

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

CLAUDY CANCELIER

JEAN-YVES CHEMIN

**Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels  
vérifiant le principe du maximum**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série, tome 20,  
n° 2 (1993), p. 299-312*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1993\\_4\\_20\\_2\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1993_4_20_2_299_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Sous-ellipticité d'opérateurs integro-différentiels vérifiant le principe du maximum

CLAUDY CANCELIER - JEAN-YVES CHEMIN

### 0. - Introduction

On s'intéresse aux opérateurs integro-différentiels elliptiques, du second ordre, de type Waldenfels  $W = P + S$  où  $P$  est un opérateur différentiel du second ordre éventuellement dégénéré, à coefficient d'ordre 0 négatif et  $S$  un opérateur integro-différentiel de la forme

$$(0.1) \quad Su(x) = \int [u(x+z) - u(x) - \nabla u(x) \cdot z] k(x, z) dz$$

où  $k(x, z)$  est une fonction positive sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  telle que:

$$(0.2) \quad \sup_x \int_{|z| \geq 1} |z| k(x, z) dz \quad \text{soit fini,}$$

$$(0.3) \quad \sup_x \int_{|z| \leq 1} |z|^2 k(x, z) dz \quad \text{soit fini,}$$

parce que

les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, fortement continus, contractants, ont cette forme (Bony, Courrège et Priouret [2], Cancelier [3]),

ils modélisent les processus de diffusion avec saut (Gimbert et Lions [4], Mikulevicius et Pragarauskas [10]).

L'étude de leur sous-ellipticité conduit aux Théorèmes 0.1 et 0.3 qui étendent aux opérateurs pseudo-différentiels du type  $\Sigma X_j^* X_j$ ,  $X_j$  étant d'ordre  $\leq 1$ , les résultats de sous-ellipticité connus pour les opérateurs du second ordre sommes de carrés de champs de vecteurs ou plus généraux de Hörmander [5], Kohn [7], Oleinik et Radkevich [12], Bolley, Camus et Nourrigat [1].

On remarque que si  $u$  est une fonction bornée dans  $\mathbb{R}^n$  et régulière près de  $x$  (de classe  $C^2$  par exemple),  $Su(x)$  est bien défini. Mais précisons le domaine de l'opérateur  $S$ :

Soient  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\beta$  un réel, le domaine  $D_\beta(S)$  de l'opérateur  $S$  est la fermeture de l'espace  $C_K^2(\mathbb{R}^n)$  pour la norme  $\|u\|_\beta = |u|_\beta + |Su|_\beta$ .

Par définition, on dira que  $S$  vérifie la *propriété de non annulation d'ordre*  $2 - \alpha$  ( $\alpha \in ]0, 2[$ ) si pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe une constante  $\varepsilon > 0$ , un cône ouvert convexe  $\mathcal{C}$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x$  tels que

$$(0.4) \quad \forall y \in \mathcal{V}, \quad \forall z \in B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}, \quad k(y, z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha}.$$

**THÉORÈME 0.1.** *Soit  $S$  l'opérateur intégro-différentiel défini par (0.1) vérifiant la propriété de non annulation. Si  $S^*1$  est une fonction de  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  alors  $D_{-1+\frac{\alpha}{2}}(S) \subset H^{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^n)$ .*

L'hypothèse sur  $S^*1$  est satisfaite par exemple lorsque

$$(0.5) \quad \int_{|z| \geq 1} \|\nabla_x k(\cdot, z)\|_{L^\infty} |z| \, dz \quad \text{et} \\ \int_{|z| \leq 1} \|\nabla_x^2 k(\cdot, z)\|_{L^\infty} |z|^2 \, dz \quad \text{sont finies.}$$

Considérons maintenant le cas particulier suivant:

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $S$  un opérateur pseudo-différentiel réel, proprement supporté d'ordre strictement inférieur à 2, appartenant à la classe  $L_{1,0}^{2-\alpha}(\mathbb{R}^n)$  de Hörmander. Compte tenu des estimations bien connues sur son noyau distribution  $k(x, z)$ , on a pour  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  à support contenu dans  $\Omega$  et  $x \in \Omega$ :

$$(0.6) \quad Su(x) = \int_{\Omega} k(x, x-y)[u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y-x)] \, dy + Au(x)$$

où  $A$  est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que le noyau-distribution de  $S$  est une fonction positive sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

La propriété de non annulation d'ordre  $2 - \alpha$  peut s'exprimer sous la forme plus faible: Pour tout  $x \in \Omega$ , il existe un cône ouvert convexe  $\mathcal{C}$  et une constante  $\varepsilon > 0$  tels que

$$(0.7) \quad \forall z \in B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C} \quad k(x, z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha}.$$

Le Théorème 0.1 conduit au Corollaire 0.2 dont une démonstration directe peut être faite en calculant le symbole de  $S$ :

**COROLLAIRE 0.2.** *Soit  $S$  un opérateur pseudo-différentiel réel satisfaisant les hypothèses précédentes et la propriété de non annulation (0.7). Alors  $S$  est un opérateur elliptique.*

La démonstration du Théorème 0.1 et de son corollaire fera l'objet du premier paragraphe. Si l'on cherche à étudier la sous-ellipticité de l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1^{2p}S$ , où  $S$  vérifie les hypothèses du Corollaire 0.2, l'ellipticité de  $S$  permet de l'écrire  $S = L^*L + L_0$ , où  $L$  et  $L_0$  sont des opérateurs d'ordres inférieurs à 1. On est naturellement conduit au théorème plus général suivant:

**THÉORÈME 0.3.** *Soient  $(X_j)_{1 \leq j \leq \ell}$  une suite d'opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés, appartenant à la classe  $L_{1,0}^{m_j}(\Omega)$ ,  $m_j \leq 1$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ , à symboles principaux imaginaires purs,  $(x_0, \xi_0)$  un point de l'espace cotangent et  $Y$  un commutateur itéré des opérateurs  $(X_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ , de longueur  $r$  et d'ordre  $\mu$  strictement positif. Si  $Y$  est elliptique microlocalement en  $(x_0, \xi_0)$ , alors l'opérateur  $P = \sum_{j=1}^{\ell} X_j^* X_j$  est sous elliptique microlocalement en  $(x_0, \xi_0)$  avec perte de  $2 \left(1 - \frac{\mu}{r}\right)$  dérivées.*

La démonstration de ce théorème sera faite au second paragraphe.

**REMARQUE.** S'il existe un triplet  $(Y, \mu, r)$  vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus, alors il en existe un tel que  $\frac{\mu}{r}$  soit maximal.

Dans tout l'article  $|\cdot|_s$  désignera la norme de l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**REMERCIEMENTS.** Nous tenons à remercier J.-M. Bony et C.J. Xu pour de fructueuses discussions.

### 1. - Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum

Avant de commencer la démonstration, vérifions que lorsque l'hypothèse (0.5) est vérifiée,  $S^*1$  est essentiellement bornée. En effet:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\{|z| \geq \varepsilon\}} [u(x+z) - u(x) - \nabla u(x) \cdot z] k(x, z) \, dz \, dx \quad u \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n) \\ &= \int \int_{\{|z| \geq \varepsilon\}} u(x) k(x-z, z) \, dz \, dx - \int \int_{\{|z| \geq \varepsilon\}} u(x) k(x, z) \, dz \, dx \\ & \quad + \int \int_{\{|z| \geq \varepsilon\}} u(x) \nabla_x k(x, z) \cdot z \, dz \, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int u(x)S^*1(x) dx &= \int Su(x) dx \\ &= \iint u(x)[k(x-z, z) - k(x, z) + \nabla_x k(x, z) \cdot z] dz dx \end{aligned}$$

d'où  $|\int u(x)S^*1(x) dx| \leq C\|u\|_{L^1}$ .

La démonstration du Théorème 0.1 repose sur le calcul de l'intégrale  $(u, Su)$ , sur la décomposition d'un élément quelconque en la différence de deux éléments d'un cône de non annulation de  $S$  et sur le fait que  $S^*1$  soit bornée.

En remarquant que

$$Su^2(x) - \int |u(x+z) - u(x)|^2 k(x, z) dz = 2u(x)Su(x),$$

on déduit immédiatement que

$$(1.1) \quad (u, Su) = -\frac{1}{2} \iint |u(x+z) - u(x)|^2 k(x, z) dz dx + \frac{1}{2} \int u^2(x)S^*1(x) dx.$$

On a aussi besoin du lemme géométrique qui permet coniquement près d'un point  $z_0$  n'appartenant pas à un cône  $\mathcal{C}_0$ , de décomposer tout  $z$  en la différence de deux éléments de  $\mathcal{C}_0$  dont la norme est voisine de celle de  $z$ . Plus précisément:

LEMME 1.1. *Soit  $\mathcal{C}_0$  un cône ouvert convexe. Pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}_0$ , il existe un cône ouvert convexe  $\mathcal{C}$  contenant  $z_0$  et deux applications  $w_1$  et  $w_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0$  tels que:*

$$(1.2) \quad w_1 - w_2 = \text{Id}_{\mathcal{C}}.$$

(1.3)  $w_i$  est un difféomorphisme  $C^\infty$ , homogène de degré 1 de  $\mathcal{C}$  sur son image  $w_i(\mathcal{C}); i = 1, 2$ .

DÉMONSTRATION. En effet pour tout  $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}_0$ , on peut trouver une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée d'éléments de  $\mathcal{C}_0$ , telle qu'aucune coordonnée  $\lambda_i(z_0)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , dans cette base, ne soit nulle, caractère qui demeure dans un voisinage conique  $\mathcal{C}$  de  $z_0$ . Le fait que  $z_0$  n'appartienne pas à  $\mathcal{C}_0$  assure que  $m$  ( $\geq 1$ ) coordonnées  $\lambda_i(z_0)$  sont strictement positives et  $(n - m)$  strictement négatives.

On pose alors:

$$(1.4) \quad w_1(z) = 2 \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(z)e_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(z)e_i \quad z \in \mathcal{C}$$

$$(1.5) \quad w_2(z) = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(z)e_i - 2 \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(z)e_i \quad z \in \mathcal{C}.$$

Par ailleurs on sait que

$$(1.6) \quad |u|_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = \iint |u(x+z) - u(x)|^2 |z|^{-n-2+\alpha} dz dx + |u|_0^2 \quad u \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En tenant compte

- de la propriété de non annulation (0.4) qui assure pour tout  $x$  l'existence d'un cône ouvert convexe  $\mathcal{C}_{0,x}$ , d'un voisinage  $\mathcal{V}_x$ , d'une constante  $\mathcal{E}_x$  tels que

$$\forall y \in \mathcal{V}_x, \quad \forall z \in B(0, \varepsilon_x) \cap \mathcal{C}_{0,x} \quad k(y, z) \geq \varepsilon_x |z|^{-n-2+\alpha},$$

et qui permet d'associer à tout  $z \notin \mathcal{C}_{0,x}$  un cône ouvert convexe  $\mathcal{C}$  contenant  $z$  et les applications  $w_1$  et  $w_2$  définies par (1.4) et (1.5):  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{0,x}$ ,

- de la compacité de la sphère  $S^{n-1}$  qui permet de la recouvrir par  $S^{n-1} \cap \mathcal{C}_{0,x}$  et par un nombre fini d'ouverts du type  $S^{n-1} \cap \mathcal{C}$  (on notera  $\mathcal{C}_0$  tout ouvert convexe du type  $\mathcal{C}_{0,x}$ ),
- de la compacité de  $K$  qui permet de le recouvrir par un nombre fini de  $\mathcal{V}_x$  (on notera  $\mathcal{V}$  un voisinage du type  $\mathcal{V}_x$  et  $\varepsilon$  le plus petit  $\varepsilon_x$ ),
- du fait que  $-(u, Su)$  soit à un terme majoré par  $\text{Cte}|u|_0^2$  près, égal à:

$$\text{Cte} \iint |u(x+z) - u(x)|^2 k(x, z) dz dx \quad (\text{car } S^*1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

- du fait que

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \{|z| \geq \varepsilon\}} |u(x+z) - u(x)|^2 |z|^{-n-2+\alpha} dz dx$$

soit majoré par  $\text{Cte}|u|_0^2$ ,

il suffit pour démontrer que

$$(1.7) \quad |u|_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq C[-(u, Su) + |u|_0^2]$$

de vérifier que:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{V} \times B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}} |u(x+z) - u(x)|^2 |z|^{-n-2+\alpha} dz dx \\ &\leq C \iint |u(x+z) - u(x)|^2 k(x, z) dz dx. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire et vu que  $w_1 - w_2 = \text{Id}_{\mathcal{C}}$ , alors

$$(1.9) \quad I \leq I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = 2 \int \int_{\mathcal{V} \times B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}} |u(x) - u(x + w_1(z))|^2 |z|^{-n-2+\alpha} dz dx$$

$$I_2 = 2 \int \int_{\mathcal{V} \times B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}} |u(x+z) - u(x+z+w_2(z))|^2 |z|^{-n-2+\alpha} dz dx.$$

Les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  se traitent de manière analogue. Etudions  $I_1$ :

$$(1.10) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq C \int \int_{\mathcal{V} \times B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}} |u(x) - u(x + w_1(z))|^2 |w_1(z)|^{-n-2+\alpha} dz dx \\ &\leq C \int \int_{\mathcal{V} \times B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}} |u(x) - u(x + w_1(z))|^2 k(x, w_1(z)) dz dx \end{aligned}$$

puisque  $w_1(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}_0$ , puis en faisant le changement de variable qui transforme  $w_1(z)$  en  $z$  et grâce à la positivité de  $k$ :

$$(1.11) \quad I_1 \leq C \int \int |u(x+z) - u(x)|^2 k(x, z) dz dx,$$

ce qui termine la démonstration de (1.7).

Dans le cas particulier où  $S$  est un opérateur pseudo-différentiel on peut démontrer directement le Corollaire 0.2.

Par un argument de perturbation classique on se ramène au cas où  $S$  est à coefficients constants.

$$(1.12) \quad Su(x) = \int_{\Omega} k(x-y)[u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y-x)] dy \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Par définition de la transformée de Fourier, le symbole de  $S$  est égal à:

$$(1.13) \quad \sigma(\xi) = \int k(z)(e^{-iz \cdot \xi} - 1 + iz \cdot \xi) dz.$$

Sa partie réelle est égale à:

$$(1.14) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) = \int k(z)(\cos z \cdot \xi - 1) dz.$$

Dans le cas particulier où  $K$  est homogène, on obtient en passant en coordonnées

polaires:

$$(1.15) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) = \int_{S^{n-1}} k(\theta) N(\theta, \xi) d\theta$$

où

$$N(\theta, \xi) = \int_0^{+\infty} [\cos(r\theta \cdot \xi) - 1] r^{-3+\alpha} dr.$$

Il est clair que  $N(\theta, \xi)$  est homogène de degré  $2-\alpha$  et que  $N(\theta, \xi)$  est strictement négatif sur  $S^{n-1} \times S^{n-1}$ ; le résultat est alors immédiat et l'hypothèse de non annulation est une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité.

Dans le cas général, il faut être un peu plus précis:

Soit  $\xi_0 \in S^{n-1}$ , il existe un voisinage conique  $U$  de  $\xi_0$  et un ouvert conique  $V$  tels que pour tout  $(z, \xi) \in V \times U$ , on ait:

$$(1.16) \quad |z \cdot \xi| \geq C|z||\xi| \quad \text{et} \quad k(z) \geq \varepsilon|z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{pour tout} \quad z \in B(0, \varepsilon);$$

et de plus si  $|z \cdot \xi| \leq 1$  alors

$$\cos z \cdot \xi - 1 \leq -\frac{1}{4}(z \cdot \xi)^2.$$

Donc

$$(1.17) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) \leq -\frac{C}{4} |\xi|^2 \int_{B(0, \frac{1}{|\xi|}) \cap V} k(z) |z|^2 dz.$$

Par hypothèse (0.7):

$$k(z) \geq \varepsilon|z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{lorsque} \quad |z| \leq \frac{1}{|\xi|} \leq \varepsilon$$

donc

$$(1.18) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) \leq -\varepsilon \frac{C}{4} |\xi|^2 \int_{B(0, \frac{1}{|\xi|}) \cap V} |z|^{-n+\alpha} dz,$$

d'où le résultat annoncé.

Le Corollaire 0.2 est aussi vrai pour tout opérateur  $S$  qui est une partie finie d'ordre  $m - \alpha$  ( $m \in \mathbf{N}^*$ ), à noyau positif vérifiant la propriété de non annulation (0.7) à l'ordre  $m - \alpha$ .



## 2. - Démonstration du Théorème 0.3

On supposera, sans perte de généralité, que les opérateurs  $X_j$ ,  $1 \leq j \leq \ell$ , introduits au Paragraphe 0, sont définis globalement sur  $\mathbb{R}^n$  et à noyaux distributions à supports compacts dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie graduée engendrée par les opérateurs pseudo-différentiels  $X_1, \dots, X_\ell$ . Les opérateurs de  $\mathcal{G}$  sont donc des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $m \leq 1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , anti-autoadjoints dont le noyau distribution est à support compact.

On peut en particulier associer à chaque  $X \in \mathcal{G}$  d'ordre  $m \leq 1$  un groupe à un paramètre  $(e^{tX})_{t \in \mathbb{R}}$  d'opérateurs linéaires continus de  $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  dans  $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  et vérifier par interpolation le résultat classique: pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(2.1) \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |e^{tX}u - u|_0 \leq Ct^\sigma |u|_{\sigma m}.$$

La Proposition 2.1 va généraliser ce résultat.

Etant donné un entier  $q$  strictement positif,  $\varepsilon$  une suite de  $\{-1, 1\}^q$  et  $J$  une suite de  $\{1, \dots, \ell\}^q$ , on notera  $\exp t\mathcal{X}^\varepsilon$  l'opérateur  $e^{t\varepsilon_1 X_1} \dots e^{t\varepsilon_q X_q}$ .

La proposition clef est la suivante:

**PROPOSITION 2.1.** *Soient  $Y$  un commutateur itéré de longueur  $r$  appartenant à  $\mathcal{G}$  et  $N$  un entier positif, il existe un entier  $q$ , une suite  $\varepsilon$  de  $\{-1, 1\}^q$  et une suite  $J$  de  $\{1, \dots, \ell\}^q$  tels que l'opérateur  $H_t$  défini par*

$$(2.2) \quad H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{tY}$$

vérifie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \forall \sigma \in [0, 1] \exists C, t_0 > 0 : \quad \forall t \in [-t_0, t_0], \\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad |H_t u - u|_0 \leq Ct^{N\sigma} |u|_\sigma. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Elle comprend une partie d'algèbre et une d'analyse. L'algèbre présente dans la démonstration nécessite l'introduction du formalisme suivant, tel qu'il est présenté dans [1]:

On désigne par  $S(\mathcal{G})$  l'algèbre non commutative des séries formelles à une indéterminée  $t \in \mathbb{R}$ , à coefficients dans  $\mathcal{G}$  de la forme

$$(2.4) \quad S \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j \quad a_j \in \mathcal{G}.$$

On dira qu'une série formelle  $S \in S(\mathcal{G})$  est nulle à l'ordre  $N \geq 1$  si  $a_j = 0$  pour  $j \leq N - 1$ . Soit  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  l'algèbre non commutative des opérateurs dans  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

de la forme suivante:

$$(2.5) \quad P = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha X^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbf{C}, \quad p \in \mathbf{N},$$

où pour toute suite finie  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$  d'entiers  $\alpha_j \in \{1, \dots, \ell\}$ , on note  $|\alpha| = q$  et  $X^\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_q}$ .

Soit  $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$  l'algèbre non commutative des séries formelles  $\Sigma$  à une indéterminée  $t \in \mathbb{R}$ , à coefficients dans  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ , munie de la loi produit usuelle des séries formelles. A toute série  $S \in S(\mathcal{G})$  on peut associer une série formelle  $e^S \in S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ . D'après la formule de Campbell-Hausdorff, (voir par exemple [13]) pour tous  $S_1$  et  $S_2 \in S(\mathcal{G})$ , il existe une unique série  $S_{12} \in S(\mathcal{G})$  telle que dans  $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ :

$$(2.6) \quad e^{S_1} e^{S_2} = e^{S_{12}}$$

et l'on a

$$(2.7) \quad S_{12} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2} [S_1, S_2] + \cdots .$$

Le lemme clef est le suivant:

**LEMME 2.2.** *Soient  $Y$  un commutateur itéré de longueur  $r$  appartenant à  $\mathcal{G}$  et  $N$  un quelconque entier positif, il existe un entier  $q$ , une suite  $\varepsilon$  de  $\{-1, 1\}^q$  et une suite  $J$  de  $\{1, \dots, \ell\}^q$  tels que  $\exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S$ , la série  $S - t^r Y$  étant nulle jusqu'à l'ordre  $N - 1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Nous allons commencer par deux remarques:

1) Lorsque  $r = 2$ , la formule de Campbell-Hausdorff assure que

$$(2.8) \quad e^{tX_1} e^{tX_2} e^{-tX_1} e^{-tX_2} = e^S$$

avec

$$(2.9) \quad S = t^2 [X_1, X_2] + \sum_{k \geq 3} t^k S_k$$

où  $S_k$  est somme d'un nombre fini de commutateurs itérés de  $X_1$  et  $X_2$  de longueur  $k$ . Autrement dit, on peut associer au commutateur  $[X_1, X_2]$  l'opérateur  $S$  vérifiant (2.8) et (2.9).

2) On peut consulter [1] dans le cas où  $N = r + 1$ .

En suivant pour  $Y$  la technique de [1] qui généralise la remarque 1), on obtient l'existence de  $q$ , de  $\varepsilon$  et de  $J$  tels que

$$(2.10) \quad \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S \quad \text{avec } S = t^r Y + \sum_{k \geq r+1} t^k S_k$$

où  $S_k$  est une somme finie de commutateurs itérés de longueur  $k$ , appartenant à  $\mathcal{G}$ .

En s'inspirant de [5], on applique de nouveau la technique de [1] à  $S_{r+1}$  lui-même d'où finalement après utilisation de (2.10), l'existence de  $q_1$ ,  $\varepsilon^1$ , et  $J^1$  tels que

$$\exp t\mathcal{X}_{J^1}^{\varepsilon^1} = e^{S^{(1)}} \quad \text{avec } S^{(1)} = t^r Y + \sum_{k \geq r+2} t^k S_k^{(1)},$$

où  $S_k^{(1)}$  est une somme finie de commutateurs itérés de longueur  $k$ , appartenant à  $\mathcal{G}$ .

En itérant le procédé jusqu'à  $N - 1$ , on obtient le lemme.

On considère un entier  $q$ , une suite  $\varepsilon$  et une suite  $J$  donnés par le lemme algébrique 2.2. Soit  $H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y}$ . Le point essentiel de la partie d'analyse de la démonstration consiste en la preuve du lemme suivant:

LEMME 2.3. *L'opérateur  $H_t$  est, modulo un opérateur infiniment régularisant, un opérateur intégral de Fourier dont le symbole  $a$  appartient à  $C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^0)$  et la phase à  $C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^1)$  et vérifient:*

$$\begin{aligned} \exists b \in C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^0) & \quad a(t, x, \xi) = 1 + t^N b(t, x, \xi), \\ \exists \psi \in C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^1) & \quad \varphi(t, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + t^N \psi(t, x, \xi). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On commence par démontrer qu'il existe  $Z \in C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^1)$  tel que

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt} H_t = Z(t) H_t.$$

Cela résulte du fait suivant. Soit  $(A_i(t))_{1 \leq i \leq 2} \in C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^1)$  antiautoadjoint, on considère  $(F_i(t))_{1 \leq i \leq 2}$  solution de l'équation  $F_i'(t) = A_i(t) F_i(t)$  avec  $F_i(0) = \text{Id}$ ;  $F_1 \circ F_2(t)$  est alors solution de  $F'(t) = A_{12}(t) F(t)$  avec  $F(0) = \text{Id}$ , où

$$A_{12}(t) = A_1(t) + F_1(t) A_2(t) F_1(t)^{-1}.$$

L'application répétée de cette remarque assure (2.11).

Le lemme algébrique 2.2 joint à la relation (2.11) assure que  $Z(t)$  a un développement de Taylor en zéro nul jusqu'à l'ordre  $N - 1$ .

D'après la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (voir [6] et [8]) la phase  $\varphi$  de  $H_t$  vérifie:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t; x, \xi) = Z(t; x, \partial_x \varphi(t, x, \xi)) \\ \varphi(0; x, \xi) = \langle x, \xi \rangle. \end{cases}$$

La condition sur la phase en résulte clairement par intégration; celle sur le symbole vient du lemme 2.2.

Pour conclure la démonstration de la Proposition 2.1, il suffit d'appliquer le lemme suivant, démontré dans [1] p. 219.

LEMME 2.4. Soit  $H_t$  un opérateur intégral de Fourier dont le symbole  $a$  appartient à  $C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^0)$  et la phase à  $C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^1)$  et vérifient:

$$\begin{aligned} a(t, x, \xi) &= 1 + t^N b(t, x, \xi), & \text{avec } b \in C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^0), \\ \varphi(t, x, \xi) &= \langle x, \xi \rangle + t^N \psi_N(t; x, \xi), & \text{avec } \psi_N \in C^\infty([0, t_0]; S_{1,0}^1); \end{aligned}$$

alors, pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ , il existe  $C$  telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad |H_t u - u|_0 \leq C t^{N\sigma} |u|_\sigma.$$

COROLLAIRE 2.5. Sous les hypothèses de la Proposition 2.1, alors, pour toute  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$|(e^{tY} - \text{Id})^2 u|_0 \leq C \left( \sum_{j=1}^{\ell} |(e^{tX_j} - \text{Id})^2 u|_0 + t^{N\sigma} |u|_\sigma \right).$$

DÉMONSTRATION. Voir [1].

Pour démontrer le Théorème 0.3 on aura besoin de quelques résultats d'interpolation ([1] p. 209 et [9] p. 55).

Soient  $Y \in \mathcal{G}$  un commutateur itéré,  $(\tilde{Y}, D(\tilde{Y}))$  le générateur infinitésimal du groupe unitaire  $(e^{tY})_{t \in \mathbb{R}}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . On définit pour  $\beta \in ]0, 2[$  un espace de moyenne entre  $D(\tilde{Y}^2)$  et  $L^2(\mathbb{R}^n)$  par

$$(2.12) \quad D_\beta(\tilde{Y}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2\beta}} \frac{dt}{t} < +\infty \right\}.$$

$D_\beta$  sera muni de sa norme canonique. On peut démontrer que lorsque  $\beta \in ]0, 1[$ , l'espace  $D_\beta(\tilde{Y})$  coïncide avec l'interpolé holomorphe  $[L^2(\mathbb{R}^n), D(\tilde{Y})]_\beta$  et que pour  $\beta = 1$ ,  $D_1(\tilde{Y})$  est isomorphe (algébrique et topologique) à  $D(\tilde{Y})$  muni de la norme du graphe.

Le lemme suivant permet de comparer  $|u|_{D_\beta(\tilde{Y})}$  aux normes  $|X_j u|_0$  et  $|u|_\sigma$ .

LEMME 2.6. Soient  $Y \in \mathcal{G}$  un commutateur itéré de longueur  $r$  et  $\sigma \in \left] \frac{1}{N}, 1 \right]$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$(2.13) \quad |u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})} \leq C \left[ \sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_{\sigma} \right].$$

DÉMONSTRATION. Nous rappelons brièvement ici la preuve donnée dans [1].

$$|u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})} = |u|_0^2 + \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{dt}{t}.$$

Par changement de variable ( $t = s^r$ ) on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{dt}{t} \\ & \leq C \left[ \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j} - I)^2 u|_0^2}{t^2} \frac{dt}{t} + \int_0^{t_0} \frac{t^{2N\sigma}}{t^2} |u|_{\sigma}^2 \frac{dt}{t} + |u|_0^2 \right] \end{aligned}$$

en vertu du Corollaire 2.5.

L'intégrale  $\int_0^{t_0} t^{2N\sigma-3} dt$  est convergente puisque  $\sigma > \frac{1}{N}$  et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j} - I)^2 u|_0^2}{t^2} \frac{dt}{t} \leq |u|_{D_1(\tilde{X}_j)} \leq C[|X_j u|_0^2 + |u|_0^2], \text{ d'où le résultat.}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 0.3. Soit  $Y \in \mathcal{G}$  un commutateur itéré de longueur  $r$ , d'ordre  $\mu$ , elliptique en  $(x_0, \xi_0)$ . Alors il existe donc un voisinage compact  $K$  de  $x_0$ , un opérateur pseudo différentiel  $\psi(x, D)$  d'ordre 0, elliptique en  $(x_0, \xi_0)$ , nul pour  $x \notin V$  où  $V$  est un voisinage de  $x_0$ , relativement compact dans  $K$  et une constante  $C > 0$  tels que

$$(2.14) \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad |\psi(x, D)u|_{\mu} \leq C[|Yu|_0 + |u|_0].$$

Comme  $\psi(x, D)$  est un opérateur d'ordre 0, donc linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , on déduit par interpolation qu'il est borné de l'interpolé holomorphe

$[L^2(\mathbb{R}^n), D(\tilde{Y})]_{\frac{1}{r}} = D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})$  dans l'interpolé holomorphe  $[L^2(\mathbb{R}^n), H^\mu(\mathbb{R}^n)]_{\frac{1}{r}} = H^{\frac{\mu}{r}}(\mathbb{R}^n)$  d'où

$$|\psi(x, D)u|_{\frac{2}{r}}^2 \leq C|u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})}^2 \quad (2.15)$$

$$\leq C \left[ \sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_{\sigma}^2 \right] \quad \text{pour } \sigma \in \left] \frac{1}{N}, 1 \right] \quad (\text{Lemme 2.6}).$$

La Proposition 2.1 laisse toute latitude sur le choix de  $N$ , donc il est possible de choisir  $N$  pour que  $\frac{1}{N} < \frac{\mu}{r}$ . D'où le Théorème 0.3.

Pour conclure, démontrons l'existence d'un triplet  $(Y_m, \mu_m, r_m)$  tel que  $\frac{\mu_m}{r_m}$  soit maximal. Soit  $(Y, \mu, r)$  un triplet vérifiant l'hypothèse du Théorème 0.3. Tout triplet  $(Y', \mu', r')$  tel que  $\frac{1}{r'} < \frac{\mu}{r}$  donne lieu à un quotient  $\frac{\mu'}{r'} < \frac{\mu}{r}$ ; donc le triplet réalisant le quotient  $\frac{\mu'}{r'}$  maximal est à chercher dans un ensemble fini; d'où l'existence de  $(Y_m, \mu_m, r_m)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BOLLEY - J. CAMUS - J. NOURRIGAT, *La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels*, Comm. Partial Differential Equations, **7** (2) (1982), 197-221.
- [2] J.-M. BONY - P. COURRÈGE - P. PRIOURET, *Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégral-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **18**, **2** (1968), 369-521.
- [3] C.E. CANCELIER, *Problèmes aux limites pseudo-différentiels donnant lieu au principe du maximum*, Comm. Partial Differential Equations, **11** (15) (1986), 1677-1726.
- [4] F. GIMBERT - P.L. LIONS, *Existence and regularity results for solutions of second order, elliptic, integro-differential operators*, Ricerche Mat., vol. XXXIII, **2** (1984).
- [5] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.
- [6] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators IV*, Springer-Verlag, 1985.
- [7] J.J. KOHN, *Pseudo-differential operators and non-elliptic problems*, Pseudo differential operators (C.I.M.E. Stresa, 1968), Edizioni Cremonese, Rome, 1969, 157-165 MR 41 # 3972.
- [8] H. KUMANO-GO, *A calculus of Fourier integral operators on  $\mathbb{R}^n$  and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type*, Comm. Partial Differential Equations, **1** (1) (1976), 1-44.

- [9] J.L. LIONS - J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques n° 19, 1964.
- [10] R. MIKULEVICIUS - H. PRAGARAUSKAS, *On the existence and uniqueness of solutions to the martingal problem*, à paraître.
- [11] J. NOURRIGAT, *Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators*. Notas de curso, Instituto de Matemática, Universidad federal de Pernambuco, Recife 1982.
- [12] O.A. OLEINIK - E.V. RADKEVIC, *Second order equations with nonnegative characteristic form*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, Plenum Press, 1973.
- [13] J.P. SERRE, *Lectures given at Harvard University, Lie algebras and Lie groups*, W.A. Benjamin, Inc. New-York Amsterdam, 1965.

Ecole Polytechnique  
Centre de Mathématiques  
91128 Palaiseau cedex