DANIEL ALIBERT

Théorie de Hodge classique

Astérisque, tome 17 (1974), p. 27-50
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__27_0>

THEORIE DE HODGE CLASSIQUE

par Daniel ALIBERT

§ 1. Algèbre extérieure sur un espace hermitien.

1.1. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $\bar{E}$ l'espace anti-isomorphe à E.

Posons

$$E' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C}) \quad ,$$
$$E'' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{E},\mathbb{C}) \quad .$$

L'espace E' est le dual de E et l'espace E'' est l'antidual de E.

Posons

$$F_o = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R}) \quad ,$$
$$F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E.\mathbb{C}) \quad .$$

On a

$$(1) \qquad F \simeq F_o \otimes_{\mathbb{R}} C \quad ,$$
$$(2) \qquad F \simeq E' \oplus E'' \quad .$$

L'espace F_o est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'espace F est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Pour tout espace vectoriel M sur un corps k, on note $\bigwedge_k M$ l'algèbre extérieure de M sur k.

Posons

$$\bigwedge F = \bigwedge_{\mathbb{C}} F \quad ,$$
$$\bigwedge F_o = \bigwedge_{\mathbb{R}} F_o \quad .$$

L'isomorphisme (1) s'étend en un isomorphisme

$$\bigwedge F \simeq \bigwedge F_o \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad .$$

Les éléments de $\bigwedge F$ appartenant à l'image du morphisme canonique

$$\bigwedge F_o \longrightarrow \bigwedge F_o \otimes_{\mathbb{R}} C$$

seront dits réels.

On note $\Lambda^p F$ la composante de degré p de ΛF , et

(2)bis $\quad P_p : \Lambda F \longrightarrow \Lambda^p F$

la projection canonique.

On note $\Lambda^{a,b}F$ le sous-espace de ΛF engendré par $(\Lambda^a_{\mathbb{C}} E') \wedge (\Lambda^b_{\mathbb{C}} E'')$. Les éléments de $\Lambda^{a,b}F$ sont dits de bidegré (a,b) .

La décomposition (2) donne une décomposition

$$\Lambda^p F = \bigoplus_{a+b=p} \Lambda^{a,b}F \quad .$$

Soit C l'endomorphisme de F transposé de la multiplication par i dans E . On notera encore C l'endomorphisme de ΛF qu'il définit.

On a

$$C\big|_{\Lambda^{a,b}F} = i^{a-b} \quad . \tag{3}$$

1.2. Soit H une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur E , linéaire en le premier argument, antilinéaire en le second argument.

Posons

$$H(t,t') = S(t,t') + iA(t,t') \quad ,$$

où S et A sont réelles. Alors S est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique et A une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée.

On a

$$S(t,t') = -A(t,it') \quad . \tag{4}$$

La connaissance de H est donc équivalente à celle de A .

Soit ω l'élément de $\Lambda^2 F$ correspondant à A ; ω est réelle et de plus

$$A(it,it') = A(t,t') \quad ,$$

donc

$$C\omega = \omega \quad . \tag{5}$$

Il en résulte que $\omega \in \Lambda^{1,1}F_o$. Inversement soit $\omega \in \Lambda^{1,1}F_o$ une forme réelle, A la forme alternée correspondante, on vérifie aisément que la forme

$$H(t,t') = -A(t,it') + iA(t,t')$$

est sesquilinéaire à symétrie hermitienne. On peut donc énoncer

PROPOSITION 1.- Il y a une correspondance biunivoque entre les formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne sur E et les éléments réels de $\Lambda^{1,1}F$.

1.3. Supposons que E soit un espace hermitien. Soient H la forme hermitienne de structure et ω l'élément de $\Lambda^{1,1}F$ qui lui correspond d'après la proposition 1. Avec les notations de 1.2, S définit sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à E une structure euclidienne, donc une structure euclidienne sur F_o . On notera $<\ ,\ >$ le produit scalaire ainsi défini sur F_o .

Prolongeons $<\ ,\ >$ à F par $\mathbb{C}$-bilinéarité et notons encore $<\ ,\ >$ le produit obtenu.

PROPOSITION 2.- Le produit $<\ ,\ >$ a les propriétés suivantes :

pour tous $Z \in E'$, $Z' \in E'$ $\quad <Z,Z'> = 0$

pour tous $Z \in E''$, $Z' \in E''$ $\quad <Z,Z'> = 0$.

Si l'on note U_Z l'élément de E correspondant à $Z \in E'$ par l'isomorphisme canonique, et U'_Z l'élément de E correspondant à $Z \in E''$ par l'anti-isomorphisme canonique, on a

pour tous $Z \in E'$, $Z' \in E''$ $\quad <Z,Z'> = 2\overline{H(U_{Z'},U'_{Z'})}$.

De plus, pour tous $Z \in F$, $Z' \in F$ $\quad <Z,Z'> = <Z',Z>$.

Démonstration.

Soient $Z,Z' \in F$. On a

$$<Z,Z'> = <\frac{Z+\overline{Z}}{2},\frac{Z'+\overline{Z}'}{2}> - <\frac{Z-\overline{Z}'}{2i},\frac{Z'-\overline{Z}'}{2i}>$$

$$+ i <\frac{Z-\overline{Z}}{2i},\frac{Z'+\overline{Z}'}{2}> + i <\frac{Z+\overline{Z}}{2},\frac{Z'-\overline{Z}'}{2i}> .$$

Si $\quad Z \in E'$, $\forall x \in E$, $Z(x) = H(x,U_Z)$.

Si $\quad z \in E''$, $\forall x \in E$, $Z(x) = H(U'_Z,x)$.

donc si $z \in E'$, $\frac{z+\bar{z}}{2}(x) = S(x,u_z)$

$$\frac{z-\bar{z}}{2}(x) = S(x,iu_z)$$

si $z \in E''$, $\frac{z+\bar{z}}{2}(x) = S(x,u'_z)$

$$\frac{z-\bar{z}}{2}(x) = S(x,-iu'_z) \quad .$$

La proposition en résulte ainsi que de la formule (4).

Le produit $<\ ,\ >$ se prolonge alors ΛF de la manière suivante :

$$(6) \qquad \begin{aligned} &< t_1 \wedge \dots \wedge t_p \ , \ t'_1 \wedge \dots \wedge t'_q > = 0 \qquad \text{si } p \neq q \ , \\ &< t_1 \wedge \dots \wedge t_q \ , \ t'_1 \wedge \dots \wedge t'_p > = \det(< t_i, t'_j >) \ . \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.- Pour le produit scalaire $<\ ,\ >$ on a une décomposition orthogonale

$$\Lambda^p F = \bigoplus_{\substack{a+b=p \\ a \leq b}} \overset{a,b}{V} F \ ,$$

où l'on a posé

$$\overset{a,b}{V} F = \Lambda^{a,b} F \oplus \Lambda^{b,a} F \qquad \text{si } a < b \ ,$$

$$\overset{a,a}{V} F = \Lambda^{a,a} F \ .$$

De plus on a les propriétés suivantes :

α) si $a \neq b$, $\Lambda^{a,b}F$ est totalement isotrope ;

β) si $z_1,\dots,z_n$ est une base duale d'une base orthonormale de E on a

$$< z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_a} \wedge \bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{j_b} \ , \ z_{k_1} \wedge \dots \wedge z_{k_b} \wedge \bar{z}_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{\rho_a} >$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} &= 0 \quad \text{si } \{i_1,\dots,i_a\} \neq \{\rho_1,\dots,\rho_a\} \qquad \text{ou} \\ &\qquad \text{si } \{j_1,\dots,j_b\} \neq \{k_1,\dots,k_b\} \ , \end{aligned}$$

$$= (-1)^{ab}\, 2^{a+b} \quad \text{si } \{i_1,\dots,i_a\} = \{\rho_1,\dots,\rho_a\}$$

$$\text{et si } \{j_1,\dots,j_b\} = \{k_1,\dots,k_b\}$$

et si $\quad i_1 < i_2 < \dots < i_a \ , \ j_1 < \dots < j_b \ , \ \rho_1 < \dots < \rho_a \ , \ k_1 < \dots < k_b$.

Démonstration.

Elle est immédiate à partir de la proposition 2 et des formules (6).

Remarque.- 1) Dans l'exposé n°1, (1.1), on étend la structure euclidienne de F_o à ΛF_o. Si l'on prolonge le produit scalaire ainsi obtenu à ΛF par $\mathbb{C}$-linéarité, on retrouve le produit $< , >$.

1.4. Soit $z_1, \dots, z_n$ une base orthonormée de E'. Posons pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$z_j = x_j + iy_j \quad ,$$

où x_j et y_j sont des éléments de F_o, (1). On a

$$\omega = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} z_j \wedge \bar{z}_j \quad ,$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j \wedge x_j \quad .$$

Donc

$$\text{(7 bis)} \quad \omega^n = n! \prod_{j=1}^{n} y_j \wedge x_j \quad .$$

Les éléments $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ de F_o forment une base orthonormée de F_o pour la structure euclidienne définie par la forme bilinéaire $S = \mathrm{Re}H$.

Choisissons sur F_o l'orientation pour laquelle ω^n est positif.

La base $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ est alors directe (7 bis) donc $\prod_{j=1}^{n} y_j \wedge x_j$ est l'élément de volume associé à la structure euclidienne et à l'orientation sur F_o précisées ci-dessus (exp. 1, 1.1). Notons τ cet élément de volume.

On a

$$\omega^n = n! \, \tau \quad .$$

Prolongeons par $\mathbb{C}$-linéarité l'isomorphisme

$$* : \Lambda^p F_o \longrightarrow \Lambda^{2n-p} F_o \quad ,$$

associé à τ, (exp. n°1, 1.1), en un isomorphisme

$$* : \Lambda^p F \longrightarrow \Lambda^{2n-p} \quad .$$

On a la relation

$$\text{(8)} \qquad \alpha \wedge * \beta = < \alpha, \beta > \tau \quad , \text{ pour tout couple } \alpha, \beta \in \Lambda^p F \quad .$$

DEFINITION.- On note L l'endomorphisme de ΛF défini par

$$L\alpha = \alpha\wedge\omega = \omega\wedge\alpha \ .$$

Si $\alpha \in \Lambda^p F$, $L\alpha \in \Lambda^{p+2} F$.

DEFINITION.- On note Λ l'endomorphisme de ΛF égal à $*^{-1}L*$.

Si $\alpha \in \Lambda^p F$, $\Lambda\alpha \in \Lambda^{p-2} F$.

PROPOSITION 5.- <u>L'endomorphisme</u> Λ <u>est l'adjoint de</u> L <u>pour</u> $<\ ,\ >$.

<u>Démonstration.</u>

Soient $\alpha \in \Lambda^{p-2} F$, $\beta \in \Lambda^p F$, d'après (8)

$$< L\alpha,\beta > \tau = L\alpha\wedge *\beta \ ,$$

donc

$$\begin{aligned} < L\alpha,\beta > \tau &= \alpha\wedge\omega\wedge *\beta \\ &= \alpha\wedge L*\beta \\ &= \alpha\wedge *\Lambda\beta \\ &= < \alpha,\Lambda\beta > \tau \ . \end{aligned}$$

DEFINITION.- On pose

(8 bis) $T = \sum_{p=1}^{2\omega} (n-p)\, P_p$. (Voir (2) bis) .

PROPOSITION 6.- <u>On a les relations</u>

(9) $[\Lambda,L] = T$,

(10) $[T,\Lambda] = 2\Lambda$,

(11) $[T,L] = -2L$.

<u>Démonstration.</u>

(10) et (11) sont claires, il suffit de montrer (9).

Il faut introduire quelques notations : pour $M \subset [1,\dots,n]$, on pose

$$w_M = \prod_{\mu\in M} (z_\mu \wedge \bar{z}_\mu)$$

$(z_1,\dots,z_n)$ étant une base de E' duale d'une base orthonormée de E .

ΛF a une base formée d'éléments

$$z_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_a} \wedge \bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}_{j_b} \quad .$$

Pour $A = [i_1, \ldots, i_a] \subset [1, \ldots, n]$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_a$, on pose

$$\overline{z_A} = \overline{z_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{z_{i_a}}$$

$$z_A = z_{i_1} \wedge \cdots \wedge z_{i_a} \quad .$$

Il en résulte que tout élément de la base de ΛF citée ci-dessus s'écrit :

$$z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M \quad ,$$

A, B, M étant des parties deux à deux disjointes de $[1, \ldots, n]$. Posons

$$M' = [1, \ldots, n] - A - B - M \quad ;$$

$$a = \# A \quad + \# M$$

$$b = \# B \quad + \# M$$

$$p = a + b = \# A + \# B + 2 \# M \quad .$$

On vérifie alors à l'aide de (8) et (7) que :

$$(12) \qquad *(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M) = (-1)^{\# M + \frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n}\, i^{a-b}\, z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_{M'} \quad .$$

De même on a

$$(13) \qquad L(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M) = \frac{i}{2} z_A \wedge \bar{z}_B \;\Big(\sum_{\mu \in M'} W_{M \cup \{\mu\}} \Big) \quad ,$$

cette expression étant nulle si $M' = \emptyset$.

$$(14) \qquad \Lambda(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M) = \frac{2}{i} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \Big(\sum_{\mu \in M} W_{M - \{\mu\}} \Big) \quad ,$$

cette expression étant nulle pour $M = \emptyset$.

La relation (9) en résulte alors facilement.

Les relations (9), (10), (11) définissent une représentation de l'algèbre de Lie $Sl_2(C)$ dans ΛF .

1.5. Rappels sur les représentations d'algèbre de Lie semi-simples complexes (voir [2]). Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines correspondant, $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$

une base de R . Soit R^+ l'ensemble des racines positives relativement à S .

Soit E un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Pour toute forme linéaire χ sur $\mathfrak{h}$ on pose :

$$E_\chi = \{x \in E \mid \forall H \in \mathfrak{h} , H(x) = \chi(H)x\} .$$

Un élément de E_χ est dit de poids χ . Si $E_\chi \neq 0$, χ est un poids de E .

DEFINITION.- Soit χ un poids de E . On dit que χ est un plus haut poids de E si $E_{\chi+\alpha} = 0$, $\forall \alpha \in R^+$.

On a les propriétés suivantes :

1) Tout $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie admet un plus haut poids unique.

2) Deux $\mathfrak{g}$-modules simples de dimensions finies sont isomorphes si et seulement s'ils ont le même plus haut poids.

3) Un $\mathfrak{g}$-module engendré par un élément de plus haut poids est simple.

4) Si χ est un plus haut poids de E , E contient un sous-module simple de plus haut poids χ .

De plus, dans le cas de $Sl_2(\mathbb{C})$ on a des résultats plus précis : $Sl_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices 2×2 de trace nulle. Elle admet pour base

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

T, Λ, L satisfont aux relations (9), (10), (11) . $\mathfrak{h} = \mathbb{C}T$, et les caractères sont définis par leur valeur en T . Les racines sont $+2$ et -2 , $+2$ est la racine positive.

Par dérivation, on obtient une représentation de $Sl_2(\mathbb{C})$ notée U_m dans $S^m(\mathbb{C}^2)$ qui a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 7.- U_m <u>est simple, de plus haut poids</u> m .

Les poids sont $-m$, $-m+2,\dots,m-2$, m . Les sous-espaces propres correspondant sont de dimension 1. Pour un élément $v \neq 0$ de poids $m-2a$, $0 \leq a \leq m$, on a

$$\Lambda^s L^s v = (a+1)(a+2)\dots(a+s)(m-a-s+1)\dots(m-a)v ,$$

$$\begin{aligned} &Lv = 0 \quad \text{si} \quad a = m , \\ (15) \qquad &Lv \neq 0 \quad \text{si} \quad a \neq m , \\ &\Lambda v = 0 \quad \text{si} \quad a = 0 , \\ &\Lambda v \neq 0 \quad \text{si} \quad a \neq 0 . \end{aligned}$$

De plus, pour tout élément v de poids $m-2a$, il existe un élément w de poids m tel que

$$v = L^a w .$$

DEFINITION.- <u>Soit</u> E <u>une représentation de</u> $Sl_2(\mathbb{C})$. <u>On dit que</u> $v \in E$ <u>est primitif si</u> $\Lambda v = 0$.

Il résulte de (15) que les éléments primitifs de U_m sont ceux de poids m , c'est-à-dire de plus haut poids. En particulier, d'après la proposition 7, tout élément de U_m , vecteur propre de T , est l'image par une puissance de L d'un élément primitif.

Ces résultats s'appliquent immédiatement à une représentation isotypique de $Sl_2(\mathbb{C})$.

1.6. La représentation $Sl_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{End}\Lambda F$ définie dans 1.4 se décompose en composantes isotypiques :

$$\Lambda F = \bigoplus_\alpha \pi_\alpha .$$

D'après (8 bis) le poids correspondant à $\Lambda^p F$ est $n-p$. La racine positive étant $+2$, n et $n-1$ sont les plus hauts poids. D'après (1.5

propriété 4), il leur correspond des composantes isotypiques qu'on notera respectivement π_o et π_1.

On a

$$\Lambda F = \pi_o \oplus \pi_1 \oplus \pi$$

et les plus hauts poids du module π sont $n-2$, $n-3$.

Il en résulte une décomposition

$$\Lambda F = \pi_o \oplus \dots \oplus \pi_{n-1} \oplus \pi_n ,$$

où π_i, $i < n$ a pour plus haut poids $n-i$, et où π_n correspond à la représentation triviale. Il est clair d'après la proposition 7 que

(16) $$\pi_i \cap \Lambda^q F \neq \{0\}$$

si et seulement si $q-i$ est pair et $q-i \geq 0$, $2n-q-i \geq 0$.

PROPOSITION 8.- Pour $p < n$, $L^{n-p} : \Lambda^p F \longrightarrow \Lambda^{2n-p} F$ est un isomorphisme.

Démonstration.

Cela résulte immédiatement des relations (15).

DEFINITION.- On notera $Prim_p$ l'ensemble des éléments primitifs de π_p. C'est aussi l'ensemble des éléments primitifs de $\Lambda^p F$ d'après 1.5 et (16).

THEOREME 1.- 1°) Tout élément $v \in \Lambda^p F$ s'écrit d'une manière unique

(17) $$v = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r v_r \quad , \quad \text{où } v_r \in Prim_{p-2r} .$$

2°) Il existe des éléments de l'algèbre libre associative à deux indéterminées sur $\mathbb{Q}$, $\Phi_{p,r}$ tels que $\forall v \in \Lambda^p F$

(18) $$v_r = \Phi_{p,r}(L,\Lambda) v .$$

Démonstration.

1°) Il résulte de 1.6 et de la décomposition de ΛF.

2°) Traitons le cas où p est pair

$$v = v_o + Lv_1 + \dots + L^{p/2} v_{p/2}$$

$$\Lambda^{p/2} v = \Lambda^{p/2} L^{p/2} v_{p/2}$$
$$= c v_{p/2} \quad , \quad \text{d'après (15)} .$$

$C \in \mathbb{Z}$ d'où le résultat par récurrence.

1.7. Λ est bihomogène, donc on a une décomposition

$$\mathrm{Prim}_p = \bigoplus_{a+b=p} \mathrm{Prim}_{a,b} .$$

$Su(E')$ opère sur E', et également sur E'' par la représentation contragrédiente. Donc $Su(E')$ opère sur F, et ΛF par dérivation.

Soit $z_1, \ldots, z_n$ une base de E', duale d'une base orthonormale de E. Dans $su(E')$ soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre des matrices diagonales pour cette base. Soient $\chi_1 \ldots \chi_n$ les caractères associés. On a

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{n} \chi_i = 0 .$$

Les racines sont les $\chi_i - \chi_j$, $i \neq j$. On convient que les positives sont celles où $i < j$.

$\mathrm{Prim}_{a,b}$ étant construit uniquement à partir de la structure hermitienne de E, c'est un $Su(E')$-module.

THEOREME 2.- $\mathrm{Prim}_{a,b}$ <u>est un</u> $Su(E')$-<u>module simple</u>.

<u>Démonstration</u>.

Il faut d'abord montrer le lemme.

LEMME.- <u>Tout poids de la représentation de</u> $Su(E')$ <u>dans</u> $\Lambda^{a,b}F$ <u>s'écrit de manière unique</u>

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} n_i \chi_i \qquad \text{avec } n_i \geq 0 \ , \ \exists i_\chi \text{ tel que } n_{i_\chi} = 0 .$$

De plus, $n_i \leq 2$, $\forall_i$ et $\# \{ i \mid n_i = 2 \} \leq a$.

<u>Démonstration</u>.

La première assertion résulte de (19). Démontrons la seconde. Soient

$v = z_A \wedge \bar{z}_B$, $C = A \cap B$. Alors

$$\chi = \chi_A - \chi_B = \chi_{A-C} - \chi_{B-C} \quad \text{avec} \quad \chi_M = \sum_{i \in M} \chi_i .$$

Distinguons deux cas

a) $B - C = \emptyset$, $\chi = \chi_{A-C}$ et le lemme est clair.

b) $B - C \neq \emptyset$.

Soit alors

$$D = (A - C \cup B - C)^C .$$

On a $\chi = 2\chi_{A-C} + \chi_D$

et le lemme en résulte.

<u>Démonstration du théorème</u> 2.

Il résulte du lemme que

$$v = z_1 \wedge \dots \wedge z_a \wedge \bar{z}_n \wedge \dots \wedge \bar{z}_{n-b+1}$$

est un élément de plus haut poids de $\Lambda^{a,b}F$. De plus d'après (14), $v \in \mathrm{Prim}_{a,b}$. Pour montrer que $\mathrm{Prim}_{a,b}$ est simple, il suffit donc d'après 1.5, 3) de montrer que v engendre $\mathrm{Prim}_{a,b}$. Calculons la dimension d du $\mathrm{Su}(E')$-module engendré par v par la formule de H. Weyl [2] :

χ étant le poids de v , soit

$$\rho = \frac{1}{2} \Sigma\alpha \quad , \quad \alpha \text{ racine } > 0 ,$$

et soit

$$H_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$(\chi_i - \chi_j)(H_{ij}) = 2 .$$

On a

$$d = \prod_{i<j} \frac{(\rho + \chi)(H_{ij})}{\rho(H_{ij})} .$$

Notons

$$A = [1,\dots,a] \quad , \quad B = [n - b + 1,\dots,n] \quad , \quad C = [a + 1,\dots,n - b] .$$

$$\chi(H_{ij}) = 2 \quad \text{si} \quad (i,j) \in A \times B$$
$$= 1 \quad \text{si} \quad (i,j) \in A \times C \cup C \times B$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

d'où

$$d = \prod_{A \times C} \frac{1+j-i}{j-i} \prod_{C \times B} \frac{1+j-i}{j-i} \prod_{A \times B} \frac{2+j-i}{j-i} .$$

Soit

$$d = \binom{n}{a}\binom{n}{b} - \binom{n}{a-1}\binom{n}{b-1} .$$

Donc $d = \dim \mathrm{Prim}_{a,b}$; en effet $\mathrm{Prim}_{a,b} = \mathrm{Ker}(\Lambda : \Lambda^{a,b}F \longrightarrow \Lambda^{a-1,b-1}F)$.

COROLLAIRE.- Pour tout $w \in \mathrm{Prim}_p$ on a

1°) si $r \leq n-p$,

(20) $$*L^r w = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} L^{n-p-r} Cw .$$

2°) si $r > n-p$

(20') $$L^r w = 0 .$$

Démonstration.

Le)2 est clair d'après (15) et (16). Démontrons 1°). Les endomorphismes $*$ et L^{n-p} sont deux SuE'-isomorphismes :

$$\mathrm{Prim}_{a,b} \longrightarrow (\mathrm{Ker}\, L)_{n-b,n-a} \quad . \quad (a+b=p) .$$

Donc il existe $\gamma_{a,b} \in \mathbb{C}$ tel que

$$*w = \gamma_{a,b} L^{n-p} w .$$

Calculons $\gamma_{a,b}$ en substituant dans cette formule

$$w = z_1 \wedge \dots \wedge z_a \wedge \bar{z}_n \wedge \dots \wedge \bar{z}_{n-b+1}$$

$$*w = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n} w \wedge \left(\prod_{j=a+1}^{n-b} z_j \wedge \bar{z}_j\right)$$

d'après (12).

$$L^{n-p} w = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} (n-p)!\, w \wedge \prod_{j=a+1}^{n-b} (z_j \wedge \bar{z}_j) .$$

Il en résulte que $\gamma_{a,b}$ vaut

$$\gamma_{a,b} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{i^{a-b}}{(n-p)!} \quad .$$

Or suivant (3), $C\big|_{\Lambda^{a,b}F} = i^{a-b}$ donc pour tout $w \in \mathrm{Prim}_p$ on a

$$*w = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{1}{(n-p)!} L^{n-p} C w \quad .$$

Pour obtenir le corollaire, il faut maintenant démontrer le

LEMME.- <u>Soit</u> $w \in \mathrm{Prim}_p$. <u>Pour tout</u> $s \leq r$ <u>on a</u>

(21) $\quad \Lambda^s L^r w = r(r-1)\ldots(r-s+1)(n-p-r+1)\ldots(n-p-r+s) \, L^{r-s} w$.

<u>Démonstration</u>.

Cela résulte en effet de la première des relations (15) avec

$$m = n-p \quad , \quad a = r-s \quad , \quad v = L^{r-s} w \quad .$$

<u>Démonstration du corollaire</u>.

On a

$$\begin{aligned} *L^r w &= (*L^r *^{-1}) * w \\ &= \Lambda^r * w \\ &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{1}{(n-p)!} \Lambda^r L^{n-p} C w \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (21).

PROPOSITION 9.- <u>Dans la décomposition</u> (17), <u>si</u> $L^q V = 0$, <u>alors</u> $V_r = 0$ <u>pour tout</u> $r \geq (p+q-n)^+$.

<u>Démonstration</u>.

On a

$$L^q V = \Sigma \, L^{q+r} V_r = 0 \quad , \quad V_r \in \mathrm{Prim}_{p-2r} \quad .$$

Or suivant le corollaire du théorème 2, 2°, on a (20'),

$$L^{q+r} V_r = 0$$

si $\quad q + r > n - p + 2r$

soit $\quad r < p + q - n$.

Donc

$$0 = \sum_{r \geq (p+q-n)^+} L^{q+r} v_r = \sum_{q+r \geq (p+2q-n)^+} L^{q+r} v_r \quad ,$$

donc $v_r = 0$ pour ces valeurs de r .

§ 2. Géométrie kählérienne locale.

2.1. Soit X une variété C-analytique de dimension n . Notons Ω_X le faisceau des formes différentielles C^∞ complexes de X , et $\Omega_X^{a,b}$ le sous-faisceau des formes de bidegré (a,b) .

Dans un système de coordonnées locales $z_1,\dots,z_n$, une forme α de bidegré (a,b) s'écrit

$$\alpha = \Sigma f_I dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_a} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_b}$$

où les f_I , pour $I = [i_1,\dots,i_a,j_1,\dots,j_b]$, sont les fonctions C^∞ .
Il en résulte que $d\alpha$ est somme d'une forme de bidegré $(a+1,b)$ notée $d'\alpha$ et d'une forme de bidegré $(a,b+1)$ notée $d''\alpha$. On a

$$(1) \quad \begin{aligned} d' &: \Omega_X^{a,b} \longrightarrow \Omega_X^{a+1,b} \quad , \\ d'' &: \Omega_X^{a,b} \longrightarrow \Omega_X^{a,b+1} \quad , \\ d &= d' + d'' \quad , \end{aligned}$$

et

$$d'^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0 \quad .$$

Soit ω une forme différentielle réelle de bidegré $(1,1)$. En tout point x de X , ω définit une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne H_x sur $T_{X,x}$ (§ 1.1 , prop. 1) .

DEFINITION.- <u>Une variété</u> $\mathbb{C}$-<u>analytique</u> X <u>munie d'une forme</u> ω <u>réelle de bidegré</u> $(1,1)$ <u>sera dite hermitienne si</u> H_x <u>est positive non dégénérée en tout point</u> $x \in X$.

La forme ω s'appelle la forme fondamentale de la variété hermitienne (X,ω) .

Une variété hermitienne (X,ω) a de manière naturelle une structure riemannienne, ce qui permet de définir des endomorphismes $*$, Δ, δ (cf. exposé n°1).

On définira également les endomorphismes L et Λ par les formules

$$L\alpha = \alpha \wedge \omega \quad ,$$

$$\Lambda\alpha = *^{-1} L * \alpha \quad .$$

DEFINITION.- <u>Une variété hermitienne</u> (X,ω) <u>est dite kählérienne si</u> ω <u>est fermée</u>.

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> (X,ω) <u>une variété kählérienne. On a les relations</u>

(2) $Ld = dL$,

(3) $\Lambda C^{-1} dC - C^{-1} dC\Lambda = \delta$,

(4) $L\delta - \delta L = C^{-1} dC$.

<u>Démonstration</u>.

(2) est immédiate sachant que $d\omega = 0$. (3) et (4) sont équivalentes par adjonction. Pour démontrer (3), démontrons le

LEMME.- <u>Soit</u> $M = \bigoplus_{o \leq p \leq 2n} M_p$ <u>un module gradué. Soient</u> L, d, Λ, C <u>des endomorphismes de</u> M <u>de degrés respectifs</u> $2, 1, -2, 0$. <u>Soit</u> $*$ <u>un automorphisme de</u> M <u>tel que</u>

$$* : M_p \longrightarrow M_{2n-p}$$

<u>soit un isomorphisme</u>.

On pose $\mathrm{Prim}_p = \mathrm{Ker}(\Lambda|_{M_p})$ et $\delta = -*d*$. On suppose vérifiées les relations

$$Ld = dL \quad ,$$

$$C\Lambda = \Lambda C \quad ,$$

$$CL = LC \quad ,$$

et les relations (17), (20), (20') et (21) du paragraphe 1. On suppose de plus

$C^2|_{M_p} = (-1)^p$. Alors on a la relation (3) ci-dessus.

Démonstration.

D'après (17), il suffit de démontrer l'égalité

(31) $$\Lambda C^{-1} dCL^r\alpha - C^{-1} dC \Lambda L^r\alpha = \delta L^r\alpha ,$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{Prim}_p$ et tout r.

1) Calculons le premier membre de (3'). On a d'après (21)

$$\Lambda L^r\alpha = r(n - p - r + 1)L^{r-1}\alpha .$$

On a également

$$C^{-1} dC\alpha = \sum_{i \geq (p+1-n)^+} L^i\alpha_i , \quad \alpha_i \in \mathrm{Prim}_i ,$$

suivant (17).

De plus $\alpha \in \mathrm{Prim}_p$ donc

$$L^{n-p+1}\alpha = 0 \qquad \text{(d'après (20'))}.$$

Il en résulte

$$\alpha_i = 0 , \quad \forall i \geq 2 ,$$

car la proposition 9 du paragraphe 1 est une conséquence formelle de (17) et (20').

Donc

$$C^{-1} dC\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1 .$$

Le premier membre de (3') s'écrit donc

$$\Lambda L^r\alpha_0 + \Lambda L^{r+1}\alpha_1 - r(n - p - r + 1)(L^{r-1}\alpha_0 + L^r_{\alpha_1}) ,$$

soit sachant que $\alpha_0 \in \mathrm{Prim}_{p+1}$ et $\alpha_1 \in \mathrm{Prim}_{p-1}$,

$$- rL^{r-1}\alpha_0 + (n - p - r + 1)L^r\alpha_1 .$$

2) Calculons le second membre de (3'). On a d'après (20)

$$*L^r\alpha = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n - p - r)!} L^{n-p-r} C\alpha .$$

Donc

$$d\, L^r\alpha = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n - p - r)!} L^{n-p-r} dC\alpha ,$$

$$*d*L^r\alpha = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} *L^{n-p-r}\, C\, C^{-1} dC\alpha \ ,$$

$$= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} [*L^{n-p-r}C\alpha_o + *\, L^{n-p-r+1}C\alpha_1] \ ,$$

$$= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} \left[(-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}} \frac{(n-p-r)!}{(r-1)!} L^{r-1}C^2\alpha_o + (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \frac{(n-p-r+1)!}{r!} L^r C^2 \alpha_1\right]$$

$$*d*L^r\alpha = rL^{r-1}\alpha_o - (n-p-r+1)L^r\alpha_1 \ .$$

D'où (3').

2.3. Soit (X,ω) une variété hermitienne. On notera δ' et δ'' les deux composantes de l'adjoint δ de d :

$$(5) \quad \begin{aligned} \delta' &= -*d''* \ : \Omega_X^{a,b} \longrightarrow \Omega_X^{a-1,b} \ . \\ \delta'' &= -*d'* \ : \Omega_X^{a,b} \longrightarrow \Omega_X^{a,b-1} \ . \end{aligned}$$

Ils satisfont aux relations

$$(6) \qquad \delta'^2 = \delta''^2 = \delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0 \ .$$

THEOREME 1.- <u>Soit</u> (X,ω) <u>une variété kählérienne</u>. <u>Si l'on pose</u> $\Delta = d\delta + \delta d$, <u>on a</u>

(7) 1°) $\Delta L = L\Delta$.

(8) 2°) $\Delta = 2(d'\delta' + \delta'd') = 2(d''\delta'' + \delta''d'')$.

3°) Δ <u>est bihomogène de bidegré</u> $(0,0)$.

4°) $L^{n-p} : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{2n-p}$ <u>est un isomorphisme pour tout</u> $p < n$.

<u>Démonstration</u>.

4° a déjà été vu et n'est mis que pour mémoire (§1, prop. 8). De plus, il est clair que 2° entraîne 3° d'après la relation (1) du paragraphe 2. Il suffit de montrer 1° et 2°. Rappelons que dans l'algèbre de Lie graduée* d'un module gradué on a pour tous endomorphismes X, Y, Z de degrés respectifs p, q, r :

$$[X,Y] = XY - (-1)^{pq}YX \quad ,$$

$$(9) \qquad (-1)^{pr}[X,[Y,Z]] + (-1)^{pq}[Y,[Z,X]] + (-1)^{qr}[Z,[X,Y]] = 0 \quad .$$

Démontrons le lemme

LEMME.- <u>Soit</u> $M = \bigoplus_{0 \leq p \leq 2n} M_p$ <u>un module gradué. Soient</u> L, d, Λ, C, δ <u>des endomorphismes de</u> M <u>de degrés respectifs</u> 2, 1, -2, 0, -1 . <u>On suppose vérifiées les relations</u>

$$C\Lambda = \Lambda C \quad ,$$

$$CL = LC \quad ,$$

$$[L,d] = 0 \quad ,$$

$$[L,\delta] = C^{-1}dC \quad ,$$

$$[d,C^{-1}dC] = 0 \quad ,$$

$$[\Lambda,C^{-1}dC] = \delta \quad .$$

<u>Si on pose</u>

$$\Delta = [d,\delta] \quad ,$$

$$d' = \frac{1}{2}(d + iC^{-1}dC) \quad ,$$

$$d'' = \frac{1}{2}(d - iC^{-1}dC) \quad ,$$

$$\delta' = \frac{1}{2}(\delta - iC^{-1}\delta C) \quad ,$$

$$\delta'' = \frac{1}{2}(\delta + iC^{-1}\delta C) \quad ,$$

<u>on a les relations</u>

$$[L,\Delta] = 0 \quad ,$$

$$\Delta = 2[d',\delta'] - i[\Lambda,d^2] \quad ,$$

$$\Delta = 2[d'',\delta''] + i[\Lambda,d^2] \quad .$$

<u>Démonstration</u>.

On a $[L,\Delta] = [L,[d,\delta]]$.

Or d'après (9) § 2, on a

*.... graduée des endomorphismes

$$[L,[d,\delta]] + [d,[\delta,L]] - [\delta;[L,d]] = 0 \quad ,$$

soit

$$[L,\Delta] = [d,C^{-1}dC] = 0 \quad ,$$

d'où (7) paragraphe 2.

De même on a

$$\Delta = [d,\delta] = [d,[\Lambda,C^{-1}dC]] \quad .$$

Or d'après (9) paragraphe 2 on a

$$-[d,[\Lambda,C^{-1}dC]] + [\Lambda,[C^{-1}dC,d]] + [C^{-1}dC,[d,\Lambda]] = 0 \quad .$$

Il en résulte

$$\Delta C = C\Delta \quad .$$

De plus, d'après (9) paragraphe 2 on a

$$[d,C^{-1}\delta C] = -[\Lambda,d^2] \quad .$$

$$[C^{-1}dC,\delta] = [\Lambda,d^2] \quad .$$

On a donc

$$\begin{aligned} 4[d',\delta'] &= [d + iC^{-1}dC,\delta - iC^{-1}\delta C] \\ &= 2\Delta + i[\Lambda,d^2] + i[\Lambda,d^2] \quad , \end{aligned}$$

d'où le lemme.

On en déduit (8) paragraphe 2, car $d^2 = 0$.

COROLLAIRE.- Soit (X,ω) une variété kählérienne. Soit Harm_p le sous-espace de Ω^p formé des formes harmoniques (cf. exposé n°1). On a pour tout $p < n$ un isomorphisme

$$(10) \qquad L^{n-p} : \mathrm{Harm}_p \longrightarrow \mathrm{Harm}_{2n-p} \quad .$$

Démonstration.

Voir paragraphe 2, théorème 1, 1° et 4° .

§ 3. Théorie de Hodge.

3.1. DEFINITION.- Soit $r \in \mathbb{Z}$. On appelle structure de Hodge pure de poids r la donnée :

- d'un $\mathbb{Z}$-module de type fini $H_{\mathbb{Z}}$;
- d'une filtration finie décroissante F^p sur $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, satisfaisant

à la relation :

(1) $$F^{p+1}(H_{\mathbb{C}}) \oplus \overline{F^{r-p}}(H_{\mathbb{C}}) = H_{\mathbb{C}} \quad , \quad \forall p \ .$$

On voit facilement [5], qu'il revient au même de se donner

- un $\mathbb{Z}$-module de type fini $H_{\mathbb{Z}}$;
- une graduation finie $H_{\mathbb{C}} = \oplus H_p$, satisfaisant à

(2) $$\overline{H}_p = H_{r-p} \quad , \quad \forall p \ .$$

Il suffit en effet de poser d'une part

$$F^p(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p' \geq p} H_{p'} \ ,$$

et d'autre part

$$H_p = F^p(H_{\mathbb{C}}) \wedge \overline{F^{r-p}}(H_{\mathbb{C}}) \ .$$

Soit $\Omega_X^{\bullet\bullet}$ le bicomplexe des faisceaux de formes différentielles C^∞ complexes. Les $\Omega_X^{a,b}$ sont mous et ce bicomplexe est acyclique.

Soit $\Omega_{an}^\bullet$ le complexe des faisceaux de formes différentielles holomorphes. Nous allons dans la suite étudier l'hypercohomologie de $\Omega_{an}^\bullet$: la seconde suite spectrale dégénère car $\Omega_{an}^\bullet$ est acyclique. Il en résulte

$$H^m(X,\mathbb{C}) = \underline{H}^m(X,\Omega_{an}^\bullet) \ .$$

La première suite spectrale s'écrit donc

(3) $$E_1^{p,q} = H^q(X,\Omega_{an}^p) \Rightarrow H^m(X,\mathbb{C}) \ .$$

Notons $\Omega_{[p]}^\bullet$ le complexe suivant

$$\Omega_{[p]}^q = \Omega_{an}^{p+q} \ .$$

On a un morphisme évident de complexe

$$\Omega_{[p]}^\bullet \longrightarrow \Omega_{an}^\bullet \ .$$

Posons

$$(4) \qquad F^p(H^m(X,\underline{\mathbb{C}})) = \mathrm{Im}(\underline{H}^{m-p}(X,\Omega^\bullet_{[p]}) \longrightarrow \underline{H}^m(X,\Omega^\bullet_{an})) \quad .$$

THEOREME.- <u>Soit</u> (X,ω) <u>une variété kählérienne compacte de dimension</u> n .
<u>Soit</u> $u \in H^2(X,\mathbb{R})$ <u>la classe de cohomologie de</u> ω . <u>Alors</u>

1°) $\forall r$, $H^r(X,\mathbb{Z})$ <u>muni de la filtration</u> (4) <u>est une structure de Hodge pure de poids</u> r .

2°) <u>La suite spectrale</u> (3) <u>dégénère au niveau</u> 1 . $(d_1 = 0)$.

3°) <u>Le</u> ωp-<u>produit</u>

$$(\cup u)^{n-p} : H^p(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n-p}(X,\mathbb{R}) \quad ,$$

<u>est un isomorphisme</u> $\forall p < n$.

<u>Démonstration</u>.

Notons $\Omega^{a,b}$ le module des sections globales de $\Omega^{a,b}_X$. La suite spectrale (3) est la première suite spectrale du bicomplexe $(\Omega^{a,b})$. Or $(\mathrm{Harm}^{a,b})$ est un sous-bicomplexe de $(\Omega^{a,b})$ et on sait (exposé n°1), qu'il existe une rétraction

$$H : \Omega^{a,b} \longrightarrow \mathrm{Harm}^{a,b} \quad .$$

Cette rétraction satisfait à (exposé n°1) :

$$\begin{aligned} 1_{\Omega^n} - H &= \Delta G = G\Delta \\ &= d''(2\delta''G) + (2\delta''G)d'' \quad , \end{aligned}$$

d'après le paragraphe 2, (8).

Il en résulte un isomorphisme de suites spectrales

$$E_r^{p,q}(\Omega^{\bullet\bullet}) \longrightarrow E_r^{p,q}(\mathrm{Harm}^{\bullet\bullet}) \quad .$$

Or les différentielles de $\mathrm{Harm}^{\bullet\bullet}$ sont nulles, d'où 2° .

De plus

$$H^r(X,\underline{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Harm}^r = \bigoplus_{p+q=r} \mathrm{Harm}^{p,q} \quad ,$$

et

$$F^p(H^r(X,\underline{\mathbb{C}})) = \bigoplus_{p' \geq p} \mathrm{Harm}^{p',r-p'} \quad .$$

Enfin la conjugaison $\underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}$ induit par l'isomorphisme

$$H^r(X,\underline{\mathbb{C}}) \simeq H^r_{DR}(X) = \mathrm{Harm}^r$$

la conjugaison de Harm^r .

Donc la relation

$$\overline{\mathrm{Harm}_{p,q}} = \mathrm{Harm}_{q,p} \quad ,$$

entraîne 1° .

Le 3° est clair à partir du paragraphe 2, théorème 1, 4°, d'après [4] .

Addenda (II.19).- Dans le lemme du théorème 1 du paragraphe 2, ajouter après "Soit $M = \bigoplus_{o \leq p \leq 2n} M_p$ un module gradué", "sur un anneau A . Soit $i \in A$ tel que $i^2 = -1$ ".

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. WEIL - Variétés kählériennes, Paris, Hermann, 1958.

[2] J.-P. SERRE - Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[3] H. WEYL - The classical groups, Princeton Mathematical Series n°1, Princeton University Press, 1946.

[4] R. GODEMENT - Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris, Hermann, 1958.

[5] P. DELIGNE - Théorie de Hodge, II, I.H.E.S., Public. Math., 40 (1971).