  $t \in (0, T)$ .

Alors, il existe une solution faible de l'équation de Navier-Stokes (C) vérifiant:

- v)  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega))$ ,
- vi)  $d\mathbf{u}/dt \in L^\alpha(0, T; \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega))$ ,  $\alpha = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2, \\ \frac{4}{3} & \text{si } n = 3, \end{cases}$
- vii)  $p \in L^2(0, T; L^p(\Omega))$ .

**DÉMONSTRATION.** On utilise la preuve du Lemme 1.3, et on remarque que l'application (non-linéaire sauf si  $j = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega), \\ (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) &\mapsto (\mathbf{u}^j, p^j), \end{aligned}$$

est de classe  $C^\infty$ . On choisit  $j = [n(2-p)/(4p-2n)]$ , et on pose  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^j$ ,  $\pi^* = p^j$ . D'après i) on a donc:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)), \pi^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^p(\Omega)), \\ \mathbf{g} = \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u}^* - (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \nabla \pi^* \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)). \end{cases}$$

On en déduit  $\mathbf{g} - \partial \mathbf{u}^* / \partial t \in L^\infty(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$  car d'après le théorème de Sobolev  $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$ .

Posons  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$ ,  $q = p - \pi^*$ , de sorte que le problème (C) équivaut au système suivant:

$$(C') \quad \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} - \nu \Delta v_i + \operatorname{div} (v_i \mathbf{v} + v_i \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* v) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = g_i - \frac{\partial \mathbf{u}_i^*}{\partial t} & \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.1) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.2) \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.3) \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}^* = \mathbf{a} - \mathbf{u}^*|_{t=0} & (5.4) \end{cases}$$



La condition initiale vérifie  $\mathbf{a}^* \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{a}^* = 0$ ,  $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . De sorte que la multiplication de (5.1) par  $v$  donne formellement:

$$(5.5) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v|_2^2 + \nu \|\mathbf{v}\|^2 + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} \, dx = \left\langle \mathbf{g} - \frac{d}{dt} \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \right\rangle \leq c_1 \|\mathbf{v}\|.$$

Cependant, avec  $2/q = 1 - 1/p$ :

$$\left| \int_{\Omega} (v \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} \, dx \right| \leq c_2 \|\mathbf{u}^*\|_p |v|_q^2 \leq c_3 \|\mathbf{u}^*\|_p |v|_2^{2-n/p} \|v\|^{n/p} \\ \leq \frac{\nu}{3} \|\mathbf{v}\|^2 + c_4 \|\mathbf{u}^*\|^{2p/(2p-n)} |v|_2^2.$$

Si bien que de (5.5) on déduit une estimation « a priori » de  $\mathbf{v}$  dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$ . L'existence d'une solution de (C') est alors classique, par exemple en utilisant la méthode de Galerkin (Temam [4]). Cette solution vérifie

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)), \\ q \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{cases}$$

Il est clair que  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}^*$ ,  $p = q + \pi^*$  vérifient v) et vii). Enfin le système (C) montre que  $d\mathbf{u}/dt$  vérifie vi).

Cas  $4n/(n+4) < p \leq 2$ . Ce cas s'applique aux exemples des § 3 et 4, puisque dans ces deux cas,  $p = 2 - \varepsilon$  est arbitrairement proche de 2.

On peut alors réduire les hypothèses de la manière suivante:

$$i') \quad \mathbf{f} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)), \quad \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Omega)).$$

THÉORÈME 5.2. Si  $4n/(n+4) < p \leq 2$ , et si  $\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{a}$  vérifient i'), ii), iii), iv), alors l'équation de Navier-Stokes (C) admet une solution faible  $(\mathbf{u}, p)$  vérifiant v), vi), vii).

DÉMONSTRATION. Reprenons la preuve du Théorème 5.1. Puisque  $4n/(n+4) < p$ , on peut choisir  $j = 0$ . L'application  $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) \rightarrow (\mathbf{u}^0, \pi^0)$  étant linéaire, on a (remarquons que  $W^{1,2}(0, T)$  est un espace de fonctions continues sur  $(0, T)$ ):

$$\mathbf{g} - \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} \in L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)).$$

L'existence d'une solution  $(\mathbf{v}, q)$  du problème (C') se déduit donc de la manière habituelle.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. LERAY, *Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl., **12** (1933), pp. 1-82.
- [2] E. HOPF *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, Math. Nachr., **4** (1951), pp. 213-231.
- [3] L. CATTABRIGA, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **31** (1961), pp. 308-340.
- [4] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, North-Holland (1979).

Université de Saint-Etienne  
Rue du Docteur Paul Michelon  
42000 Saint-Etienne, France