BERNARD ANGENIOL

Structures de Hodge sur les courbes algébriques

Astérisque, tome 17 (1974), p. 126-140

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__126_0>

STRUCTURES DE HODGE SUR LES COURBES ALGEBRIQUES

par Bernard ANGENIOL

Dans cet exposé, on étudie d'abord la cohomologie de De Rham d'une courbe algébrique X sur un corps k de caractéristique zéro, et sa structure multiplicative. Cette cohomologie est munie naturellement d'une filtration. Lorsque $k = \mathbb{C}$, cette cohomologie est munie de plus d'une structure réelle et l'on obtient ainsi la structure de Hodge de $H^*(X)$. On étudie alors la propriété de positivité de la forme bilinéaire déduite du cup produit et de la conjugaison.

§ 1. Cohomologie de De Rham sur une courbe algébrique.

On se place, dans tout le paragraphe, sur un corps k de caractéristique zéro.

DEFINITION 1.1.- Soit X une variété sur k. On appelle cohomologie de De Rham de X, et on note $H_{DR}(X)$, l'hypercohomologie du complexe (non nécessairement exact) de De Rham : $\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^2_X \longrightarrow \cdots$

On va considérer, dans toute la suite, une courbe X, propre et lisse sur k.

Pour calculer l'hypercohomologie du complexe de De Rham, on a besoin d'une résolution injective de $\mathcal{O}_X$.

Or, pour une courbe X, il existe une résolution injective canonique de $\mathcal{O}_X$, la résolution de Cousin :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{i} K_X \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

où :

$\mathcal{O}_X$ est le faisceau structural de X ;

K_X est le faisceau constant des fonctions rationnelles sur X ;

$\mathcal{I}_X$ est le conoyau de l'injection canonique i.

On remarque que $\mathcal{I}_X$ est la somme directe de ses fibres aux points fermés ("sky-scraper sheaf") et peut être interprété comme le faisceau des parties polaires. Le morphisme u associe à une fonction méromorphe $f \in K$, ses parties polaires en chaque point.

En tensorisant la résolution de Cousin par Ω^1_X, on obtient une résolution injective de Ω^1_X.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{O}_X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"'] & \Omega^1_X \arrow[d, "i'"] \\
K_X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u"'] & \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X \arrow[d, "u' = id \otimes u"] \\
\mathcal{I} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd} \tag{2}$$

La cohomologie de De Rham de X est donc la cohomologie de la suite (3) :

$$0 \longrightarrow K_X \xrightarrow[u \oplus d]{} \mathcal{I}_X \oplus (\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X) \xrightarrow[u' - d]{} \Omega^1_X \otimes \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

où $u \oplus d$ et $u' - d$ sont définies par

$$u \oplus d : f \longmapsto ((\text{parties polaires de } f), df)$$

$$-d + u' ; (j, \omega) \longmapsto (\text{parties polaires de } \omega - dj) .$$

<u>Calcul des groupes de cohomologie.</u>

On note $B^i_{DR}(X)$ et $Z^i_{DR}(X)$ respectivement les cobords et cocycles du $i^{\text{ème}}$ terme non nul de la suite (3), de telle sorte que

$$H^i_{DR}(X) = Z^i_{DR}(X) / B^i_{DR}(X) .$$

PROPOSITION 1.2.- <u>On a</u> $H^0_{DR}(X) \simeq k$.

Démonstration.

Il est clair que $B^{o}_{DR}(X) = 0$, donc que l'on a un isomorphisme $H^{o}_{DR}(X) \simeq Z^{o}_{DR}(X)$. Or, le groupe $Z^{o}_{DR}(X)$ est l'ensemble des fonctions f méromorphes ayant toutes leurs parties polaires nulles et telles que $df = 0$. La première condition sur f implique que f est constante et la seconde condition est alors satisfaite. Par conséquent, $Z^{o}_{DR}(X)$ est isomorphe à k et $H^{o}_{DR}(X)$ l'est donc aussi.

PROPOSITION 1.3.- Le groupe $H^{1}_{DR}(X)$ est isomorphe au module des différentielles sans résidus, prises modulo les différentielles de fonctions méromorphes.

Démonstration.

Le groupe $B^{1}_{DR}(X)$ est l'image de K_X par $u \oplus d$; c'est donc l'ensemble des couples formés de l'ensemble des parties polaires d'une fonction, et de la différentielle de cette fonction. Le groupe $Z^{1}_{DR}(X)$ est le noyau de l'application $u' - d$ dans $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X$. C'est donc l'ensemble des couples (j,ω) où j est un ensemble des parties polaires telles que en tout point P de X la partie polaire de ω soit égale à l'image dj de j dans $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X$. On remarque, de plus, qu'étant donnée ω une forme différentielle méromorphe, il existe un $j \in \mathcal{I}_X$ tel que le couple (j,ω) appartienne à $Z^{1}_{DR}(X)$, si et seulement si ω est sans résidus ; en effet dj est sans résidus, et toute partie polaire sans résidu peut s'intégrer. De plus j est alors déterminé à une constante près. Ceci termine la démonstration.

PROPOSITION 1.4.- On a $H^{2}_{DR}(X) \simeq k$.

Démonstration.

Il est clair que $Z^{2}_{DR}(X) = \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X$. D'autre part, $B^{2}_{DR}(X)$ est l'image par $u' - d$ de $\mathcal{I}_X \oplus (\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X)$. Un élément quelconque de $B^{2}_{DR}(X)$ est donc un ensemble de parties polaires qui sont les parties polaires d'une forme différentielle méromorphe diminuées des parties polaires formées par un dj où j est un élément de $\mathcal{I}_X$.

Soit d'autre part K le noyau de l'application résidu qui à un ensemble de parties polaires fait correspondre la somme de ses résidus en tous les points de X . L'application résidu étant une surjection de $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X$ sur k , on a un isomorphisme : $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X / K \simeq k$.

De plus, puisque pour tout j appartenant à $\mathcal{I}_X$, dj est sans résidu, et que, d'après la formule des résidus, la somme des résidus d'une différentielle méromorphe est nulle, $B^2_{DR}(X)$ est inclus dans K . On a donc une surjection :

$$\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X / B^2_{DR}(X) \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X / K$$

ce qui est donc une surjection : $H^2_{DR}(X) \longrightarrow k \longrightarrow 0$.

La proposition 1.4 résulte alors du lemme suivant :

LEMME 1.5.- <u>On a une surjection</u> : $k \simeq H^1(X,\Omega^1_X) \longrightarrow H^2_{DR}(X) \longrightarrow 0$.

<u>Démonstration</u>.

On peut calculer $H^1(X,\Omega^1_X)$ en utilisant la résolution injective de Ω^1_X , déduite par tensorisation par Ω^1_X de la résolution de Cousin -En notant $B^1(X,\Omega^1_X)$ et $Z^1(X,\Omega^1_X)$ les cobords et cocycles de telle sorte que

$$H^1(X,\Omega^1_X) \simeq Z^1(X,\Omega^1_X)/B^1(X,\Omega^1_X)$$

il est clair que $Z^1(X,\Omega^1_X)$ est égal à $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}_X$ et donc isomorphe à $Z^2_{DR}(X)$ - D'autre part, $B^1(X,\Omega^1_X)$ qui est l'image de $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} K_X$ par u' , est isomorphe à l'ensemble des ensembles de parties polaires d'une forme différentielle méromorphe. Par conséquent, $B^1(X,\Omega^1_X)$ est inclus dans $B^2_{DR}(X)$. On en déduit la surjection annoncée.

Quant à l'isomorphisme $H^1(X,\Omega^1_X) \simeq k$, il peut se déduire du théorème de dualité et de l'isomorphisme $H^0(X,O_X) \simeq k$, les constantes étant les seules fonctions méromorphes partout régulières.

Remarques.

1) La surjection, démontrée au lemme 1.5, peut aussi se déduire de la suite exacte de cohomologie de la suite exacte de complexes :

$$(5)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1_X & \longrightarrow & \Omega^1_X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad .$$

2) Le fait que k soit de caractéristique zéro a été utilisé uniquement dans la détermination du $H^1(X,\mathcal{O}_X)$, toute partie polaire sans résidus ne pouvant être intégrée en caractéristique quelconque.

§ 2. Filtration de $H^1_{DR}(X)$. Interprétation de la dualité.

PROPOSITION 2.1.- On a une suite exacte.

$$(4)\qquad 0 \longrightarrow H^0(X,\Omega^1_X) \xrightarrow{j} H^1_{DR}(X) \xrightarrow{v} H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0 \quad .$$

Démonstration.

Ecrivons la suite exacte de cohomologie de la suite exacte de complexes

$$(5)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1_X & \longrightarrow & \Omega^1_X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad .$$

Elle s'écrit :

$$0 \longrightarrow H^0_{DR}(X) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X,\Omega^1_X) \longrightarrow H^1_{DR}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$$
$$\longrightarrow H^1(X,\Omega^1_X) \longrightarrow H^2_{DR}(X) \longrightarrow 0 \quad .$$

Puisque $H^0(X,\mathcal{O}_X)$ et $H^1(X,\Omega^1_X)$ sont tous deux isomorphes à k , on déduit des propositions (1.2) et (1.4) que l'on a bien la suite exacte (4).

2.2. Description des morphismes de (4) .

- Morphisme j .- D'après la proposition 1.3, $H^1_{DR}(X)$ est isomorphe au module des différentielles sans résidus, prises modulo les différentielles de fonctions méromorphes. D'autre part, $H^0(X,\Omega^1_X)$ est le module des différentielles partout régulières.

L'injection j est donc clairement définie, puisqu'une différentielle partout régulière est évidemment sans résidus et que la différentielle d'une fonction méromorphe est partout régulière si et seulement si f est partout régulière, soit si f est constante, soit encore si cette différentielle est nulle.

- Morphisme v .- Pour expliciter le morphisme v , calculons d'abord $B^1(X,\mathcal{O}_X)$ et $Z^1(X,\mathcal{O}_X)$ en utilisant la résolution de Cousin. Alors il est clair que $Z^1(X,\mathcal{O}_X) = \mathcal{I}_X$ et qu'un élément de $B^1(X,\mathcal{O}_X)$ est l'ensemble des parties polaires d'une fonction méromorphe.

Si l'on interprète $Z^1_{DR}(X)$ et $B^1_{DR}(X)$ comme la démonstration de la proposition 1.3, on a une application de $Z^1_{DR}(X)$ dans $Z^1(X,\mathcal{O}_X)$, qui, à un couple (j,ω) tel que dj soit l'ensemble des parties polaires de ω , associe j , élément de $\mathcal{I}_X = Z^1(X,\mathcal{O}_X)$ -En composant cette application avec la surjection canonique $Z^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$, on obtient une application : $Z^1_{DR}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$, dont la restriction à $B^1_{DR}(X)$ est nulle- Par passage au quotient, on obtient ainsi le morphisme $v : H^1_{DR}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$.

2.3. Interprétation de la dualité.

Le cup produit nous donne une application de $H^1_{DR}(X) \times H^1_{DR}(X)$ dans $H^2_{DR}(X)$ qui est isomorphe à k . La restriction de cette application à $H^0(X,\Omega^1_X) \times H^0(X,\Omega^1_X)$ étant nulle, on en déduit par restriction puis par passage au quotient une application de $H^0(X,\Omega^1_X) \times H^1(X,\mathcal{O}_X)$ dans k , qui met $H^0(X,\Omega^1_X)$ et $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ en dualité.

On peut expliciter l'application : $H^1_{DR}(X) \times H^1_{DR}(X) \longrightarrow k$; soient ω_1 et ω_2 deux différentielles sans résidus. Soit P un point de la courbe X et $\hat{\mathcal{O}}_P$ le complété de l'anneau local en P , $\mathcal{O}_P$. On associe alors à ω_1 , $\omega_{1,P}$, différentielle locale, élément de $\Omega^1_{X,P} \otimes_{\mathcal{O}_P} \hat{\mathcal{O}}_P$. Alors puisque ω_1

est sans résidus, et que la caractéristique de k est nulle, $\omega_{1,P}$ peut s'intégrer et on a donc $\omega_{1,P} = dg_{1,P}$ où $g_{1,P}$ est une fonction méromorphe. On pose alors $<\omega_1,\omega_2> = \sum_P \mathrm{Res}_P(g_{1,P}\omega_2)$ où $\mathrm{Res}_P(g_{1,P}\omega_2)$ est le résidu en P de la différentielle $g_{1,P}\omega_2$. On vérifie que, d'après la formule des résidus, si ω_1 est la différentielle d'une fonction méromorphe f, on a :

$$<\omega_1,\omega_2> = \sum \mathrm{Res}_P(f\omega_2) = 0 .$$

Par conséquent, le produit passe au quotient et définit le cup produit : $H^1_{DR}(X) \times H^1_{DR}(X) \longrightarrow k$ (cf. Proposition 1.3).

On peut enfin vérifier que le cup produit est antisymétrique : si l'on associe g_2P à ω_2 comme on a associé g_1P à ω_1, on a :

$$(\omega_1,\omega_2) + (\omega_2,\omega_1) = \sum_P \mathrm{Res}_P(g_{1,P}\, dg_{2,P} + g_{2,P}\, dg_{1,P}) = \sum_P \mathrm{Res}_P(d(g_{1,P}\cdot g_{2,P})) = 0 .$$

§ 3. Cas analytique.

Nous supposerons désormais $k = \mathbb{C}$. Tout d'abord, on sait que X, variété algébrique sur $\mathbb{C}$, est munie d'une structure canonique de variété analytique, notée X_{an}. De plus, d'après le lemme de Poincaré, on sait que la suite

$$(6) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{an}} \longrightarrow \Omega^1_{X_{an}} \longrightarrow 0$$

est exacte. Enfin, à tout faisceau cohérent $\mathcal{L}$ sur X correspond un faisceau $\mathcal{L}_{an}$ sur X_{an} et l'on a des isomorphismes :

$$H^i(X,\mathcal{L}) \simeq H^i(X_{an},\mathcal{L}_{an})$$

PROPOSITION 3.1.- Pour tout i, on a : $H^i(X_{an},\mathbb{C}) \simeq H^i_{DR}(X)$.

Démonstration.

Ecrivons la suite exacte de cohomologie de la suite (6).

$$0 \longrightarrow H^0(X_{an},\mathbb{C}) \longrightarrow H^0(X_{an},\mathcal{O}_{X_{an}}) \longrightarrow H^0(X_{an},\Omega^1_{X_{an}}) \longrightarrow H^1(X_{an},\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X_{an},\mathcal{O}_{X_{an}})$$
$$\longrightarrow H^1(X_{an},\Omega^1_{X_{an}}) \longrightarrow H^2(X_{an},\mathbb{C}) \longrightarrow 0 .$$

Puisque $H^0(X_{an},\mathcal{O}_{X_{an}})$ est isomorphe à $H^0(X,\mathcal{O}_X)$ et que $H^1(X_{an},\Omega^1_{X_{an}})$ est isomorphe à $H^1(X,\Omega^1_X)$ et que tous deux sont donc isomorphes à $\mathbb{C}$, $H^0(X_{an},\mathbb{C})$ et $H^2(X_{an},\mathbb{C})$ sont donc tous deux isomorphes à $\mathbb{C}$ et donc à $H^0_{DR}(X)$ et $H^2_{DR}(X)$. De plus, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X_{an},\Omega^1_{X_{an}}) \longrightarrow H^1(X_{an},\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X_{an},\mathcal{O}_{X_{an}}) \longrightarrow 0 \quad .$$

On a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\Omega^1_X) & \longrightarrow & H^1_{DR}(X) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X_{an},\Omega^1_{X_{an}}) & \longrightarrow & H^1(X_{an},\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(X_{an},\mathcal{O}_{X_{an}}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad .$$

Puisque la première et la troisième flèche verticale sont des isomorphismes, la deuxième en est un aussi, ce qui termine la démonstration.

3.2. <u>Conjugaison</u>.

Des inclusions $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on déduit des inclusions $H^1(X_{an},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X_{an},\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X_{an},\mathbb{C})$ et plus précisément des isomorphismes :

$$H^1(X,\mathbb{R}) \simeq H^1(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

$$H^1(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq H^1(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad .$$

Puisque $H^1(X,\mathbb{C})$ est le complexifié de $H^1(X,\mathbb{R})$, on considère la conjugaison dans $H^1(X,\mathbb{C})$ par rapport à $H^1(X,\mathbb{R})$ et on la note .

PROPOSITION 3.3.- $\overline{H^0(X,\Omega^1_X)}$ <u>est le supplémentaire de</u> $H^0(X,\Omega^1_X)$ <u>dans</u> $H^1(X,\mathbb{C})$.

<u>Démonstration</u>.

Puisque l'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(X,\Omega^1_X) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

et que d'après le théorème de dualité, la dimension de $H^0(X,\Omega^1_X)$ est égale à la dimension de $H^1(X_1,\mathcal{O}_X)$, soit égale à la moitié de la dimension de $H^1(X,\mathbb{C})$, il suffit de montrer que l'on a $H^0(X,\Omega^1_X) \cap \overline{H^0(X,\Omega^1_X)} = \{0\}$, et puisque $H^0(X,\Omega^1_X) \cap \overline{H^0(X,\Omega^1_X)}$ est le complexifié de $H^0(X,\Omega^1_X) \cap H^1(X,\mathbb{R})$, que l'on a $H^0(X,\Omega^1_X) \cap H^1(X,\mathbb{R}) = \{0\}$, c'est-à-dire que l'on a une injection :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \quad .$$

Pour cela considérons la suite exacte de cohomologie de la suite exacte :

$$(7) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{Im}} \mathcal{H}_X \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{H}_X$ est le faisceau des fonctions harmoniques sur X (soit des fonctions localement partie imaginaire d'une fonction holomorphe) et $\mathrm{Im} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{H}_X$ est l'application qui, à une fonction holomorphe, fait correspondre sa partie imaginaire.

On obtient donc, puisque $H^0(X,\mathcal{H}_X) \simeq \mathbb{R}$ d'après le principe du maximum, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Im}} \mathbb{R} \longrightarrow H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow \cdots$$

Puisque l'application "partie imaginaire" de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective, l'application de $H^1(X,\mathbb{R})$ dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ est injective, ce qui termine la démonstration.

LEMME 3.4.- <u>On a le diagramme commutatif suivant, qui peut être entièrement reconstitué à partir du morphisme</u> F .

$$\begin{tikzcd}
& & H^1(X,\mathbb{Z}) \arrow[d] \arrow[ddr, hook, "F"] & & \\
& & H^1(X,\mathbb{R}) \arrow[d] \arrow[dr, hook] & & \\
0 \arrow[r] & H^0(X,\Omega^1_X) \arrow[r] & H^1(X,\mathbb{C}) \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad ;$$

<u>Démonstration.</u>

L'existence du diagramme découle des propositions (2.1), (3.2) et (3.3). Pour reconstruire le diagramme à partir de l'application F , on construit $H^1(X,\mathbb{R})$ et $H^1(X,\mathbb{C})$ par tensorisation de $H^1(X,\mathbb{Z})$ par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement, on prolonge F en une application de $H^1(X,\mathbb{C})$ dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ et $H^0(X,\Omega^1_X)$ est alors le noyau de cette application.

COROLLAIRE 3.5.- Soit X une courbe propre et lisse sur $\mathbb{C}$. Alors, pour tout r, $H^r(X,\mathbb{Z})$ muni d'une filtration convenable, est une structure de Hodge pure de poids r (cf. exposé n°2, p. 21-22).

Démonstration.

Puisque, si $r > 2$, $H^r(X,\mathbb{Z}) = 0$, et que pour $r = 0$ et $r = 2$, $H^r(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, il suffit de le montrer pour $r = 1$. Dans ce cas, c'est un corollaire de la proposition (3.3) et de la remarque de l'exposé n°2, p. 21, définition (3.1).

§ 4. Propriété de positivité.

LEMME.4.1.- Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$, il y a correspondance bi-univoque entre les formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne H et les formes alternées réelles A sur E vérifiant $A(ix,iy) = A(x,y)$, $\forall (x,y)$ $E \times E$, donnée par :

$$A = \mathrm{Im}(H) \ , \quad H(x,y) = A(ix,y) + iA(x,y) \ .$$

Démonstration.- Cf. exposé n°2, § 1, proposition 1, page 3.

COROLLAIRE 4.2.- Une forme alternée réelle A sur un espace vectoriel complexe E est la partie imaginaire d'une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne définie positive, si et seulement si elle vérifie :

(i) $A(ix,iy) = A(x,y)(x,y)E \times E$.

(ii) $A(ix,x) > 0$, si $x \neq 0$.

Démonstration.- Cela découle du lemme 4.1.

COROLLAIRE 4.3.- Le cup produit sur $H^1(X,\mathbb{R})$ est la partie imaginaire d'une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne définie positive.

Démonstration.

Précisons d'abord la structure d'espace vectoriel complexe de $H^1(X,\mathbb{R})$. On a une injection de $H^1(X,\mathbb{R})$ dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$. Or comme ces deux espaces ont même dimension, soit la moitié de la dimension de $H^1(X,\mathbb{C})$, cette injection est en fait un isomorphisme qui munit canoniquement $H^1(X,\mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel complexe.

Plus précisément, si l'on interprète $H^1(X,\mathbb{R})$ en termes de différentielles réelles, c'est-à-dire si l'on considère la suite exacte (7), d'où a été déduite l'injection $H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$, et que l'on munit $\mathbb{R}$ de la résolution injective en termes de différentielles réelles C^∞ et O_X de la résolution de Dolbeaux, on obtient le diagramme suivant :

$$
(9) \qquad \begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{H}_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{0}_{X,\mathbb{R}} & \longrightarrow & \Omega^{0,0}_{X,\mathbb{C}} & \longrightarrow & \Omega^{0}_{X,\mathbb{R}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{1}_{X,\mathbb{R}} & \longrightarrow & \Omega^{0,1}_{X,\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0 & &
\end{array} \quad .
$$

On en déduit donc que l'injection $H^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X)$ fait correspondre à une forme différentielle réelle sa partie antilinéaire après plongement dans les 1-formes différentielles complexes.

En d'autres termes, à une forme différentielle réelle $\omega = f(z)dz + \overline{f(z)}\overline{dz}$, correspond la forme différentielle complexe $\overline{f(z)}\overline{dz}$. Dès lors, il est clair que ce que, pour la structure complexe de $H^1(X,\mathbb{R})$ ainsi explicitée, l'on notera $i \times \omega$, sera la forme différentielle :

$$i \times \omega = if(z)dz - \overline{if(z)}\overline{dz} \quad .$$

D'autre part, le cup produit sur $H^1(X,\mathbb{R})$ définit bien une forme alternée réelle qui se déduit par passage au quotient de l'application :

$$< \omega_1, \omega_2 > = \int_{\tilde{X}} \omega_1 \wedge \omega_2$$

où ω_1 et ω_2 sont les 1-différentielles réelles et $\tilde{X}$ est la surface réelle associée à la courbe complexe X .

Dès lors, d'après le corollaire 4.2, il suffit de vérifier que l'on a les relations :

(i) $$\int_{\tilde{X}} (f_1(z)dz + \overline{f_1(z)}\,\overline{dz}) \wedge (f_2(z)dz + \overline{f_2(z)}\,\overline{dz}) =$$
$$\int_{\tilde{X}} (if_1(z)dz - \overline{if_1(z)}\,\overline{dz}) \wedge (if_2(z)dz - \overline{if_2(z)}\,\overline{dz}) \quad .$$

(ii) $$\int_{\tilde{X}} (if(z)dz - \overline{if(z)}\,\overline{dz}) \wedge (f(z)dz + \overline{f(z)}\,\overline{dz}) = 0 \quad \text{si} \quad f = 0 \quad .$$

(i) se déduit d'un simple calcul des deux membres. Le premier membre de (ii) s'écrit encore :

$$\int_{\tilde{X}} 2if(z)\ \overline{f(z)}dz \wedge \overline{dz} = 4\int_{\tilde{X}} |f|^2\ dx \wedge dy \quad ,$$

qui est strictement positif si f est une fonction non nulle et C^{∞} .

Appendice

STRUCTURES DE HODGE MIXTES SUR LES COURBES

Soient X une courbe sur $\mathbb{C}$, propre et lisse, et $x_1,\dots,x_n$, n points de X, $(n \geq 1)$. On note $\underline{x} = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$ et $u = X - \underline{x}$.

– Si l'on étudie la cohomologie entière, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(U,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{\underline{x}}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

où l'on a $H^i_{\underline{x}}(X,\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} H^i_{x_j}(X,\mathbb{Z})$ et $H^i_{x_j}(X,\mathbb{Z}) = 0$ pour $i \neq 2$ et $H^2_{x_j}(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

De plus, avec cette identification, l'application $H^2_{\underline{x}}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$, correspond à l'application $\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(a_1,\dots,a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} ai$.

– On a des résultats analogues pour la cohomologie à valeurs complexes : il suffit de tensoriser par $\mathbb{C}$ pour obtenir la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(U,\mathbb{C}) \longrightarrow H^2_{\underline{x}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

avec

$$H^i_{\underline{x}}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} H^i_{x_j}(X,C) \quad \text{et si} \begin{cases} i = 2 \ ; & H^i_{x_j}(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C} \\ i \neq 2 \ ; & H^i_{x_j}(X,\mathbb{C}) = 0 \end{cases} ;$$

l'application $H^2_{\underline{x}}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C})$ étant $(z_1,\dots,z_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i$, $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.

– <u>Cohomologie de De Rham</u>.

Pour calculer les groupes de cohomologie $H^i(X,C)$, on devrait calculer l'hypercohomologie du complexe $0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \xrightarrow{d} \Omega_U$. On va voir qu'on peut le faire à moindre frais.

DEFINITION.– <u>On note</u> $\Omega_X < \underline{x} >$ <u>le faisceau des formes différentielles sur</u> X <u>ayant au plus un pôle simple en chacun des</u> x_i.

C'est un faisceau inversible qui contient Ω_X et qui en x_i est engendré par $\frac{dt}{t}$ où t est une uniformisante locale.

On appelle le complexe $O_X \longrightarrow \Omega_X < \underline{x} >$ le complexe de De Rham logarithmique. On peut remarquer que l'on a : $\Omega^\bullet_X < x >/U = \Omega^\bullet_U$, si $\Omega^p_X < \underline{x} >$ est le faisceau des formes de $\Omega^\bullet_X < \underline{x} >$ de degré p. On en déduit la flèche canonique :

$$H^\bullet(\Omega^\bullet_X < \underline{x} >) \longrightarrow H^\bullet(\Omega^\bullet_U) \quad .$$

THEOREME.- Cette flèche est un isomorphisme.

Démonstration.

Il est clair que $H^o(\Omega^\bullet_X < \underline{x} >) \simeq H^o(\Omega^\bullet_U)$. De plus,

$$0 \longrightarrow H^o(X,\Omega_X < \underline{x} >) \longrightarrow H^1(X,\Omega^o_X < \underline{x} >) \longrightarrow H^1(X,O_X) \longrightarrow H^1(X,\Omega_X < \underline{x} >) = 0$$

Or de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_X < \underline{x} > \longrightarrow \mathbb{C}^n_{\{\underline{x}\}} \longrightarrow 0 \quad ,$$

on déduit la suite exacte de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^o(X,\Omega_X) \longrightarrow H^o(X,\Omega_X < \underline{x} >) \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

qui nous montre que $H^o(X,\Omega_X < \underline{x} >)$ est de dimension $g + n - 1$ où g est le genre de la courbe X . Par suite, l'application naturelle :

$$H^1(X,\Omega^\bullet_X < \underline{x} >) \longrightarrow H^1(U,\Omega^\bullet_U)$$

est bijective.

- Structure de Hodge mixte sur $H^1(U,C) \simeq H^1(X,\Omega^\bullet_X < \underline{x} >)$.

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet_X \longrightarrow \Omega^\bullet_X < \underline{x} > \longrightarrow \mathbb{C}_{\{\underline{x}\}}(-1) \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où l'on déduit la suite exacte de cohomologie.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & H^1(X,\Omega^\bullet_X) & \longrightarrow & H^1(X,\Omega^\bullet_X < \underline{x} >) & \longrightarrow & H^o(X,\mathbb{C}_{\{\underline{x}\}}) & \longrightarrow & H^2(X,\Omega^\bullet_X) & \longrightarrow 0 \\
& \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & \\
0 \longrightarrow & H^1(X,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(U,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^2_{\{\underline{x}\}}(X,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^2(X,\mathbb{C}) & \longrightarrow 0
\end{array} \quad .$$

On a alors une filtration de $H^1(U,\mathbb{C})$:

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \frac{H^1(U,\mathbb{C})}{H^1(X,\mathbb{C})} \longrightarrow 0$$

et une seconde filtration qui se décompose en

1) une "sous-filtration" sur $H^1(X,\mathbb{C})$ qui définit une structure de Hodge de niveau 1 ;

2) une "filtration quotient" sur $\frac{H^1(U,\mathbb{C})}{H^1(X,\mathbb{C})}$, qui définit une structure de Hodge de niveau 0 .

- Pincement.- Soit X une courbe propre, irréductible sur $\mathbb{C}$ ayant un point double ordinaire et soit $\tilde{X}$ la normalisée de X. Soit $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$, l'application canonique et soient x et y les deux points de X qui se transforment par π en un même point z de X. Donc X se déduit de $\tilde{X}$ par pincement. De la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \pi_*(\mathbb{C}_{\tilde{X}}) \longrightarrow \mathbb{C}_{\{z\}} \longrightarrow 0 ,$$

on déduit la suite exacte de cohomologie

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & H^1(X,\mathbb{C}_X) & \longrightarrow & H^1(X,\pi_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \wr\| & & \\ & & & & & & H^1(\tilde{X},\mathbb{C}_{\tilde{X}}) & & \end{array}$$

ce qui définit une première filtration de $H^1(X,\mathbb{C}_X)$.

On a une autre filtration sur $H^1(X,\mathbb{C}_X)$ qui se décompose en deux crans :

1) une "sous-filtration" sur $\mathbb{C}$ qui définit une structure de Hodge de niveau zéro ;

2) une "filtration quotient" sur $H^1(X,\pi_*\mathbb{C}_{\tilde{X}})$ qui définit une structure de Hodge de niveau un.

Ces objets munis de deux filtrations sont des exemples de structures de Deligne dont l'étude est l'objet des exposés suivants.
