

# *Astérisque*

DANIEL ALIBERT

## **Lemme de déplacement de Chow**

*Astérisque*, tome 36-37 (1976), Séminaire Bourbaki, exp. n° I, p. 21-34

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1976\\_\\_36-37\\_\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__21_0)

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LEMME DE DÉPLACEMENT DE CHOW

par Daniel ALIBERT

§ 0. Cycles. Intersection de cycles.

Ce paragraphe rappelle les définitions utilisées dans le reste du texte.

0.1. DÉFINITION.- Soit  $X$  un schéma noéthérien irréductible. On appelle cycle de  $X$  un élément du groupe abélien libre engendré par les fermés irréductibles de  $X$  :  $Z_*(X)$  .

Ce groupe est gradué par la dimension :

$$Z_*(X) = \bigoplus_k Z_k(X) \quad .$$

0.2. DÉFINITION.- Soit  $F$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, tel que  $\dim(\text{supp } F) \leq k$  .

On pose

$$Z_k(F) = \Sigma (F_{\eta_i}) \{ \bar{\eta}_i \} \quad ,$$

la somme étant prise sur les points génériques  $\eta_i$  du support de  $F$  tels que  $\dim\{\bar{Y}_i\} = k$  . On a donc

$$Z_k(F) = 0 \iff \dim(\text{supp } F) < k \quad .$$

0.3.- Soit  $X$  un schéma intègre, algébrique sur un corps. Soient  $Z = \sum_i n_i Z_i$  ,  $Y = \sum_j m_j Y_j$  des cycles de  $X$  . On dit que  $Z$  et  $Y$  sont en bonne position si, pour tous  $i, j$  , on a les propriétés suivantes :

1°) aucune composante irréductible de  $Z_i \cap Y_j$  n'est contenue dans  $\text{Sing } X$  ;

2°)  $\dim(Z_i \cap Y_j) \leq \dim Z_i + \dim Y_j - \dim X$  .

C'est-à-dire, soit  $Z_i \cap Y_j$  est vide, soit toute composante irréductible  $W_{ijk}$  de  $Z_i \cap Y_j$  satisfait à :

1°)  $W_{ijk} \not\subset \text{sing } X$  ,

2°)  $\dim W_{ijk} = \dim Z_i + \dim Y_j - \dim X$  .

I-02

0.4.- Les données  $X, Z, Y$  étant celles de 0.3, on suppose  $Z$  et  $Y$  en bonne position. Pour tout  $i$  (resp. tout  $j$ ) notons :

$$Z_i' = Z_i \cap (X - \text{sing } X) ,$$

$$(\text{resp. } Y_j' = Y_j \cap (X - \text{sing } X)) .$$

Pour toute composante irréductible  $W_{ijk}$  de  $Z_i \cap Y_j$  notons de même :

$$W_{ijk}' = W_{ijk} \cap (X - \text{sing } X) .$$

L'ensemble  $W_{ijk}'$  est irréductible, et dense dans  $W_{ijk}$ , c'est une composante irréductible de  $Z_i' \cap Y_j'$ .

Définissons le produit d'intersection  $Z_i' \cdot Y_j'$  par

$$Z_i' \cdot Y_j' = \sum_{l \geq 0} (-1)^l Z_{a_{ij}} (\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X-\text{sing } X}}(\mathcal{L}_{Z_i'}, \mathcal{L}_{Y_j'})) ,$$

avec

$$a_{ij} = \sup(-\dim X + \dim Z_i + \dim Y_j, 0) .$$

Il existe des entiers  $b_{ijk}$  tels que :

$$Z_i' \cdot Y_j' = \sum_k b_{ijk} W_{ijk}' .$$

Définissons le produit d'intersection  $Z_i \cdot Y_j$  par :

$$Z_i \cdot Y_j = \sum_k b_{ijk} W_{ijk} .$$

On définit alors le produit d'intersection  $Z \cdot Y$  par

$$Z \cdot Y = \sum_{ij} n_i m_j (Z_i \cdot Y_j) .$$

### § 1. Le lemme de Chow.

1.1. DÉFINITION.- Soient  $k$  un corps et  $V$  un schéma intègre algébrique sur  $k$ . Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  des cycles de  $V$ . On dit que  $Z_1$  et  $Z_2$  sont rationnellement équivalents et on note

$$Z_1 \sim Z_2 ,$$

s'il existe un cycle  $W$  de  $V \times \mathbb{P}_k^1$  et des points rationnels  $x_1$  et  $x_2$  de  $\mathbb{P}_k^1$  tels que :

1°)  $W$  et  $V \times \{x_i\}$  sont en bonne position,

2°)  $\text{pr}_1(W \cdot (V \times \{x_i\})) = Z_i$

pour  $i = 1, 2$  .

1.2. PROPOSITION ("lemme de déplacement").- Soient  $k$  un corps,  $V$  un schéma intègre lisse et quasi-projectif sur  $k$ ,  $Z$  et  $Y$  des cycles de  $V$ . Alors il existe un cycle  $Z'$  de  $V$ , rationnellement équivalent à  $Z$  tel que  $Z'$  et  $Y$  soient en bonne position.

De plus, on peut choisir le cycle  $W$  de  $V \times \mathbb{P}_k^1$  réalisant l'équivalence de  $Z$  et  $Z'$  de telle manière que pour tout  $x$  de  $\mathbb{P}_k^1$  sauf un nombre fini,  $W$  et  $(V \times \{x\})$  soient en bonne position, ainsi que  $\text{pr}_1(W \cdot (V \times \{x\}))$  et  $Y$ .

§ 2. Le cas  $V = \mathbb{P}_k^n$ ,  $k$  algébriquement clos.

2.1. PROPOSITION.- La proposition 1.2 est vraie pour  $V = \mathbb{P}_k^n$  et  $k$  algébriquement clos.

Démonstration.- Par linéarité, on peut supposer  $Z$  et  $Y$  irréductibles.

Il existe un ouvert dense de  $\text{Aut } \mathbb{P}^n$  tel que, pour un  $s$  de cet ouvert,  $s(Y)$  et  $Z$  soient en bonne position.

En effet, notons  $G$  la variété des matrices  $(n+1, n+1)$  inversibles, à multiplication scalaire près. On a

$$\dim G = n^2 + 2n .$$

Soit  $X$  le fermé de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times G$  dont les points fermés sont les triples  $(x, y, s)$  tels que  $x = s(y)$  .

Notons  $X_x$  la fibre de

$$\text{pr}_1 : X \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

en un point fermé  $x$  .

Notons  $X_{x,y}$  la fibre de

$$\text{pr}_2 : X_x \longrightarrow \mathbb{P}_k^n$$

I-04

en un point fermé  $y$ . Cette fibre est isomorphe au sous-ensemble de  $G$  :

$$\{s \in G \mid s(y) = x\} .$$

L'équation  $s(y) = x$  équivaut à un système de  $(n+1)$  équations linéaires indépendantes, à  $(n+1)^2 + 1$  inconnues, homogène. Il en résulte

$$\dim X_{x,y} = n^2 + n .$$

Soit alors  $X' = X \cap Z \times Y \times G$ . On a d'après ce qui précède

$$\dim X' = n^2 + n + \dim Z + \dim Y .$$

La fibre de

$$\text{pr}_3 : X' \longrightarrow G$$

en un point fermé  $s$  est

$$((z,y) \mid s(y) = z, y \in Y, z \in Z) = Z \cap s(Y) .$$

Elle est donc de dimension au moins égale à

$$\sup(\dim Z + \dim Y - n, -1) .$$

Si pour tout  $s$  de  $G$ , cette fibre est de dimension strictement supérieure à  $\dim Z + \dim Y - n$ , alors

$$\dim X' > n^2 + 2n + \dim Z + \dim Y - n = n^2 + n + \dim Z + \dim Y .$$

Donc il existe un ouvert non vide de  $G$  dont les points ont une fibre dans  $X'$  de dimension

$$\sup(\dim Z + \dim Y - n, -1) .$$

Pour un tel point  $s$ ,  $s(Y)$  et  $Z$  sont en bonne position. Choisissons une courbe rationnelle  $C$  sur  $\text{Aut } \mathbb{P}_k^n$  joignant  $\text{Id}$  à  $s$ . Le cycle de  $\mathbb{P}_h^n \times G$  défini par

$$W = \{(W,s) \mid W \in s(Y)\}$$

satisfait à l'énoncé de 2.1.

§ 3. Principe de la démonstration.

Supposons que  $k$  soit algébriquement clos, jusqu'au paragraphe 6. Les questions de rationalité seront étudiées ensuite.

Il suffit de démontrer l'énoncé suivant, pour obtenir 1.2.

3.1. LEMME.- Soit  $\bar{V} \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  un sous-schéma fermé intègre de  $\mathbb{P}_k^n$ . Soient  $\bar{Z} = \sum_j n_j \bar{Z}_j$  et  $\bar{Y} = \sum_i n_i \bar{Y}_i$  des cycles de  $\mathbb{P}_k^n$ , tels que pour tous  $(i, j)$ , aucune composante irréductible de  $\bar{Z}_j \cap \bar{Y}_i$  ne soit contenue dans  $\text{sing}(\bar{V})$ . Alors il existe un cycle  $\bar{Z}'$  de  $\bar{V}$ , rationnellement équivalent à  $\bar{Z}$ , tel que  $\bar{Z}'$  et  $\bar{Y}$  soient en bonne position.

De plus a) pour tout sous-schéma fermé  $F$  de  $\bar{V}$  de codimension au moins égale à 1, tel que pour tout  $j$ ,  $Z_j \not\subset F$ , on peut choisir  $\bar{Z}'$  de telle sorte qu'aucune de ses composantes irréductibles ne soit contenue dans  $F$ .

b) Avec les notations de 1.1, on peut choisir  $W \subset \bar{V} \times \mathbb{P}_k^1$  de telle sorte que pour tout point  $x$  de  $\mathbb{P}_k^1$  sauf un nombre fini,  $W$  et  $(\bar{V} \times \{x\})$  soient en bonne position, ainsi que  $\text{pr}_1(W \cdot (\bar{V} \times \{x\}))$  et  $Y$ , et que  $\text{pr}_1(W \cdot (\bar{V} \times \{x\}))$  satisfasse à a).

En effet, si 3.1 est démontré, on peut l'appliquer en prenant  $V, Z, Y$  comme dans 1.2, et pour  $\bar{V}, (\bar{Z}_j)(Y_i)$  les adhérences respectives de  $V, (Z_j), (Y_i)$  dans  $\mathbb{P}_k^n$ . On appliquera a), b) avec  $F = \bar{V} - V$ . Le cycle  $\bar{Z}'$  sera l'adhérence d'un  $Z'$  de  $V$ .

3.2.- On suppose donc dans la suite  $V$  projective, intègre, non nécessairement lisse.

Par définition, on pose

$$e_{Y_i}(Z_j) = \dim(Y_i \cap Z_j) - \sup(\dim Y_i + \dim Z_j - \dim V_i - 1)$$

et

$$e_Y(Z) = \sup_{i,j} e_{Y_i}(Z_j) \quad .$$

Le produit  $Y \cdot Z$  est défini si et seulement si  $e_Y(Z) = 0$ .

I-06

Le lemme 3.1 sera démontré par récurrence sur  $e_Y(Z)$ . Il suffit pour cela de montrer :

3.3. LEMME.- Soit  $V \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$  un sous-schéma fermé intègre. Soient  $Z$  un cycle de  $V$  irréductible,  $Y = \sum_i n_i Y_i$  un cycle de  $V$ . On suppose qu'aucune composante irréductible de  $Z \cap Y_i$  n'est contenue dans  $\text{sing } V$ . Soit  $F$  un fermé de  $V$  ne contenant pas  $Z$ . On suppose  $e_Y(Z) > 0$ .

Il existe un cycle  $C$  de  $\mathbb{P}_k^n$ , irréductible, contenant  $Z$  tel que

- a)  $C$  et  $V$  sont en bonne position ;
- b) si  $C \cdot V = Z + R$ , aucune composante irréductible de  $R$  n'est contenue dans  $F$  ;
- c) avec les notations de b),

$$e_Y(R) < e_Y(Z) ;$$

- d) si  $R = \sum_j r_j R_j$ , aucune composante irréductible de  $R_j \cap Y_i$  n'est contenue dans  $\text{sing } V$ .

Démontrons en effet 3.1 à partir de 3.3. Par hypothèse de récurrence, il existe un cycle  $R'$  de  $V$  rationnellement équivalent à  $R$ , tel que  $R'$  et  $Y$  soient en bonne position, et les conditions a) et b) de 3.1 vérifiées.

D'après 2.1, il existe un cycle  $C'$  de  $\mathbb{P}_k^n$  rationnellement équivalent à  $C$  tel que  $C'$  et  $V$ ,  $C'$  et  $Y$  soient respectivement en bonne position.

Il en résulte que les composantes irréductibles des intersections  $(C' \cdot V) \cdot Y_i$  sont de bonne dimension.

Pour montrer qu'il existe un cycle  $D$  de  $V$  rationnellement équivalent à  $C' \cdot V$  tel que  $D$  et  $Y$  soient en bonne position, on utilise le lemme suivant :

3.4. LEMME.- Soient  $V$  un  $k$ -schéma intègre,  $F$  et  $G$  des fermés de  $V \times \mathbb{P}_k^1$ , tels que  $F \subset G$  et

$$\dim F < \dim G ,$$

$G$  est irréductible,

$G \rightarrow \mathbb{P}^1$  est surjectif.

Alors l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{P}_k^1$  tels que

$$G \otimes K(x) \neq F \otimes k(x) ,$$

contient un ouvert dense dans  $\mathbb{P}_k^1$  .

Démonstration.- Si  $F \rightarrow \mathbb{P}^1$  n'est pas surjectif, c'est clair sinon il existe un ouvert de  $\mathbb{P}^1$  tel que les fibres aux points de cet ouvert, dans  $F$  et  $G$  soient de dimensions respectives  $\dim F - 1$  et  $\dim G - 1$  .

On applique 3.4 à  $G =$  composante irréductible de  $W \cap (Y_i \times \mathbb{P}^1)$  où  $W$  est un cycle de  $V \times \mathbb{P}^1$  réalisant l'équivalence rationnelle de  $C.V$  et  $C'.V$  , et  $F = G \cap (\text{sing } V \times \mathbb{P}^1)$  .

Il en résulte que  $D - R'$  et  $Y$  sont en bonne position, et

$$D - R' \sim Z .$$

De plus, par une nouvelle application de 3.4, on voit que la condition b) de 3.1 est vérifiée.

Pour construire le cycle  $C$  , nous utiliserons la notion de joint de deux sous-variétés projectives de  $\mathbb{P}_k^n$  .

#### § 4. Joint de deux sous-variétés de $\mathbb{P}_k^n$ .

4.1. DÉFINITION.- Soient  $Z$  et  $L$  deux sous-schémas fermés intègres de  $\mathbb{P}_k^n$  . On appelle joint de  $Z$  et  $L$  , et on note  $J(Z,L)$  , l'adhérence dans  $\mathbb{P}_k^n$  de la réunion des droites joignant un point fermé de  $Z$  à un point fermé de  $L$  .

4.2. Exemple.- Si  $Z$  et  $L$  sont deux sous-variétés linéaires de  $\mathbb{P}_k^n$  ,  $J(Z,L)$  est la sous-variété linéaire engendrée par  $Z$  et  $L$  .

4.3.- D'une manière générale, si  $Z$  et  $L$  sont disjointes, on a :



I-08

$$\dim(J(Z,L)) = \dim Z + \dim L + 1 ,$$

et  $J(Z,L)$  est irréductible.

En effet  $J(Z,L)$  est l'image d'un morphisme :

$$L \times Z \times \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \mathbb{P}_k^n ,$$

donc  $\dim J(Z,L) \leq \dim Z + \dim L + 1$  , et  $Z$  et  $L$  étant disjointes, l'égalité est vérifiée.

4.4.- Si  $Z = \sum n_i Z_i$  est un cycle de  $\mathbb{P}_k^n$  , on pose :

$$J(Z,L) = \sum n_i J(Z_i,L) ,$$

et  $J(Z,L)$  est un cycle de  $\mathbb{P}_k^n$  .

4.5.- Soient  $Z \subset V \subset \mathbb{P}_k^n$  des sous-schémas fermés intègres. On pose  $v = \dim V$  .

Considérons le fermé :

$$W_0 \subset (Z \times V - \Delta) \times \text{Grass}(n, n-v-1) ,$$

dont les points fermés sont les triples

$$(x,y,L) , \quad x \neq y , \quad xy \cap L \neq \emptyset .$$

Soit  $W$  l'adhérence de  $W_0$  dans  $Z \times V \times \text{Grass}(n, n-v-1)$  .

4.5.1.- Si  $(z,z,L)$  est un point de  $W$  , alors

$$T_{V,z} \cap L \neq \emptyset .$$

Choisissons un espace linéaire  $L$  de dimension  $n-v-1$  . Il détermine une injection

$$j_L : Z \times V \longrightarrow Z \times V \times \text{Grass}(n, n-v-1) .$$

On pose

$$H_L = \text{pr}_2(j_L^{-1}(W))$$

c'est un fermé de  $V$  .

4.6. LEMME.- La situation est celle de 4.5. Soit  $L$  un point fermé de

$\text{Grass}(n, n-v-1)$  tel que  $L \cap V = \emptyset$  . Alors :

1°) Il existe un ouvert non vide de  $Z$  dont les points sont réguliers

sur  $J(L, Z)$  .

2°) Les sous-variétés  $J(Z, L)$  et  $V$  sont en bonne position.

Démonstration.— Considérons la projection de sommet  $L$  :

$$\mathbb{P}_k^n - L \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_k^v .$$

On a

$$J(L, Z) \cap (\mathbb{P}_k^n - L) = \pi^{-1}(\pi(Z)) .$$

Soit  $p$  la restriction de  $\pi$  à l'intersection ci-dessus. Le morphisme

$$p : J(L, Z) \cap (\mathbb{P}_k^n - L) \longrightarrow \pi(Z) ,$$

est à fibres lisses, donc génériquement lisse. Comme  $\pi(Z)$  est génériquement lisse sur  $k$  ,  $J(L, Z)$  est donc génériquement lisse sur  $k$  , et si  $U \subset \pi(Z)$  est l'ouvert des points lisses de  $\pi(Z)$  ,  $p^{-1}(U)$  est lisse et coupe  $Z$  suivant un ouvert non vide. D'où 1°).

Pour le 2°), remarquons d'abord que toute composante irréductible de  $J(L, Z) \cap V$  est de dimension au moins égale à

$$n - v - 1 + \dim Z + 1 + v - n = \dim Z .$$

La restriction  $h$  de  $\pi$  à  $J(L, Z) \cap V$  est affine et propre, donc finie, et

$$h^{-1}(\pi(Z)) = J(L, Z) \cap V$$

d'où

$$\dim J(L, Z) \cap V \leq \dim Z ,$$

ce qui démontre le 2°).

Pour tout  $L$ , satisfaisant aux conditions de 4.6, on note :

$$J(L, Z) \cdot V = R_L + Z .$$

4.7. PROPOSITION.— Soient  $Z \subset V \subset \mathbb{P}_k^n$  des sous-schémas fermés intègres de  $\mathbb{P}_k^n$  tels que  $Z \not\subset \text{sing } V$  . Il existe un ouvert dense de  $\text{Grass}(n, n-v-1)$  dont les points fermés  $L$  satisfont à :

1°)  $L \cap V = \emptyset$  ;

2°)  $(\text{supp } R_L) \subset H_L$  .

Démonstration.— Il est connu que la première condition est ouverte. Supposons-la satisfaite.

Comme  $Z \not\subset \text{sing } V$ , il existe un point  $x_0$  de  $Z$  non singulier sur  $V$ .

En particulier

$$\dim T_{V, x_0} = v.$$

Il existe un ouvert de la grassmannienne considérée dont les points  $L$  satisfont à

$$(1) \quad L \cap T_{V, x_0} = \emptyset.$$

Pour un tel  $L$ , l'ensemble des points  $x$  de  $Z$  tels que  $T_{V, x} \cap L = \emptyset$ , est dense dans  $Z$ , donc intersecte l'ouvert de 4.6.1°. Soit  $x_1$  un point de l'intersection, on a :

$$(2) \quad \dim T_{J(Z, L), x_1} \cap T_{V, x_1} \geq \dim Z.$$

Dans l'espace  $T_{J(Z, L), x_1}$ , de dimension  $n - v + \dim Z$ , les sous-espaces  $L$  et  $T_{J(L, Z), x_1} \cap T_{V, x_1}$  sont disjoints d'après (1). Donc il y a égalité dans (2). Il en résulte que  $Z$  est de multiplicité 1 dans  $J(L, Z) \cdot V$ .

Soit  $Z'$  une composante de  $R_L$ . Tout point fermé de  $Z'$  n'appartenant pas à  $Z$  est dans  $H_L$ , donc  $Z' \subset H_L$ , ce qui démontre la proposition.

4.8. PROPOSITION.— Les notations et hypothèses sont celles de 4.7. Soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $V$ , irréductible. Alors

$$1^\circ) \quad W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \text{Grass}(n, n - v - 1)$$

est irréductible de dimension

$$\dim Z + \dim Y - \dim V + \dim \text{Grass}(n, n - v - 1).$$

2°) En particulier, l'un des énoncés suivants est vérifié :

a) il existe un ouvert dense de  $\text{Grass}(n, n - v - 1)$  dont les points fermés

$L$  satisfont à

$$W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \{L\} = \emptyset.$$

b)  $\dim Z + \dim Y - \dim V \geq 0$  et il existe un ouvert dense de

$\text{Grass}(n, n - v - 1)$  dont les points fermés  $L$  satisfont à :

$$\dim(W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \{L\}) = \dim Z + \dim Y - \dim V .$$

Démonstration.— Considérons la projection

$$W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \text{Grass}(n, n - v - 1) \xrightarrow{q} Z \times Y - \Delta .$$

On a :

$$q^{-1}(z, y) = \{L \mid L \cap zy \neq \emptyset\} .$$

Donc  $q^{-1}(z, y)$  est irréductible de dimension  $\dim \text{Grass}(n, n - v - 1) - \dim V$  .

D'où 1°).

Considérons la projection :

$$W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \text{Grass}(n, n - v - 1) \longrightarrow \text{Grass}(n, n - v - 1) .$$

Si elle n'est pas dominante a) est vérifié. Si elle est dominante, on a nécessairement d'après 1°)  $\dim Z + \dim Y - \dim V \geq 0$  et b) résulte de 1°).

4.8.1. COROLLAIRE.— Soient  $Z \subset V \subset \mathbb{P}_k^n$  des sous-schémas fermés irréductibles.

Soit  $Y$  un fermé de  $V$ , irréductible.

On suppose  $Z$  non contenu dans  $\text{sing } V$  .

1°) Il existe un ouvert dense de la Grassmannienne  $\text{Grass}(n, n - v - 1)$  dont les points fermés  $L$  satisfont à :

- a)  $L \cap V = \emptyset$  ,
- b)  $\dim(R_L \cap Y) \leq \dim(Z \cap Y)$  .

2°) Si de plus aucune composante irréductible de  $Z \cap Y$  n'est contenue dans  $\text{sing } V$ , on peut remplacer b) par :

$$e_Y(R_L) \leq \sup(e_Y(Z) - 1, 0) .$$

Démonstration.— Supposons d'abord que  $L$  appartienne à l'ouvert défini en 4.7.

Si a) de 4.8.2°) est vérifié, supposons que  $L$  soit également dans l'ouvert qui s'y trouve défini ; on a :

$$\begin{aligned} L \cap V &= \emptyset , \\ R_L &\subset H_L , \\ H_L \cap Y &\subset Z \cap Y . \end{aligned}$$

Donc 1°) est vérifié dans ce cas.

I-12

Si de plus, l'hypothèse 2°) de 4.8.1 est vérifiée, dans chaque composante irréductible  $I$  de  $Y \cap Z$  choisissons un point fermé  $x_I$  régulier sur  $V$  .

Si  $L$  est choisi tel que

$$L \cap T_{V, x_I} = \emptyset$$

ce qui est possible dans un ouvert dense de la grassmannienne car  $\dim T_{V, x_I} = v$  ,

alors  $x_I \notin H_L$  , d'après 4.5.1 ; l'énoncé de 2°) en résulte dans ce cas,

puisque  $\dim R_L \cap Y < \sup(\dim Z \cap Y, 0)$  .

Si b) de 4.8.2°) est vérifié, supposons que  $L$  se trouve dans l'ouvert qui y est défini. On a :

$$L \cap V = \emptyset ,$$

$$R_L \subset H_L ,$$

$$\dim(W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \{L\}) = \dim Z + \dim Y - \dim V \geq 0 .$$

Toute composante irréductible de  $R_L \cap Y$  non contenue dans  $Z \cap Y$  est donc de dimension au plus égale à :

$$\dim Z + \dim Y - \dim V ,$$

soit, puisque  $\dim R_L = \dim Z$  , toute composante irréductible de  $R_L \cap Y$  non contenue dans  $Z \cap Y$  est de dimension égale à :

$$\dim Z + \dim Y - \dim V .$$

Le 1°) en résulte donc.

Si de plus, l'hypothèse de 2°) est satisfaite, on conclut comme ci-dessus : pour  $x_I$  point fermé d'une composante irréductible  $I$  de  $Y \cap Z$  , régulier sur  $V$  , on choisit  $L$  dans l'ouvert de la grassmannienne dont les points satisfont à :

$$L \cap T_{V, x_I} = \emptyset ,$$

$$L \cap J(x_I, Z) = \emptyset .$$

§ 5. Démonstration de 3.3.

On prend  $C = J(L, Z)$  pour  $L$  choisi dans l'intersection des ouverts non vides de  $\text{Grass}(n, n-v-1)$  suivant :

l'ouvert 4.9.1, 1°) pour  $Y = F$ , ce qui assure a) et b) puisque  $\dim(F \cap Z) < \dim Z$  et  $\dim R_L = \dim Z$  si  $R_L$  non vide.;

l'ouvert 4.9.1, 2°) pour  $Y = Y_i$  pour chaque  $i$  successivement, ce qui démontre c).

§ 6. Questions de rationalité.

La proposition 1.2 est démontrée pour  $k$  algébriquement clos.

Supposons  $k$  non algébriquement clos. Si  $k$  est infini, il existe dans l'ouvert de  $\text{Grass}(n, n-v-1)$  sur une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ , un point  $L$  à coordonnées dans  $k$ , donc la construction effectuée ci-dessus démontre également 1.2 dans ce cas.

Si  $k$  est fini, on obtient aussi une extension finie  $k \rightarrow k_1$ , un cycle  $X_1 \sim Z_{k_1}$  tel que  $X_1 \cdot Y_{k_1}$  soit défini. Si  $p = [k_1 : k] > 1$ , on peut trouver un point  $L$  de  $\text{Grass}(n, n-v-1)$  rationnel sur une extension  $k_2$  de  $k$  de degré premier à  $p$  : en effet dans tout ouvert, non vide de  $\text{Grass}_k(n, n-v-1)$  il y a des points à coordonnées dans

$$\{ t \in \bar{k} \mid [k(t) : k] \text{ premier à } p \} .$$

On a donc un cycle  $X_2 \sim Z_{k_2}$  tel que  $X_2 \cdot Y_{k_2}$  soit défini.

Appliquant les  $k$ -automorphismes de  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) on trouve un cycle  $Z'_1$  tel que

$$Z'_1 \sim [k_1 : k] Z ,$$

$$Z'_1 \cdot Y \text{ défini.}$$

$$(\text{resp. } Z'_2 \sim [k_2 : k] Z ,$$

$$Z'_2 \cdot Y \text{ défini).}$$

Il existe des entiers  $a$  et  $b$  tels que :

I-14

$$a[k_1 : k] + b[k_2 : k] = 1 \quad ,$$

donc on a :

$$Z' = aZ'_1 + bZ'_2 \sim Z \quad ,$$

$Z' \cdot Y$  défini.

Ce qui démontre 1.2 dans ce cas.