

# *Astérisque*

GENEVIÈVE POURCIN

## **Polycylindres privilégiés**

*Astérisque*, tome 16 (1974), p. 145-160

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1974\\_\\_16\\_\\_145\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__145_0)

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## POLYCYLINDRES PRIVILEGIÉS

par Geneviève POURCIN

§ 1. Introduction.

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ ,  $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset U$  un polycylindre, i.e. un produit de compacts convexes d'intérieur non vide, et  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $U$ . On sait qu'il existe des résolutions libres finies de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $K$  et que pour une telle résolution  $\mathcal{L}_\bullet$  de  $\mathcal{F}$ , le complexe de  $\mathcal{C}^0(K)$ -modules,

$$\mathcal{L}_\bullet(K) \longrightarrow \mathcal{F}(K) \longrightarrow 0$$

est exact. On note  $B(K)$  l'algèbre des fonctions continues sur  $K$  et holomorphes sur  $\overset{\circ}{K}$ . Le complexe d'espaces de Banach

$$\mathcal{L}_\bullet(K) \otimes_{\mathcal{H}(K)} B(K)$$

est noté  $B(K, \mathcal{L}_\bullet)$ .

On dit que  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié s'il existe une résolution  $\mathcal{L}_\bullet$  de  $\mathcal{F}$  pour laquelle le complexe  $B(K, \mathcal{L}_\bullet)$  est exact direct. Il est facile de voir qu'il en est alors de même pour toute résolution. On introduit l'espace

$$B(K, \mathcal{F}) = \text{coker}[B(K, \mathcal{L}_1) \longrightarrow B(K, \mathcal{L}_0)]$$

muni de la topologie quotient. Il ne dépend pas de la résolution choisie et si  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié, c'est un espace de Banach.

En prenant au lieu de  $B(K)$  l'espace  $H(K)$  des fonctions holomorphes sur  $\overset{\circ}{K}$  et de carré intégrable, munie de la norme  $L^2$ , on définit de même une notion de privilège  $L^2$  :  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié au sens  $L^2$  si et seulement si  $H(K, \mathcal{L}_1)$  est exact et  $H(K, \mathcal{F})$  séparé.

Notations.

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ , on note

$$I_x = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \in K_i\}$$

$$\pi_x = U \longrightarrow \mathbb{C}^{I_x} \text{ la projection.}$$

Pour tout entier  $p$

$$K^{(p)} = \{x \in K \mid \text{card } I_x \gg p\}$$

$K^{(1)}$  est la frontière topologique et  $K^{(n)}$  la frontière distinguée.

Soit  $\sigma_p(\mathcal{F}) = \{x \in U \mid \text{prof}_x \mathcal{F} \leq p\}$ . On sait que  $\sigma_p(\mathcal{F})$  est un sous-ensemble analytique de  $U$  de dimension  $\leq p$ .

Enfin on dit que  $K$  est localement  $\mathcal{F}$ -privilegié si, pour tout point  $x$  de  $K$ , il existe un système fondamental  $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$  de voisinages de  $x$  dans  $K$  tel que, pour tout  $\alpha$ ,  $L_\alpha$  soit un polycylindre  $\mathcal{F}$ -privilegié.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME.- Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout entier  $p$ ,  $0 \leq p \leq n-1$ , on a

$$\sigma_p(\mathcal{F}) \cap K^{(p+1)} = \emptyset.$$

(ii) Pour tout  $x$  dans  $K$ ,  $\mathcal{F}$  est  $\pi_x$ -plat en  $x$ .

(iii)  $K$  est localement  $\mathcal{F}$ -privilegié.

(iv)  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié.

(v) Le morphisme de restriction  $B(K, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(\overset{\circ}{K})$  est injectif.

(v') Le morphisme de restriction  $H(K, \mathcal{F}) \longrightarrow H(\overset{\circ}{K})$  est injectif.

(vi)  $B(K, \mathcal{F})$  est séparé.

(vi')  $H(K, \mathcal{F})$  est séparé.

§ 2. Démonstration du théorème.

A - Equivalence de (i) et (ii).

Il est évident que (ii) implique (i). La réciproque utilise le lemme suivant :

LEMME ([3], III 5).- Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$  et  $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}^p$  la projection. Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $V$  et  $Z$  l'ensemble analytique de non  $\pi$ -platitude de  $\mathcal{F}$ . Soit  $k \geq 0$ .

On suppose que la profondeur de  $\mathcal{F}$  est supérieure à  $p + k$  en tout point de  $V$ . Alors les fibres de  $\pi|_Z$  sont de dimension strictement supérieure à  $k$  en chacun de leurs points.

Montrons que (i) implique (ii). La démonstration se fait par récurrence descendante sur  $\text{Card } I_x$ . On déduit de (i) que  $\mathcal{F}$  est libre au voisinage de  $K^{(n)}$ , donc vérifie (ii) pour tout point  $x$  de  $K^{(n)}$ .

Supposons (ii) démontré pour tout point de  $K^{(p+1)}$  et soit  $x$  vérifiant  $\text{Card } I_x = p$ .

On note

$$K' = \prod_{i \in I_x} K_i, \quad K'' = \prod_{i \notin I_x} K_i$$

et  $\pi$  au lieu de  $\pi_x$ . Soient  $s$  un élément de  $K'^{(p)}$  et  $y$  un élément de  $\{s\} \times K''$ . Si  $\text{Card } I_y$  est supérieur ou égal à  $(p + 1)$ , on déduit de l'hypothèse de récurrence que  $\mathcal{F}$  est  $\pi_y$ -plat en  $y$ , donc a fortiori  $\pi$ -plat. Par conséquent, si  $Z$  désigne le sous-ensemble de  $U$  de non  $\pi$ -platitude de  $\mathcal{F}$ , la fibre de  $Z$  en  $s$  ne rencontre pas  $K''^{(1)}$  et est donc de dimension au plus 0 dans  $K''$ . Il résulte alors de l'hypothèse et du lemme que  $Z$  ne rencontre pas  $\{s\} \times K''$ .

B - Montrons que (ii) implique (iii) .

C'est une conséquence de "platitude et privilège" et du théorème d'existence des voisinages privilégiés ([1]). En effet soit

$$x = (x', x'') \in K^{(p)} \times K'' \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p} .$$

$\mathcal{F}$  étant  $\pi_x$ -plat, pour tout polycylindre  $L''$  contenu dans  $K''$  et  $\mathcal{F}(x')$ -privilégié, il existe un voisinage  $V$  de  $x'$  tel que pour tout polycylindre  $L'$  contenu dans  $V$ ,  $L' \times L''$  soit  $\mathcal{F}$ -privilégié ([1]) § 7, prop. 6). La démonstration dans le cas du privilège  $L^2$  est rigoureusement la même.

C- Les faisceaux  $\mathcal{B}_{K,T}$  .

Pour montrer que (iii) implique (iv), on doit montrer que sous l'hypothèse (iii) le complexe  $B(K, \mathcal{L})$  est exact direct. Pour cela on va considérer  $B(K)$  comme espace des sections sur  $K$  d'un certain faisceau  $\mathcal{B}_K$ . D'autre part on rappelle qu'une suite d'espaces de Banach

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

est exacte directe si et seulement si, pour tout Banach  $T$

$$0 \longrightarrow L(T, E) \longrightarrow L(T, F) \longrightarrow L(T, G) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte. Ceci conduit à introduire les faisceaux  $\mathcal{B}_{K,T}$  définis ci-dessous.

Soit donc  $K$  un polycylindre compact de  $\mathbb{C}^n$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$ , on note  $\mathcal{B}_K(U)$  l'espace des fonctions continues sur  $U \cap K$  et holomorphes sur  $U \cap \overset{\circ}{K}$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. C'est un Fréchet.

Pour tout espace de Banach  $T$ , on note

$$\mathcal{B}_{K,T}(U) = L(T, \mathcal{B}_K(U)) ;$$

On définit ainsi un faisceau  $\mathcal{B}_{K,T}$  concentré sur  $K$ .

PROPOSITION 1.

- (1)  $H^0(K, \mathcal{B}_{K,T}) = L(T, B(K))$  .  
 (2)  $\forall q > 0, H^q(K, \mathcal{B}_{K,T}) = 0$  .

On utilise la démonstration du théorème de Dolbeault faite dans [1].

Soit  $L$  un polycylindre de  $\mathbb{C}^n$  ; on note  $Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$  l'espace des formes

$$f d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

telles que, pour toute suite  $\{j_1, \dots, j_q\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  disjointe de  $\{i_1, \dots, i_p\}$  on ait

$$\frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}} \in \mathcal{C}(L)$$

et on le munit de la norme

$$\sup_{j_1, \dots, j_q} \left\| \frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \dots \partial \bar{z}_{j_q}} \right\| .$$

Si on note

$$Q^p(L) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} Q_{i_1, \dots, i_p}(L)$$

et si on considère la différentielle

$$\bar{\partial}_p, \quad 0 \leq p \leq n-1, \quad \bar{\partial} : Q^p(L) \rightarrow Q^{p+1}(L)$$

il est démontré dans ([1], § 6, théorème 1) que le complexe d'espaces de Banach

$$(*) \quad 0 \rightarrow B(L) \rightarrow Q_0(L) \rightarrow Q_1(L) \rightarrow \dots \rightarrow Q_n(L) \rightarrow 0$$

est exact direct.

Ceci permet de définir une résolution fine du faisceau  $\mathcal{B}_{K,T}$ . En effet, pour tout ouvert  $V$  et tout entier  $p$  on note

$$Z_{K,T}^p(V) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \mathcal{Q}_{K,T; i_1 \dots i_p}(V)$$

où

$$Z_{K,T; i_1 \dots i_p}(V) = L(T, Z_{K; i_1 \dots i_p}(V))$$

et  $\mathcal{Q}_{K; i_1 \dots i_p}(V)$  désigne l'espace des formes différentielles,

$$f d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

telles que, pour toute suite  $\{j_1, \dots, j_q\}$  disjointe de  $\{i_1, \dots, i_p\}$

$$\frac{\partial^q f}{\bar{z}_{j_1} \dots \bar{z}_{j_q}} \in \mathcal{C}(K \cap V) .$$

Comme tout point de  $K$  possède un système fondamental de voisinages dans  $K$  formé de polycylindres, on déduit de la suite exacte directe (\*), une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_{K,T} \longrightarrow \mathcal{Q}_{K,T} .$$

La proposition résulte alors de (\*) avec  $L = K$ .

**COROLLAIRE.**— Pour tout polycylindre  $L$ , on a  $\forall q > 0$ ,  $H^q(L^\circ, \mathcal{B}_K) = 0$ .

En effet, il suffit de montrer

$$\forall q > 0, \quad H^q(L, \mathcal{B}_K) = 0$$

le corollaire s'en déduisant par un argument classique de limite projective.

Soit  $(L)$  un système fondamental de voisinages dans  $K$  de  $L \subset K$  formé de polycylindres, on a :

$$Z_{K,T} \mathcal{L} = \varinjlim_{\alpha} L(T, Q^*(L_\alpha))$$

et pour tout  $\alpha$ ,  $Q^*(L_\alpha)$  est exact direct. C.q.f.d.

Dans le cas du privilège  $L^2$ , pour tout ouvert  $U$ , on note  $\mathcal{H}_K(U)$

l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur  $\overset{\circ}{K} \cap U$  et de carré intégrable, muni de la norme  $L^2$ . On obtient ainsi un faisceau  $\mathcal{H}_K$ . Comme toute suite exacte courte d'espace de Hilbert est directe, il est inutile d'introduire des faisceaux  $\mathcal{H}_{K,T}$ . un résultat de Hörmander permet d'obtenir la

PROPOSITION 1' ([2], II 1).

- (1)  $H^0(K, \mathcal{H}_K) = H(K, \mathcal{F})$  .  
 (2)  $\forall q > 0$  ,  $H^q(K, \mathcal{H}_K) = 0$  .

D - Démonstration de : (iii)  $\Rightarrow$  (iv) .

Les notations étant celles du paragraphe 1, soit  $\mathcal{L}$  une résolution de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $K$ , il lui correspond un complexe de faisceaux  $\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L}$ . On considère le faisceau

$$\mathcal{B}_{K,T} = \text{coker}[\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L}_0]$$

il est indépendant de la résolution  $\mathcal{L}$  choisie.

LEMME 1.- Si  $K$  est localement  $\mathcal{F}$ -privilegié, alors

- (a) le complexe  $\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L}$  est exact.  
 (b) pour tout ouvert  $V$ ,  $\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{F}(V) = L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(V))$  .

Soient  $x \in K$  et  $(L_\alpha)_\alpha$  un système fondamental de voisinage de  $x$  dans  $K$ ,  $\mathcal{F}$ -privilegiés. Pour tout  $\alpha$ ,  $B(L_\alpha, \mathcal{F})$  est un espace de Banach et pour tout Banach  $T$  le complexe

$$L(T, B(L_\alpha, \mathcal{L})) \longrightarrow L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F})) \longrightarrow 0$$

est exact. De plus

- (1)  $(\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L})_x = \varinjlim_\alpha L(T, B(L_\alpha, \mathcal{L}))$



d'où (a). Démontrons (b) :

Soit  $\mathcal{G}$  le faisceau défini par

$$\mathcal{G}(V) = L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(V))$$

pour tout ouvert  $V$ .

Il suffit de vérifier que le morphisme canonique de faisceaux

$$\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est un isomorphisme sur les fibres. Soit  $x \in K$  et  $(L_\alpha)_\alpha$  comme ci-dessus,

on déduit de (1) et de la suite exacte

$$(\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L}_1)_x \longrightarrow (\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{L}_0)_x \longrightarrow (\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{F})_x \longrightarrow 0$$

que  $(\mathcal{B}_{K,T} \mathcal{F})_x = \varinjlim_{\alpha} L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F}))$ . Il reste à montrer que :

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim_{\alpha} L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F})).$$

Or pour tout  $\alpha$ , on a un morphisme de restriction

$$L(T, B(L_\alpha, \mathcal{F})) \longrightarrow L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(L_\alpha^\circ))$$

et du fait que

$$\forall q > 0, \quad H^q(L_\alpha^\circ, \mathcal{B}_K) = 0 \quad (\text{corollaire de la proposition 1})$$

on a aussi par restriction, pour tout  $L_\beta$  contenu dans  $L_\alpha^\circ$  un morphisme

$$L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(L_\alpha^\circ)) \longrightarrow L(T, B(L_\beta, \mathcal{F}))$$

l'assertion résulte alors du fait que

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim_{\alpha} L(T, \mathcal{B}_K \mathcal{F}(L_\alpha^\circ)).$$

LEMME 2.- Si  $K$  est localement  $\mathcal{F}$ -privilegié,

(a)  $B(K, \mathcal{L})$  est exact et  $H^0(K, \mathcal{B}_K \mathcal{F}) = B(K, \mathcal{F})$ .

(b)  $B(K, \mathcal{F})$  est séparé.

(c)  $H^0(K, \mathcal{B}_{K,T} \mathcal{F}) = L(T, B(K, \mathcal{F}))$ .

(a) - est une conséquence du lemme 1 (a) et de la proposition 1.

(b) - Soit  $(L_\alpha)_\alpha$  une famille de polycylindres dans  $K$ ,  $\mathcal{F}$  privilégiés et dont les intérieurs dans  $K$  recouvrent  $K$ . On a un diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} B(K, \mathcal{F}) = H^\circ(K, \mathcal{B}_K \mathcal{F}) & \xrightarrow{i} & \Pi H^\circ(L_\alpha, \mathcal{B}_K \mathcal{F}) \\ \downarrow j & \nearrow k & \\ \Pi B(L_\alpha, \mathcal{F}) & & \end{array}$$

$i, j, k$  étant des restrictions ;  $i$  est injectif car  $\mathcal{B}_K \mathcal{F}$  est un faisceau donc  $j$  est injective. Comme  $\Pi B(L_\alpha, \mathcal{F})$  est séparé et  $j$  continue on en déduit que  $H^\circ(K, \mathcal{B}_K \mathcal{F})$  est séparé.

(c) - Résulte du lemme 1 (b) et du fait que pour tout ouvert  $U$  contenant  $K$

$$\mathcal{B}_K \mathcal{F}(U) = B(K, \mathcal{F}) .$$

**COROLLAIRE.**- Si  $K$  est localement  $\mathcal{F}$ -privilégié,  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilégié.

D'après le lemme 2 (b),  $B(K, \mathcal{F})$  est un espace de Banach ; on déduit de la proposition 1, du lemme 1 (a) et du lemme 2 (c) que pour tout Banach  $T$ , le complexe

$$0 \longrightarrow L(T, B(K, \mathcal{L})) \longrightarrow L(T, B(K, \mathcal{F})) \longrightarrow 0$$

est exact.

Remarque.- Dans le cas du privilège  $L^2$  la démonstration est simplifiée du fait qu'il suffit de démontrer les lemmes 1 et 2 pour  $T = \mathbb{C}$ .

E - Démonstration de : (iv)  $\implies$  (v) .

Elle résultera du lemme suivant, plus précis :

LEMME 3.- Si  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié, les applications naturelles

$$\begin{aligned} B(K, \mathcal{F}) &\xrightarrow{\rho} \mathcal{F}(\overset{\circ}{K}) \\ \mathcal{F}(K) &\longrightarrow B(K, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

sont injectives continues d'image dense.

Comme dans [1] (§ 8, lemme 1), soient  $a$  un point de  $\overset{\circ}{K}$  et  $m : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  l'application définie par

$$m(t, x) = tx + (1 - t)a .$$

Posons

$$\tilde{\mathcal{F}} = m^* \mathcal{F} ;$$

$\tilde{\mathcal{F}}$  est  $pr_1$ -plat et  $K$  est  $\tilde{\mathcal{F}}(1)$ -privilegié. Soit  $V$  un voisinage de 1 dans  $\mathbb{C}$  sur lequel le fibré  $B(K, \tilde{\mathcal{F}})$  est trivial.

Soit  $f$  un élément de  $B(K, \mathcal{F})$  tel que  $\rho(f) = 0$  ;  $m^*f$  définit une section analytique  $s$  du fibré  $B(K, \tilde{\mathcal{F}})$  sur

$$\{t \in V \cap \mathbb{R} \mid t \leq 1\}$$

nulle si  $t$  est strictement inférieure à 1. Il en résulte que

$$f = s(1) = 0 .$$

On démontre de même que  $\mathcal{F}(K) \rightarrow B(K, \mathcal{F})$  est injective ; les autres assertions sont évidentes.

Comme  $\mathcal{F}(\overset{\circ}{K})$  est un espace séparé il est évident que (v) implique (vi) et que (v') implique (vi').

F - Démontrons maintenant que (vi) (resp. (vi')) implique (i).

LEMME 4.- Soit  $K$  un compact convexe de  $\mathbb{C}$ . Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $f$  un élément de  $B(K, \mathcal{L}(E, F))$ . On note  $\tilde{f} : B(K, E) \rightarrow B(K, F)$  l'application induite par  $f$ .

(i) Si  $\tilde{f}$  est strict, alors pour tout point  $a$  de  $\partial K$ ,  $f(a)$  est strict.

(ii) Si  $f$  est dans  $\mathcal{O}(K, \mathcal{L}(E, F))$  et si  $\chi$  est un élément du dual  $F^\perp$  de  $F$  nul sur  $\text{Im} f(a)$ , alors pour tout  $v$  dans  $\text{Im} \tilde{f}$ ,  $\chi \circ v$  est  $\mathcal{O}(z - a)$ ;

Démonstration de (i).

Pour tout morphisme  $h$  d'espaces de Banach, on note  $q(h)$  sa conorme

$$q(h) = \inf_x \frac{\|h(x)\|}{d(x, \ker h)} .$$

On remarque que  $h$  est strict si et seulement si  $q(h)$  est strictement positif. Il nous suffit de montrer que

$$q(\tilde{f}) \leq q(f(a)) .$$

Soient  $\epsilon > 0$  et  $u$  un élément de  $E$  tels que

$$d(u, \ker f(a)) = 1$$

$$\|f(a) \cdot u\| < q(f(a)) + \epsilon ;$$

$u$  se relève en un élément  $\tilde{u}$  de  $B(K, E)$  tel que

$$d(u, \ker \tilde{f}) \geq 1 .$$

On déduit de la continuité de  $\tilde{f}(\tilde{u})$  l'existence d'un voisinage  $U$  de  $a$  dans  $K$  tel que

$$\forall s \in U, \quad \|f(s) \cdot u\| \leq \|f(a) \cdot u\| + \epsilon .$$

Soit alors  $h$  un élément de  $B(K)$  vérifiant

$$h(a) = 1 \text{ et } \forall s \neq a, \quad |h(s)| < 1 .$$

Il existe un entier  $n$  tel que

$$\sup_{s \in K \cap \{u\}} |h^n(s)| \leq \frac{\epsilon}{\|\tilde{f}(\tilde{u})\|}$$

l'élément  $v$  de  $B(K, E)$  défini par

$$v(s) = h^n(s) \cdot u$$

vérifie  $\|\tilde{f}(v)\| \leq \|f(a) \cdot u\| + \epsilon$

et  $d(v, \ker \tilde{f}) \geq 1$ .

On en déduit donc que

$$q(\tilde{f}) \leq q(f(a)) + 2\epsilon.$$

L'assertion (ii) résulte du fait que l'élément  $\gamma \circ f$  de  $\mathcal{O}(K, E^1)$  est nul en  $a$ .

Pour terminer la démonstration du théorème, nous allons montrer que (vi) implique (i) par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 0$  étant trivial. Supposons donc le théorème vrai en dimension strictement inférieure à  $n$ .

Soit  $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  une présentation de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ .

Soit  $K = K' \times K'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$  et  $a$  un point de  $\partial K'$ . On déduit du lemme 4

(i) et de l'hypothèse de récurrence que, pour tout entier  $p$ ,

$$(1) \quad 0 \leq p < n-1, \quad \sigma_p(\mathcal{F}(a)) \cap K''^{(p+1)} = \emptyset$$

et du lemme 3 que

$$(2) \quad \mathcal{F}(a)(K'') \rightarrow B(K'', \mathcal{F}(a)) \text{ est injective.}$$

Nous allons montrer que  $\mathcal{F}$  est  $pr_1$ -plat en tout point de  $\{a\} \times K''$  et alors le théorème résultera de (1) et du fait que

$$\forall x \in \{a\} \times K'', \quad \text{prof}_x \mathcal{F} = \text{prof}_x (a) + 1.$$

Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est  $pr_1$ -plat en tout point de  $\{a\} \times K''$ , il suffit de montrer que  $(z - a) \cdot I_{\mathcal{F}(K)} : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{F}(K)$  est injective. Soit donc  $\tilde{u}$  un élément non nul de  $\mathcal{F}(K)$ , montrons

$$(z - a) \tilde{u} \neq 0.$$

Soit  $u$  un élément de  $B(K, \mathcal{L}_0)$  déduit de  $\tilde{u}$ ; notons

$$f : B(K, \mathcal{L}_1) \rightarrow B(K, \mathcal{L}_0)$$

$$f_a : B(K'', \mathcal{L}_1(a)) \rightarrow B(K'', \mathcal{L}_0(a))$$

et  $u_a$  l'élément de  $B(K'', \mathcal{L}_0(a))$  défini par  $u$ ; il résulte de (2) et du

fait que  $\tilde{u}$  est non nul, que  $u_a$  n'est pas dans  $\text{Im} f_a$ . Puisque  $\text{Im} f_a$  est fermée, il existe un élément  $\chi$  de  $F^\perp$  nul sur  $\text{Im} f_a$  et tel que

$$\chi(u_a) \neq 0.$$

Soit alors  $(h_n)_n$  une suite de  $O(K')$  convergeant dans  $B(K')$  vers un élément  $h$  et telle que, au voisinage de  $a$ ,

$$\begin{aligned} h_n(z) &= O(z - a) \\ h(z) &= O(\sqrt{z - a}) \end{aligned}$$

pour une détermination donnée de  $\sqrt{z - a}$  sur  $K^{(*)}$ .

Il résulte du lemme 2 (ii) appliqué à  $\chi$  et à  $h \cdot u$  que  $h \cdot u$  n'est pas dans  $\text{Im} f$ . On ne peut donc avoir  $(z - a)\tilde{u} = 0$  car sinon la suite  $(h_n u)_n$  serait dans  $\text{Im} f$  qui est fermée.

Et le théorème est démontré.

### § 3. Recouvrements $\mathcal{F}$ -privilégiés (cft. [2]).

Les résultats de ce paragraphe sont extraits de [2] où est introduite la notion de privilège au sens  $L^2$  donnée au paragraphe 1, notion qui s'étend aux compacts de Stein adhérence de leur intérieur.

DEFINITION.— Soient  $X$  une variété  $\mathbb{C}$ -analytique de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $X$ . Soit  $K$  un compact de  $X$ . On dit que  $K$  est géométriquement  $\mathcal{F}$ -privilégié si, pour tout entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,

---

(\*) Par exemple, soit  $(a_n)_n$  une suite convergeant vers  $a$  sur une demi-droite de  $[K$  ; on peut choisir une détermination de  $\sqrt{z - a}$  et  $\sqrt{z - a_n}$  sur  $K$

de sorte que  $h_n(z) = \frac{z - a}{\sqrt{z - a_n}}$  réponde à la question.

et tout point  $x$  de  $\sigma_p(\mathcal{F}) - \sigma_{p-1}(\mathcal{F})$  , il existe un germe de morphisme lisse d'espaces analytiques

$$\pi : X, x \longrightarrow \mathbb{C}^p, 0$$

tel que  $\mathcal{F}$  soit  $\pi$ -plat et un germe de compact  $P$  de  $\mathbb{C}^p$  en  $0$  tel que

$$K, x = \pi^{-1}(P) .$$

Il est démontré dans [2] que si  $K$  est un compact géométriquement  $\mathcal{F}$ -privilegié, contenu dans un ouvert de carte,  $K$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié.

D'autre part, il résulte du théorème, que l'on vient de démontrer, que pour un polycylindre les deux notions coïncident.

### 1. Recouvrement $\mathcal{F}$ -privilegié.

Soient  $X$  une variété  $\mathbb{C}$ -analytique et  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $X$ . Soit  $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$  une famille localement finie de compacts de Stein de  $X$ . On dit que  $\mathcal{K}$  est un recouvrement  $\mathcal{F}$ -privilegié si

$$X = \bigcup_i \overset{\circ}{K}_i$$

et si, pour toute partie finie  $J$  de  $I$ ,  $\bigcap_{i \in J} K_i$  est  $\mathcal{F}$ -privilegié.

### 2. Variétés cylindrables.

Soient  $X$  une variété  $\mathbb{C}$ -analytique de dimension  $n$  et  $\mathcal{X} = (X_p)_{p \in \{0, \dots, n\}}$  une stratification de  $X$ , i.e. une suite croissante de sous-espaces analytiques tels que pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ ,  $X_p - X_{p-1}$  soit lisse et

$$\forall p, \dim X_p \leq p .$$

On appelle cylindrage de  $X$ , relatif à la stratification  $\mathcal{X}$  la donnée d'une suite  $\gamma = \{V_p, \pi_p\}_{p \in \{1, \dots, n\}}$  où

$$V_p \text{ est un voisinage ouvert de } X_p - X_{p-1}$$

$\pi_p : V_p \rightarrow X_p - X_{p-1}$  est un morphisme analytique lisse et une rétraction tel que

$$\forall i \leq j, \quad \pi_j = \pi_i \circ \pi_j$$

en tout point où les deux membres sont définis.

DEFINITION ([2],V).- On dit que la variété X est cylindrabile si, pour toute suite croissante  $(S_p)$  de sous-espaces analytiques tels que  $\forall p, \dim S_p \leq p$ , il existe une stratification  $\mathcal{X}$  de X telle que  $\forall p, S_p \subset X_p$ , et un cylindrage de X relatif à  $\mathcal{X}$ .

Il est démontré dans [2] que les variétés projectives et les tores complexes sont cylindrables mais il existe des variétés non cylindrables (cft.[5]).

### 3. Théorème d'existence des recouvrements $\mathcal{F}$ -privilégiés ([2],IV).

Soient X une variété cylindrabile et  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur X. Il existe des recouvrements géométriquement  $\mathcal{F}$ -privilégiés de X, arbitrairement fins.

Pour le démontrer on construit, pour un cylindrage  $\gamma = \{V_p, \pi_p\}_p$  convenable et en tout point de X, un système fondamental de voisinages  $\gamma$ -privilégiés; un fermé A étant  $\gamma$ -privilégié si, pour tout p et tout  $x \in X_p - X_{p-1}$ , il existe un germe de fermé P dans  $X_p - X_{p-1}$  en  $\pi_p(x)$  tel que

$$A_{,x} = \pi_p^{-1}(P) \quad .$$

Il est clair d'autre part que l'intersection de deux fermés  $\gamma$ -privilégiés est  $\gamma$ -privilégiée.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DOUADY - Le problème des modules, Anr. Inst. Fourier (1966).
- [2] DOUADY-FRISCH-HIRCHOWITZ - Recouvrements privilégiés, Ann. Inst. Fourier, T. 22 à paraître (1972).
- [3] FRISCH-GUENOT - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Invent. Math. 7, (1969).
- [4] G. POURCIN - Polycylindres privilégiés, C.R. Acad. Sc, T. 272 (1971).
- [5] P. le BARZ - Une variété non cylindrabale, C.R. Acad. Sc. à paraître.