ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. M. RAKOTOSON
D. SERRE

Sur un problème d'optimisation lié aux équations de Navier-Stokes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 20, nº 4 (1993), p. 633-649
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1993_4_20_4_633_0>

Sur un problème d'optimisation lié aux équations de Navier-Stokes

J.M. RAKOTOSON - D. SERRE

0. - Introduction

La principale motivation de cet article provient d'une étude formelle effectuée par D. Serre concernant les équations de Navier-Stokes (voir Appendice). Cette étude a conduit à l'examen de la régularité de la solution optimale de:

$$(\mathcal{P}) \qquad J(u_0) = \inf_{u \in \mathcal{K}(h)} \left\{ J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx \right\}$$

où

$$\mathcal{K}(h) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \forall\ \varphi \text{ convexe lipschitzienne de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \quad \int_\Omega \varphi(v)\, dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\, dx \right\},$$

h étant une fonction donnée de $L^1(\Omega)$. On suppose que $\mathcal{K}(h)$ est non vide.

Pour trouver une condition nécessaire d'optimalité pour le problème $(\mathcal{P})$, on va montrer que le problème peut se formuler sous la forme abstraite suivante:

$$(\mathcal{P}_a) \qquad J(u_0) = \inf \{ J(u) : u \in X,\ \ Su \in -K \}$$

où K est un cône convexe d'intérieur non vide d'un espace Y, S une application de X dans Y. Cette équivalence est obtenue via quelques propriétés du réarrangement.

Pervenuto alla Redazione il 25 Maggio 1992 e in forma definitiva il 14 Giugno 1993.

Sous des hypothèses relativement générales, nous donnons une condition nécessaire d'optimalité pour le problème $(\mathcal{P}_a)$. C'est l'objet du Théorème 2 qui stipule qu'il existe un couple de multiplicateurs de Lagrange (c_0, λ^*) non trivial appartenant à $\mathbb{R}_+ \times K^*$ (K^* cône polaire de K) tel que $\forall v \in X$:

$$c_0 J'(u_0, v) + \langle \lambda^*, S'(u_0, v) \rangle \geq 0 \tag{1}$$

où $J'(u_0, \cdot)$ et $S'(u_0, \cdot)$ sont des dérivées directionnelles et le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre Y^* et Y (Y^* dual de Y). La preuve de (1) s'obtient par applications du théorème de séparation de Hahn-Banach (forme géométrique).

On applique alors le Théorème 2 au problème $(\mathcal{P})$ pour obtenir une relation du type (1). Il est important de montrer que $c_0 \neq 0$. Une fois cette étape franchie, on interprète la relation obtenue au sens des distributions pour conclure que la solution optimale $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ à condition que $f \in L^\infty(\Omega)$. On notera toutefois que h est seulement dans $L^1(\Omega)$. On obtient aussi l'équation d'Euler-Lagrange du problème (voir le Théorème 1).

1. - Notations. Position du problème. Resultat principal

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour E un ensemble measurable de Ω, on note $|E|$ la mesure de E et χ_E sa fonction caractéristique.

Si $v : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, pour $x \in \Omega$ on notera: $|v \geq v(x)| =$ mesure $\{y \in \Omega,\ v(y) \geq v(x)\}$ et $\{v \geq v(x)\} = \{y \in \Omega : v(y) \geq v(x)\}$. Idem pour $\{v = v(x)\}$, $\{v < v(x)\}$ etc. On notera aussi $\Omega^* =]0, |\Omega|[$ et $P(v) = \{x \in \Omega : |v = v(x)| > 0\}$ (c'est l'ensemble des plateaux de v.)

On désignera par v_* le réarrangement décroissant de v et

$$P(v_*) = \{\sigma \in [0, |\Omega|] : |v_* = v_*(\sigma)| > 0\}$$

l'ensemble des plateaux de v_*.

On rappelle que v et v_* sont équimesurables et qu'en particulier v_* conserve la norme de v dans les espaces L^p. Pour de plus amples détails sur le réarrangement voir [C-R], [B], [M], [Ra], [Ka] et [R-J].

Soit K un cône convexe d'un espace vectoriel normé Y (de dual Y^*). On appelle *cône tangent* en un point $y \in K$ l'ensemble défini par:

$$T_K(y) = \text{Adhérence}\left[\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - y)\right] = \left\{ k \in Y : k = \lim_{\substack{t_n \to 0 \\ t_n > 0}} \frac{k_n - y}{t_n},\ k_n \in K \right\}.$$

La proposition suivante se vérifie par un calcul direct.

PROPOSITION 1. *$T_K(y)$ est un cône convexe contenant l'ensemble $K - \mathbb{R}_+ y$ où $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.*

On appelle cône dual ou cône polaire de K l'ensemble:

$$K^* = \{l^* \in Y^* : \forall k \in K,\ \langle l^*, k\rangle \geq 0\}$$

où le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre Y^* et Y.

Pour plus de détails sur cette partie d'analyse convexe voir [G], [F], [Ku], [Z-Ku]).

Position du Problème - Résultat principal

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, $h \in L^1(\Omega)$; on considère l'unique solution optimale u_0 de:

$$(\mathcal{P}) \qquad J(u_0) = \inf\{J(u) : u \in \mathcal{K}(h)\}$$

où $J(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega f u\, dx$ et

$$\mathcal{K}(h) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \varphi(v)\, dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\, dx \right.$$

$$\left. \forall \varphi \text{ convexe lipschitzienne de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \right\}.$$

On veut obtenir des informations sur la régularité de u_0. Nous avons alors le:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses précédentes, la solution optimale u_0 appartient à $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Plus précisement, il existe une constante $c_h \geq 0$ et une mesure de Radon positive λ^* appartenant au dual de $L^\infty(0, |\Omega|)$ tel que si on définit les éléments de $L^\infty(\Omega)$ suivants:*

$$\psi_1(x) = \int_{|u_0 \geq u_0(x)|}^{|\Omega|} d\lambda^*(\sigma) - c_h,\quad \psi_2(x) = \psi_1(x) + \chi_{P(u_0)}(x) \int_{P(u_{0*})} d\lambda^*(\sigma),$$

on a au sens des distributions:

$$(2) \qquad -\Delta u_0 - f \in [-\psi_2; -\psi_1]$$

et de plus λ^* satisfait à:

$$(3) \qquad \int_0^{|\Omega|} \left[\int_0^\sigma h_*(\tau)\, d\tau - \int_0^\sigma u_{0^*}(\tau)\, d\tau \right] d\lambda^*(\sigma) = 0.$$

En particulier, support $\lambda^* \subset \left\{ \sigma \in [0, |\Omega|] : \int_0^\sigma h_*(\tau)\, d\tau = \int_0^\sigma u_{0^*}(\tau)\, d\tau \right\}$.

REMARQUE. Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont de la forme $p_1 \circ u$ et $p_2 \circ u$ respectivement, où $(s < t) \Rightarrow (p_1(s) \leq p_2(s) \leq p_1(t))$. L'application multivoque $s \mapsto [p_1(s), p_2(s)]$ est donc croissante: c'est le sous-différentiel d'une fonction convexe ϕ de la variable réelle. La condition d'optimalité s'écrit donc:

$$\Delta u_0 + f \in \partial\phi(u_0(x)),$$

et alors c'est aussi la solution unique du problème de minimisation sans contrainte pour la fonctionnelle

$$J_\phi[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega \phi(u(x))\, dx - \int_\Omega f u\, dx \quad \text{sur } H_0^1(\Omega).$$

Cas où $h \in L^\infty(\Omega)$

Dans ce cas-ci, on peut réduire la taille de l'ensemble des contraintes φ. Plus précisément nous avons la:

PROPOSITION 2. *Si* u_0 *est l'unique solution de* $(\mathcal{P})$ *et si* $h \in L^\infty(\Omega)$ *alors*

$$J(u_0) = \inf\{J(u) : u \in \mathcal{K}_+(h)\}$$

où

$$\mathcal{K}_+(h) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \varphi(v)\, dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\, dx \quad \textit{pour toute fonction convexe } \varphi,\ \varphi \geq 0 \right\}.$$

PREUVE. Par densité

$$\mathcal{K}(h) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : \forall\varphi \text{ convexe}, \quad \int_\Omega \varphi(v)\, dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\, dx \right\}.$$

Il suffit de montrer que $\mathcal{K}_+(h) = \mathcal{K}(h)$. On a facilement

$$\mathcal{K}(h) \subset \mathcal{K}_+(h) \subset \left\{ v \in L^\infty(\Omega)\ \ \|v\|_\infty = \sup_\Omega \text{ess}|v(x)| \leq \|h\|_\infty \right\}.$$

(On notera dans la suite $\|v\|_\infty = \sup_\Omega \text{ess}|v(x)|$.)

Soit $v \in \mathcal{K}_+(h)$ et φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, posons

$$M = \sup\{|\varphi(\sigma)| : |\sigma| \leq \|h\|_\infty\};$$

alors l'application $\varphi_1(\tau) = [\varphi(\tau) + M]_+$ est une fonction convexe positive, ainsi:

$$\int_\Omega (\varphi(v) + M)\,dx = \int_\Omega \varphi_1(v)\,dx \leq \int \varphi_1(h)\,dx = \int_\Omega (\varphi(h) + M)\,dx. \qquad \square$$

REMARQUE. Pour $h \in L^\infty(\Omega)$ on a donc aussi

$$\mathcal{K}_+(h) = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), \text{ pour tout } \varphi \text{ convexe } \int_\Omega \varphi(v)\,dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\,dx \right\}.$$

THÉORÈME 1-BIS. *Si $f < -c_h$ alors $\psi_1 = \psi_2$, c'est-à-dire que u_0 est solution de:*

$$\begin{cases} \Delta u_0 = f - \psi_1 \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4}$$

Pour obtenir la relation (2), du Théorème 1 nous allons donner une condition nécessaire d'optimalité. Nous énonçons cette condition sous une forme abstraite.

2. Un thèoréme d'optimalité abstrait

THÉORÈME 2. *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés de dual respectif X^* et Y^*. Dans Y, on se donne un cône convexe fermé* d'intérieur non vide *noté K. On s'intéresse alors à la solution optimale u_0 du problème*

$$J(u_0) = \inf\{J(u) : u \in X \quad Su \in -K\}$$

où J est une application de X dans $\mathbb{R}$ et S une application de X dans Y.

On suppose que J et S satisfont à:

H1) *$\forall v \in X$, il existe une dérivée directionnelle $J'(u_0; v)$ dans $\mathbb{R}$ i.e.*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{J(u_0 + tv) - J(u_0)}{t} = J'(u_0; v),$$

et l'application $X \ni v \mapsto J'(u_0; v)$ est convexe.

H2) *$\forall v \in X$, il existe un élément $S'(u_0; v) \in Y$ tel que:*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{S(u_0+tv) - Su_0}{t} = S'(u_0; v).$$

De plus, l'application $X \ni v \mapsto S'(u_0; v) \in Y$ est convexe au sens que: $\forall t \in [0,1]$, $\forall v_1 \in X$, $\forall v_2 \in X$,

$$S'(u_0; tv_1 + (1-t)v_2) - tS'(u_0; v_1) - (1-t)S'(u_0; v_2) \in -K.$$

Alors il existe un réel positif ou nul c_0 et un élément λ^* appartenant au cône polaire K^* tel que: $\forall v \in X$

$$c_0 J'(u_0; v) + \langle \lambda^*, S'(u_0; v)\rangle \geq 0 \tag{1}$$

avec $(c_0, \lambda^*) \neq (0,0)$. De plus, on a la relation d'orthogonalité suivante:

$$\langle \lambda^*, Su_0\rangle = 0. \tag{1'}$$

REMARQUES. Des résultats semblables se trouvent dans la littérature sous des hypothèses fortes sur J et S (en général Fréchet-différentiable, cf. [Ku], [Z-Ku] etc.). Nous remercions L. Thibault pour les documents et quelques discussions sur ce sujet.

La preuve que nous adoptons a été suggérée par R. Janin. L'idée de la preuve est assez standard dans le domaine d'optimisation (voir en dimension finie [F] ou [Z-Ku]). Elle est basée sur le théorème de séparation de Hahn-Banach.

PREUVE DU THÉORÈME 2. Considérons le cône tangent à K au point $-Su_0$ i.e.

$$T_K(-Su_0) = \text{Adh}\left[\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K + Su_0)\right]$$

et définissons dans $\mathbb{R} \times Y$:

$$B(u_0) = \{(J'(u_0; v) + \alpha,\ S'(u_0; v) + k) : \alpha \geq 0,\ v \in X \text{ et } k \in T_K(-Su_0)\}$$

et l'ouvert convexe $A =]-\infty, 0[\times(-\mathring{K})$. On a $A \neq \emptyset$ car $\mathring{K} \neq \emptyset$.

LEMME 1. *$B(u_0)$ est un convexe non vide.*

PREUVE. Soit $b_i = (J'(u_0; v_i) + \alpha_i,\ S'(u_0; v_i) + k_i)$ avec $i = 0, 1$ deux éléments de $B(u_0)$. La convexité de $J'(u_0; \cdot)$ et de $S'(u_0; \cdot)$ assurent que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\alpha_2 = tJ'(u_0; v_0) + (1-t)J'(u_0; v_1) - J'(u_0; tv_0 + (1-t)v_1) \geq 0,$$
$$k_2 = tS'(u_0; v_0) + (1-t)S'(u_0; v_1) - S'(u_0; tv_0 + (1-t)v_1) \in K.$$

En posant $k_3 = k_2 + tk_0 + (1-t)k_1$ on a que k_3 appartient à $T_K(-Su_0)$ et $\alpha_3 = \alpha_2 + t\alpha_0 + (1-t)\alpha_1 \geq 0$. De ce fait, nous avons que

$$tb_0 + (1-t)b_1 = (J'(u_0; tv_0 + (1-t)v_1) + \alpha_3,\ S'(u_0; tv_0 + (1-t)v_1) + k_3)$$

appartient à $B(u_0)$. □

LEMME 2. *Les deux convexes non vides A et $B(u_0)$ sont disjoints.*

PREUVE. Supposons que $A \cap B(u_0) \neq \emptyset$; alors, par définition, il existe $\alpha \geq 0$, $v \in X$, $k_0 \in T_K(-Su_0)$, $\beta > 0$ et $k_1 \in \overset{\circ}{K}$ tel que:

$$(J'(u_0; v) + \alpha,\ S'(u_0; v) + k_0) = (-\beta, -k_1).$$

Soit

$$J'(u_0; v) = -\beta - \alpha < 0 \tag{5}$$

$$S'(u_0; v) = -k_1 - \frac{k_0^n + Su_0}{t_n} + o(1) \tag{6}$$

où $k_0^n \in K$ et $\lim\limits_{t_n \to 0} \dfrac{k_0^n + Su_0}{t_n} = k_0$.

Par définition de $S'(u_0; v)$, nous avons aussi:

$$S'(u_0; v) = \frac{S(u_0 + t_n v) - Su_0}{t_n} + o(1) \tag{7}$$

Les relations (6) et (7) entraînent alors que:

$$S(u_0 + t_n v) = -k_0^n - t_n(k_1 + o(1)) \tag{8}$$

Puisque $k_1 \in \overset{\circ}{K}$, il existe alors $\tau_1 > 0$ tel que pour $0 < t_n < \tau$ on ait $k_1 + o(1) \in \overset{\circ}{K}$, et du fait que K est un cône, on déduit de (8) que

$$S(u_0 + t_n v) \in -K. \tag{9}$$

Par ailleurs la relation (5) entraîne qu'il existe $\tau_1 < \tau$ tel que si $0 < t_n < \tau_1$ on ait:

$$J(u_0 + t_n v) - J(u_0) = t_n(J'(u_0; v) + o(1)) < 0. \tag{10}$$

Ainsi, des relations (9) et (10) précédentes nous obtenons pour $0 < t_n < \tau_1$:

$$\begin{cases} S(u_0 + t_n v) \in -K, \\ J(u_0 + t_n v) < J(u_0). \end{cases}$$

Ceci contredit l'optimalité de u_0. □

Le Lemme 2 permet alors d'appliquer le théorème de Hahn-Banach, c'est-à-dire qu'il existe un réel c_0 et un élément λ^* de Y^* tel que $\forall \alpha \geq 0$, $\forall k \in T_K(-Su_0)$, $\forall v \in X$, $\forall k' \in \overset{\circ}{K} = K$ et $\forall \beta \geq 0$ on a:

$$-\lambda_0\beta - \langle \lambda^*, k' \rangle \leq c_0(J'(u_0; v) + \alpha) + \langle \lambda^*, S'(u_0; v) + k \rangle. \tag{11}$$

Cette relation implique nécessairement que $c_0 \geq 0$ et alors la relation (11) se réduit à: $\forall k \in T_K(-Su_0)$, $\forall v \in X$

$$-\langle \lambda^*, k \rangle \leq c_0 J'(u_0; v) + \langle \lambda^*, S'(u_0; v) \rangle. \tag{12}$$

Puisque $T_K(-Su_0)$ est un cône, la relation (12) entraîne que:

$$\langle \lambda^*, k \rangle \geq 0 \quad \forall k \in T_K(-Su_0), \tag{13}$$

ce qui implique en particulier que $\lambda^* \in K^*$. En remplaçant k par $k + tSu_0$, $t > 0$, la relation (13) implique que $\langle \lambda^*, Su_0 \rangle = 0$. Ainsi, nous obtenons:

$$\begin{cases} c_0 J'(u_0; v) + \langle \lambda^*, S'(u_0; v) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X, \\ \langle \lambda^*, Su_0 \rangle = 0, \\ \lambda^* \in K^*, \quad c_0 \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

□

3. - Application au problème $(\mathcal{P})$. Preuve du théorème 1 et 1-bis

Par commodité d'écriture, on va supposer le long de ce paragraphe que $|\Omega| = 1$.

Le lemme suivant va nous permettre le passage du problème $(\mathcal{P})$ au problème abstrait $(\mathcal{P}_a)$ en vue d'appliquer le Théorème 2.

LEMME 3. (cf. [Ba], [C-R]). *Soit $v \in L^1(\Omega)$; nous avons l'équivalence suivante:*

$$\begin{cases} \forall \varphi \text{ convexe lipschitzienne de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_\Omega \varphi(v)(x)\,dx \leq \int_\Omega \varphi(h)(x)\,dx \end{cases} \iff \begin{cases} \forall t \in [0,1] \\ \displaystyle\int_0^t v_*(\sigma)\,d\sigma \leq \int_0^t h_*(\sigma)\,d\sigma \\ \text{et } \displaystyle\int_\Omega v(x)\,dx = \int_\Omega h(x)\,dx. \end{cases}$$

La preuve de ce dernier lemme a été réactualisée par Alvino, Lions et Trombetti [A-L-T].

On considère les cônes convexes fermés suivants:

$$K_1 = \{l \in L^\infty(0,1) : l(t) \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in [0,1]\}$$

$K = K_1 \times [0,+\infty[$ ainsi $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on définit:

$$(S_1 v)(t) = \int_0^t v_*(\sigma)\,d\sigma - \int_0^t h_*(\sigma)\,d\sigma,\ t \in [0,1],\ S_2 v = \int_\Omega h(x)\,dx - \int_\Omega v(x)\,dx.$$

On note S l'application de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega) \times \mathbb{R}$ définie par $Sv = (S_1 v, S_2 v)$. Puisque le réarrangement conserve l'intégrale, le Lemme 3 et la définition de S entraînent:

LEMME 4.

$$Sv \in -K \iff \begin{cases} \forall \varphi \text{ convexe, lipschitzienne} \\ \displaystyle\int_\Omega \varphi(v)\,dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\,dx. \end{cases}$$

En particulier, le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent à:

$$J(u_0) = \inf\{J(u) : u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } Su \in -K\}.$$

L'application du Théorème 2 nécessite le calcul de la dérivée directionnelle de S_1. Nous rappelons alors le lemme suivant dont la preuve se trouve essentiellement dans [M-T], [M] et [M-R].

LEMME 5. *Pour u, v dans $L^1(\Omega)$ et $\sigma \in [0,1]$ on définit $w(u;v)(\sigma)$ par:*

$$w(u;v)(\sigma) = \begin{cases} \displaystyle\int_{u>u_*(\sigma)} v(x)\,dx & si\ |u = u_*(\sigma)| = 0 \\ \displaystyle\int_{u>u_*(\sigma)} v(x)\,dx + \int_0^{\sigma-|u>u_*(\sigma)|} (v_{|P(\sigma)})_*(\tau)\,d\tau & sinon \end{cases}$$

avec $P(\sigma) = \{x \in \Omega : u(x) = u_*(\sigma)\}$, $v_{|P(\sigma)}$ est la restriction de v à $P(\sigma)$. Alors:

i) $w(u;v) \in C[0,1]$;

ii) $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left\| \frac{S_1(u+tv) - S_1 u}{t} - w(u,v) \right\|_\infty = 0;$

iii) *Pour v_1, v_2 dans $L^1(\Omega)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ on a:*

$$w(u; \alpha v_1 + \beta v_2) - \alpha w(u, v_1) - \beta w(u, v_2) \in -K_1.$$

La preuve de iii) découle directement de la propriété suivante: pour $g \in L^1(\Omega)$ et pour tout $\sigma \in [0,1]$ on a

$$\int_0^\sigma g_*(\tau)\, d\tau = \operatorname{Max}\left\{ \int_E g(x)\, dx : |E| = \sigma \right\}.$$

Pour la preuve de cette propriété, voir [CR] ou [Ra]. Pour ii) on note que

$$\frac{S_1(u+tv)(\sigma) - S_1 u(\sigma)}{t} = \frac{1}{t}\left[\int_0^\sigma [(u+tv)_*(\tau) - u_*(\tau)]\, d\tau \right].$$

Le lemme précédent assure alors que l'opérateur $S'(u_0; \cdot)$ est donnée par

$$S'(u_0; v) = \left(w(u_0; v); - \int_\Omega v(x)\, dx \right);$$

de plus, c'est un opérateur convexe au sens du Théorème 2.

THÉORÈME 3 (Condition d'optimalité pour u_0). *Soit u_0 la solution optimale de $(\mathcal{P})$ qui soit non identiquement nulle. Alors il existe une mesure de Radon positive ou nulle $\lambda^* \in K_1^*$ (cône dual de K_1) et un réel $c_h \geq 0$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:*

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\, dx - \int_\Omega f v\, dx + \int_0^1 w(u_0; v)(\sigma)\, d\lambda^*(\sigma) - c_h \int_\Omega v(x)\, dx \geq 0.$$

REMARQUE. Si u_0 est identiquement nulle ($u_0 = 0$) alors le Théorème 1 est trivial. Dans ce Théorème 3, cette hypothèse a été mise pour des raisons de commodité de la preuve qui suit.

PREUVE. On applique le Théorème 2 avec $X = H_0^1(\Omega)$, $Y = L^\infty(0,1) \times \mathbb{R}$, $K = K_1 \times [0, +\infty[$ et J et S définies comme ci-dessus. Il existe alors deux réels $c_0 \geq 0$, $c_1 \geq 0$ et une mesure positive $\lambda_1^* \in K_1^*$ tel que $(c_0, c_1, \lambda_1^*) \neq (0,0,0)$ satisfaisant, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, à:

$$c_0 J'(u_0) \cdot v + \langle \lambda_1^*; w(u_0; v) \rangle - c_1 \int_\Omega v(x)\, dx \geq 0. \tag{15}$$

LEMME FONDAMENTAL. $c_0 \neq 0$.

PREUVE. Si $c_0 = 0$ alors la relation (15) implique que pour tout $v \in L^1(\Omega)$:

$$\int_0^1 w(u_0, v)(\sigma)\, d\lambda_1^*(\sigma) - c_1 \int_\Omega v(x)\, dx \geq 0. \tag{16}$$

(En effet, l'application $L^1(\Omega) \ni v \mapsto w(u_0; v)$ est 1-lipschitzienne.) En particulier, si F est borélienne avec $F(u_0) \in L^1(\Omega)$, la relation (16) donne:

$$\int_0^1 d\lambda_1^*(\sigma) \left(\int_0^\sigma F(u_{0^*})(\tau)\, d\tau \right) = c_1 \int_0^1 F(u_{0^*})\, d\tau \tag{17}$$

d'où

$$\int_0^1 \sigma\, d\lambda_1^*(\sigma) = c_1. \tag{18}$$

1er cas. Si $s_m = |u_0 = \sup \operatorname{ess} u_0| > 0$ alors $\sup \operatorname{ess} u_0 \in \mathbb{R}$.

Notons que, puisque $u_0 \neq 0$ alors $s_m < 1$. En ramplaçant F par $\chi_{\{\sup \operatorname{ess} u_0\}}(\sigma)$, les équations (17) et (18) donnent:

$$\int_0^1 \inf(\sigma, s_m)\, d\lambda_1^*(\sigma) = c_1 \int_0^{s_m} d\tau = \int_0^1 s_m \sigma\, d\lambda_1^*(\sigma) \tag{19}$$

(car $F(u_{0^*})(\tau) = \chi_{\{\sup \operatorname{ess} u_0\}}(u_{0^*})(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \tau \leq s_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$).

Ainsi si on pose $\psi(\sigma) = \inf(\sigma, s_m) - \sigma s_m \geq 0$, la relation (19) entraîne:

$$\int_0^1 \psi(\sigma)\, d\lambda_1^*(\sigma) = 0. \tag{20}$$

Comme λ_1^* est une mesure positive, la relation infère que:

$$\text{support } \lambda_1^* \subset \{\sigma \in [0,1] : s_m \sigma = \inf(\sigma, s_m)\} = A_0.$$

Etudions ce dernier ensemble. Soit $\sigma \in A_0$. Si $0 \leq \sigma \leq s_m$ alors nécessairement $\sigma = 0$ (car $s_m < 1$). Si $1 \geq \sigma > s_m$ alors $\sigma = 1$.

Ainsi support $\lambda_1^* \subset \{0, 1\}$, et par conséquent λ_1^* ne peut pas être un élément du dual de $L^\infty(0,1)$ à moins que $\lambda_1^* = 0$; mais dans ce cas $c_1 = 0$ et cela contredirait le fait que $(c_0, c_1, \lambda_1^*) \neq (0,0,0)$.

2ème cas. $|u_0 = \text{sup ess}\, u_0| = 0$.

Comme $u_{0^*}(0) = \text{sup ess}\, u_0$ alors $0 \notin P(u_{0^*})$. Par ailleurs, pour $v \in L^1(\Omega)$, si on définit $\overline{v}(x)$ par $\overline{v}(x) = \chi_{\Omega \setminus P(u_0)}(x) \cdot v(x)$ alors

$$w(u_0; \overline{v})(\sigma) = \int_{u_0 > u_{0^*}(\sigma)} \overline{v}(x)\, dx \quad \forall \sigma \in [0, 1].$$

Dans ce cas on voit que l'application $v \mapsto w(u_0; \overline{v})$ est linéaire; de ce fait la relation (16) devient: $\forall v \in L^1(\Omega)$

$$(21) \qquad c_1 \int_\Omega \overline{v}(x)\, dx = \int_0^1 w(u_0; \overline{v})\, d\lambda_1^*(\sigma) = \int_\Omega v(x) \chi_{\Omega \setminus P(u_0)}(x) \int_{|u_0 \geq u_0(x)|}^1 d\lambda_1^*(\sigma)$$

(ceci par l'intermédiaire du théorème de Fubini) ainsi pour presque tout $x \in \Omega$

$$(22) \qquad c_1 \chi_{\Omega \setminus P(u_0)}(x) = \chi_{\Omega \setminus P(u_0)}(x) \int_{|u_0 \geq u_0(x)|}^1 d\lambda_1^*(\sigma).$$

Par équimesurabilité la relation (22) devient: pour tout $s \in \overline{\Omega}^* \setminus P(u_{0^*})$

$$(23) \qquad \begin{cases} c_1 = \displaystyle\int_s^1 d\lambda_1^*(\sigma) \\ 0 \in \overline{\Omega}^* \setminus P(u_{0^*}) \end{cases} \Rightarrow c_1 = \int_0^1 d\lambda_1^*(\sigma).$$

Les relations (18) et (23) donnent alors $\displaystyle\int_0^1 (1 - \sigma)\, d\lambda_1^*(\sigma) = 0$, ce qui entraîne que soit $\lambda_1^* = 0$ donc $c_1 = 0$ (contradiction), soit λ_1^* est un Dirac au point à $\sigma = 1$, contredisant le fait que $\lambda_1^* \in L^\infty(0, 1)^*$.

Dans tous les cas on a une contradiction donc: $c_0 \neq 0$. □

On pose $\lambda_1^* = \dfrac{\lambda_1^*}{c_0}$ et $c_h = \dfrac{c_1}{c_0}$, d'où le théorème 3. □

PREUVE DU THÉORÈME 1. Il reste à interpréter le Théorème 3 au sens des distributions: soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \leq 0$, comme à la relation (21); nous avons:

$$\begin{aligned}\int_0^1 w(u_0; v)(\sigma)\, d\lambda^*(\sigma) &\leq \int_0^1 d\lambda^*(\sigma) \int_\Omega v(x)\chi_{u_0>u_{0^*}(\sigma)}(x) \\ &= \int_\Omega v(x) \left(\int_{|u_0 \geq u_0(x)|}^1 d\lambda^*(\sigma) \right) dx\end{aligned} \tag{24}$$

L'inéquation du Théorème 3 et la relation (24) nous fournissent l'inéquation

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v\, dx - \int_\Omega f\, v\, dx + \int_\Omega v(x)\, \psi_1(x)\, dx \geq 0 \tag{25}$$

pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \leq 0$, où

$$\psi_1(x) = \int_{|u_0 \geq u_0(x)|}^1 d\lambda^*(\sigma) - c_h$$

d'où, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$-\Delta u_0 - f + \psi_1 \leq 0. \tag{26}$$

De même si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \geq 0$ alors

$$\int_0^1 w(u_0; v)(\sigma)\, d\lambda^*(\sigma) \leq \int_\Omega v(x)\, \psi_1(x)\, dx + \int_\Omega v(x)\chi_{P(u_0)}(x) \left(\int_{P(u_{0^*})} d\lambda^*(\sigma) \right) dx$$

ce qui, combinée avec le Théorème 3, donne dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$-\Delta u_0 - f + \psi_1 + \chi_{P(u_0)} \int_{P(u_{0^*})} d\lambda^*(\sigma) \geq 0. \tag{27}$$

Quant à la relation d'orthogonalité, elle se traduit par:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left[\int_0^\sigma h_*(\tau)\, d\tau - \int_0^\sigma u_{0^*}(\tau)\, d\tau \right] d\lambda^*(\sigma) \\ &= c_h \left[\int_\Omega h(x)\, dx - \int_\Omega u_0(x)\, dx \right] = 0.\end{aligned} \tag{28}$$

Puisque $\int_0^\sigma h_*(\tau)\,d\tau \geq \int_0^\sigma u_{0^*}(\tau)\,d\tau \;\forall \sigma \in [0,1]$, la relation (28) implique que le support de λ^* est contenu dans l'ensemble

$$\left\{\sigma \in [0,1] : \int_0^\sigma h_*(\tau)\,d\tau = \int_0^\sigma u_{0^*}(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Puisque ψ_1 et ψ_2 sont dans $L^\infty(\Omega)$, on déduit que $-\Delta u_0 - f \in L^\infty(\Omega)$ d'où $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)\ \forall p \in [1, +\infty[$. □

Preuve du Théorème 1-bis. Il nous faut prouver que si $f < -c_h$ alors $\psi_1 = \psi_2$. En effet si $f < -c_h$ alors $|P(u_0)| = 0$. S'il n'en était pas ainsi i.e. $|P(u_0)| > 0$, alors presque partout sur $P(u_0)$ on aurait $\Delta u_0 = 0$. De ce fait, sur $P(u_0)$, on aurait $0 < -f(x) - c_h \leq -\overline{\psi}_1(x) \leq 0$: absurde.

Ici, $\overline{\psi}_1(x) = \int_{|u_0 \geq u_0(x)|}^1 d\lambda^*(\sigma)$. □

Appendice. - Ecoulements stationnaires incompressibles 2-d

Dans l'étude des écoulements compressibles, il est classique d'introduire une condition d'admissibilité, ou condition d'entropie, à partir des équations de Navier-Stokes et en faisant tendre les coefficients de viscosité et de conduction thermique vers zéro. On va voir qu'il en est de même dans le cas incompressible, pourvu qu'on se restreigne aux écoulements stationnaires en dimension $d = 2$.

On considère donc un écoulement, solution des équations d'Euler

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \Omega$$

et on suppose que (u,p) est limite, dans un sens assez fort, d'une suite (u^ν, p^ν) de solutions des équations de Navier-Stokes, quand la viscosité ν tend vers zéro:

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} -\nu\,\Delta u^\nu + (u^\nu \cdot \nabla)u^\nu + \nabla p^\nu = 0, \\ \operatorname{div} u^\nu = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega.$$

Introduisons l'invariant de Bernouilli $B = \frac{1}{2} u \cdot u + p$ et la vorticité $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$. Pour (u^ν, p^ν), on définit de même B^ν et ω^ν. On va supposer que B^ν tend vers B et ω^ν tend vers ω dans un sens assez fort pour que les principes du maximum que nous allons dégager restent vrais pour (B, ω).

On utilise maintenant les formules classiques:

(A1) $$(-\nu\Delta + u^\nu \cdot \nabla)\omega^\nu = 0, \quad \text{vrai si } d = 2,$$

(A2) $$(-\nu\Delta + u^\nu \cdot \nabla)B^\nu = -\nu|\omega^\nu|^2, \quad \text{vrai pour tout } d \geq 2.$$

On en déduit, pour (B^ν, ω^ν) d'abord, puis pour (B, ω) par passage à la limite, les propriétés:

(A3) ω n'a pas d'extrémum local strict,

(A4) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ B + \lambda\omega$ n'a pas de maximum local strict.

Introduisons maintenant la fonction de courant ϕ par $u = (\partial_2\phi, -\partial_1\phi)$. On a $\mathrm{Jac}(\omega, \phi) = 0$, de sorte que $\omega = f(\phi)$, au moins localement en dehors des points selles de ϕ. On calcule aisément $\nabla B = f(\phi)\,\nabla\phi$, de sorte qu'à son tour $B = F(\phi)$ avec $F' = f$. De (A3) et (A4), on déduit que:

(A5) f est monotone,

(A6) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ F + \lambda f$ n'a pas de maximum local.

La propriété (A5) signifie que F est convexe, ou concave. La propriété (A6) se réécrit sous la forme

(A7) $$\forall x \leq y \leq z,\ \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ F(x) & F(y) & F(z) \\ F'(x) & F'(y) & F'(z) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} F'',$$

ou encore:

PROPOSITION. *La courbe de plan décrite par* $x \mapsto (F(x), F'(x))$ *est convexe et tourne dans le sens trigonométrique si* $F'' \geq 0$, *dans le sens des aiguilles d'une montre si* $F'' \leq 0$. *Elle n'est cependant pas fermée.*

On peut encore interpréter ce qui précède de manière analytique, en vérifiant que (A7), ou (A6), entraîne $f'(f'^2 - ff'') \geq 0$.

Il y a trois possibilités:

1er cas. F est concave et croissante. Alors $f = \exp h$ avec h convexe décroissante.

2ème cas. F est concave et décroissante. Alors $f = -\exp h$ avec h convexe croissante.

3ème cas. F est convexe. Alors, avec $f(\phi_0) = 0$:

$$f = \exp h_+ \quad \text{pour } \phi > \phi_0, \quad \text{avec } h_+ \text{ concave croissante},$$

$$f = \exp h_- \quad \text{pour } \phi < \phi_0, \quad \text{avec } h_- \text{ convexe décroissante}.$$

C'est bien sûr les 1er et 2ème cas qui sont envisagés dans cet article. Ces deux cas n'en font qu'un si on considère aussi les écoulements avec points selles.

Notons qu'on peut montrer un résultat plus précis concernant (B^ν, ω^ν), à savoir que $G(B^\nu, \omega^\nu)$ n'a pas de maximum local strict lorsque G, croissante par rapport à son premier argument, est convexe en ses deux variables. Mais cela ne permet pas d'affiner la description de F et f.

Il est montré dans [S] que la fonction de courant ϕ d'un écoulement satisfaisant (E) est un point critique de l'énergie cinétique $J(\phi) = 1/2 \int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx$ parmi les fonctions satisfaisant les contraintes de la forme

$$\int_\Omega \varphi(\phi)\, dx \leq \int_\Omega \varphi(h)\, dx,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{C}$$

où $h : \Omega \to \mathbb{R}$ et le cône $\mathcal{C}$ sont donnés, $\mathcal{C}$ étant fermé pour une topologie adéquate. La fonction f qui apparaît dans l'équation $-\Delta\phi = f(\phi)$ est alors formellement $-g'$ où g est un élément de $\mathcal{C}$. Les premier et deuxiéme cas ci-dessus sont donc des cas particuliers où $\mathcal{C}$ est le cône des fonctions convexes d'une variable réelle. Le Théoréme 1 précise alors dans quel sens $\Delta\phi \in \partial g(\phi)$ où g est convexe.

REFERENCES

[A-L-T] A. ALVINO - P.L. LIONS - G. TROMBETTI, *On optimization problems with prescribed rearrangement*. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. Vol. 13 N° 2 (1989), 185-220.

[B] C. BANDLE, *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Pitman Advances Publishing Program, Boston-London-Melbourne 1980.

[C-R] K.M. CHONG - N.M. RICE, *Equimeasurable rearrangement of functions*. Queen's University (1971).

[F] P. FAURRE, *Analyse Numérique Notes d'optimisation*. Ecole polytechnique (1984).

[G] I.V. GIRSANOV, *Lectures on mathematical theory of extremum problems*. Springer, Berlin, 1972.

[Ka] B. KAWHOL, *On rearrangements, symmetrization and maximum principles*. Lectures Notes in Math. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Ku] S. KURCYUSZ, *On the existence and nonexistence of Lagrange multipliers in Banach spaces*. J. Optim. Theory Appl. **20** (1976), 81-110.

[M] J. MOSSINO, *Inégalités isoperimétriques et application en Physique*. Collection Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.

[M-T] J. MOSSINO - R. TEMAM, *Directional derivative of the increasing rearrangement mapping and application to a queer differential equation in plasma physics*. Duke Math. J. **48** (1981), 475-495.

[M-R] J. MOSSINO - J.M. RAKOTOSON, *Isoperimetric inequalities in Parabolic equations*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), 51-73.

[Ra] J.M. RAKOTOSON, *Réarrangement relatif et équations aux dérivées partielles. Cours de 3ème cycle*. Université de Poitiers Année 1990-1991 (Graduate classes).

[R-T] J.M RAKOTOSON - R. TEMAM, *A co-area formula with applications to monotone rearrangement and to regularity*. Arch. Rational Mech. Anal. **109** (1990), 213-238.

[S] D. SERRE, *Sur le principe variationnel des équations de la mécanique des fluides parfaits*. Modélisation mathématique et analyse numérique **27** (1993), 207-226.

[Z-Ku] J. ZOWE - S. KURCYUSZ, *Regularity and stability for the mathematical programming problem in Banach space*. Applied Math. Optim. **5** (1979), 49-62.

Département de Mathématiques
Université de Poitiers
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers

Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07