

# *Astérisque*

ROGER MARLIN

**Comparaison de l'anneau de Chow et de  
l'anneau de Grothendieck**

*Astérisque*, tome 36-37 (1976), p. 229-240

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1976\\_\\_36-37\\_\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__229_0)

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COMPARAISON DE L'ANNEAU DE CHOW ET DE L'ANNEAU DE GROTHENDIECK

par Roger MARLIN

§ 0. Notations et préliminaires.

Soient :

 $\underline{k}$  un corps algébriquement clos,G un  $\underline{k}$ -groupe algébrique semi-simple simplement connexe (déployé),

B un groupe de Borel de G ,

T un tore maximal de B (donc de G ),

W le groupe de Weyl de G par rapport à T ( $W = \text{Norm}_G(T)/T$ ) .

Si X est une variété lisse et quasi-projective, soient :

A(X) son anneau de Chow,

K(X) son anneau de Grothendieck,

Gr<sub>top</sub>(X) l'anneau gradué associé à K(X) par la filtration topologique (co-dimension).0.1. Lemme fondamental.

Soient X et  $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$  des variétés telles que  $(X_i)_i$  soit une suite croissante de parties fermées de X , avec  $X_n = X$  ,  $u_i : X_i \hookrightarrow X$  et  $v_i : (X_i - X_{i-1}) \hookrightarrow X_i$  les morphismes d'injections. Soit, pour tout i ,  $S_i$  une partie de  $A(X_i)$  telle que  $v_i^*(S_i)$  engendre le  $\underline{Z}$ -module  $A(X_i - X_{i-1})$  . Si  $S = \bigcup_i u_{i*}(S_i)$  , alors S est une partie génératrice du  $\underline{Z}$ -module A(X) .

Démonstration.- (Pour  $i = 0$  on pose  $X_i - X_{i-1} = X_i$  , i.e.  $X_{-1} = \emptyset$ ) .

Si  $n = 0$  l'assertion est triviale. Nous procéderons à une démonstration par récurrence sur n .

Supposons donc  $n > 0$  , et l'assertion démontrée pour les valeurs strictement inférieures de l'indice. Considérons le système  $X_{n-1}$  ,  $(X_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  ,

$$u_i^! : X_i \hookrightarrow X_{n-1} , S' = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} u_{i*}^!(S_i) .$$

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que  $S'$  engendre le  $\underline{\mathbb{Z}}$ -module  $A(X_{n-1})$  .

Considérons la suite exacte :

$$A(X_{n-1}) \xrightarrow{(u_{n-1}^!)*} A(X_n) \xrightarrow{v_n^!} A(X_n - X_{n-1}) \longrightarrow 0 .$$

Comme  $v_n^!(S_n)$  engendre le  $\underline{\mathbb{Z}}$ -module  $A(X_n - X_{n-1})$  et que  $S'$  engendre  $A(X_{n-1})$  ,  $(u_{n-1}^!)* (S') \cup S_n$  engendre  $A(X_n)$  . Or ce système de générateurs n'est autre que  $S$  .

### § 1. Anneau de Chow de $G/B$ .

#### 1.1. Rappel. Décomposition cellulaire de Bruhat.

$G/B$  est la réunion disjointe de cellules de Bruhat ( $BwB/B$  ,  $w \in W$ ) , et chacune de ces cellules est isomorphe à l'espace affine de dimension  $l(w)$  (longueur de  $w$  dans  $W$ ) .

#### 1.2. LEMME.- Les seuls points de $G/B$ invariants par $T$ sont les classes modulo $B$ des éléments du normalisateur de $T$ ( $wB/B$ , $w \in W$ ) .

Démonstration.- Soit  $g$  un élément dont la classe modulo  $B$  est invariante par  $T$  . On a donc  $Tg \subset gB$  , soit  $g^{-1}Tg \subset B$  .

$g^{-1}Tg$  est donc un tore de  $B$ , il est donc conjugué à  $T$  dans  $B$  . En d'autres termes, il existe  $b$  dans  $B$  tel que :  $g^{-1}Tg = b^{-1}Tb$  , soit :  $bg^{-1}Tgb^{-1} = T$  , soit :  $gb^{-1} \in \text{Norm}_G(T)$  .

#### 1.3. Notations.

Soient :

$X_w$  l'adhérence de  $BwB/B$  ,

$[X_w]$  la classe (pour l'équivalence rationnelle) de  $X_w$  ,

$[X_e]$  la classe du point,

$w_0$  l'élément de longueur maximale de  $W$  ( $w_0 B w_0^{-1} \cap B = T$ ).

1.4. PROPOSITION [III].- Soient  $w$  et  $w'$  deux éléments de  $W$  tels que  $l(w) \leq l(w')$ , alors :

- (a)  $X_w \cap w_0 X_{w_0 w'} = \emptyset$ , si  $w \neq w'$ ,
- (b)  $X_w \cap w_0 X_{w_0 w} = wB/B$ ,
- (c)  $[X_w] \cdot [X_{w_0 w}] = \delta_{w, w'} [X_e]$ .

Démonstration.

(a) Supposons  $X_w \cap w_0 X_{w_0 w'} \neq \emptyset$ , et soit  $A$  une composante irréductible de cette intersection. Alors  $A$  est propre et stable par  $T$ , donc contient un point fixe par  $T$  d'après le théorème de Borel ; soit  $w''B/B$  ce point. On a alors :

$$w''B/B \in X_w \text{ et } w_0 w''B/B \in X_{w_0 w'} ,$$

donc  $X_{w''} \subset X_w$  et  $X_{w_0 w''} \subset X_{w_0 w'}$ ,

donc  $(l(w'') < l(w) \text{ ou } w'' = w) \text{ et } (l(w'') > l(w') \text{ ou } w'' = w')$ .

Vue l'hypothèse, on a alors  $w = w' = w''$ . D'où (a).

(b) Ce qui précède montre que  $A$  contient nécessairement  $wB/B$ . Pour prouver (b), il suffit de démontrer que  $X_w \cap w_0 X_{w_0 w}$  est réduit à  $wB/B$  au voisinage de ce point. Si  $n$  (resp.  $n_0$ ) est un représentant de  $w$  (resp.  $w_0$ ) dans  $\text{Norm}_G(T)$ , posons :  $B_w^u = n n_0^{-1} B n_0^{-1} n^{-1}$ . Le morphisme

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G/B \\ g &\longmapsto gwB/B \end{aligned}$$

induit des immersions ouvertes

$$B_w^u \hookrightarrow G/B, \quad B_w^u \cap B \hookrightarrow X_w, \quad B_w^u \cap w_0 B w_0 \hookrightarrow w_0 X_{w_0 w} .$$

Soit  $\varphi : (B_w^u \cap B) \times (B_w^u \cap w_0 B w_0) \longrightarrow B_w^u$   
 $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$

$\varphi$  étant un isomorphisme, ceci conclut la démonstration.

(Pour de plus amples détails sur les immersions et  $\varphi$  voir [II], exp. 13).

(c) Vus (a) et (b), il suffit de remarquer que  $[w_o X_w, ] = [X_w, ]$  puisque les opérations de  $G$  dans  $A(G/B)$  sont triviales.

Remarque.— Cette proposition montre qu'il suffit, dans ce cas particulier ( $l(w) \leq l(w')$ ), de faire "bouger" le cycle  $X_{w_o w}$ , en lui appliquant un élément de  $W(w_o)$  pour le mettre "en bonne position" par rapport à  $X_w$ . Ceci semble malheureusement faux pour  $l(w) > l(w')$ . Il n'y a en fait aucune formule donnant en général le produit de deux classes de cycles  $[X_w]$  et  $[X_{w'}]$ .

1.5. PROPOSITION.— Si on pose  $Z_w = [X_{w_o w}]$ ,  $(Z_w)_{w \in W}$  forme une base du  $\mathbb{Z}$ -module libre  $A(G/B)$ .

Démonstration.

$*(Z_w)_{w \in W}$  est une partie génératrice.

Il suffit de remarquer que  $A(A_i) \simeq \mathbb{Z}$ , une base de  $A(A_i)$  étant constituée par  $[A_i]$ , et d'appliquer le lemme fondamental, après avoir muni  $W$  d'une relation d'ordre total compatible avec la relation d'ordre partiel donnée par la longueur, avec  $X_{(w)} = \bigcup_{w' \leq w} Bw'B/B$  (les  $X_{(w)}$  ainsi définis sont bien fermés puisque l'adhérence d'une cellule de Bruhat est constituée de cette cellule et de cellule plus petites).

$*(Z_w)_{w \in W}$  est une partie libre.

Soit  $\alpha Z_w = \sum_{w_i > w} \beta_i Z_{w_i}$  avec  $\alpha \neq 0$ , alors :

$$\alpha Z_{w_o} = \alpha Z_w Z_{w_o w} = \sum_{w_i > w} \beta_i Z_{w_i} Z_{w_o w} = 0$$

(d'après 1.4.c), donc  $\alpha = 0$ , contradiction.

1.6. Homomorphisme caractéristique de la fibration  $G \rightarrow G/B$ .

1.6.1. Fibré vectoriel associé à une représentation de  $B$ .

DÉFINITIONS.— Soit  $\rho$  une représentation de  $B$  dans  $GL(V)$ .

Soit  $G \times^B V$  le quotient de  $G \times V$  par la relation d'équivalence  $(g, v) \sim (gb, \rho(b)^{-1}v)$ .

$G \times^B V$  sera le fibré vectoriel de base  $G/B$  associé à  $\rho$ .

En particulier à chaque caractère  $\lambda$  de  $B$  on associe un fibré en droite de base  $G/B$ .

Si  $\chi(B)$  est le groupe des caractères de  $B$ , soit  $c_1 : \chi(B) \rightarrow A^1(G/B)$  l'homomorphisme qui, à tout caractère  $\lambda$  de  $B$ , associe la première classe de Chern du fibré en droite associé à  $\lambda$ .

Si  $S(\chi(B))$  désigne l'algèbre symétrique engendrée par  $\chi(B)$ , soit  $c$  l'homomorphisme d'algèbre graduée qui prolonge  $c_1$

$$c : S(\chi(B)) \longrightarrow \Lambda(G/B)$$

$c$  sera appelé l'homomorphisme caractéristique de la fibration  $G \rightarrow G/B$ .

1.6.2. PROPOSITION ([I]).— Soient  $w \in W$  et  $\lambda \in \chi(B)$ . Alors dans  $\Lambda(G/B)$  on a :

$$c(\lambda)Z_w = \sum_{\alpha \in R_+} \langle \alpha, \lambda \rangle Z_{wS_\alpha} \\ l(wS_\alpha) = l(w) + 1$$

Où  $R_+$  désigne le système de racines positives associé à  $B$ ,  $S_\alpha$  la symétrie associée à  $\alpha$ .

COROLLAIRE.— Soient  $\alpha \in S$  et  $w \in W$ . Alors dans  $\Lambda(G/B)$  on a :

$$Z_S Z_w = \sum_{\beta \in R_+} \langle \beta, \omega_\alpha \rangle Z_{wS_\beta} \\ l(wS_\beta) = l(w) + 1$$

Où  $S$  désigne le système des racines simples,  $\omega_\alpha$  le poids fondamental associé à  $\alpha$ .

Démonstration.— Cf. [III] 4.4, prop. 2.

1.6.3. Remarque.— L'homomorphisme canonique de fibration est surjectif si et seulement si  $G$  est sans torsion, c'est-à-dire si  $G$  est isomorphe à un produit de groupes  $Sl(n)$  et  $Sp(m)$ .

§ 2. Anneau de Chow de  $G$  .

2.1. PROPOSITION ([V]).- Si  $\pi$  est l'homomorphisme de projection  $G \rightarrow G/B$  ,  $\pi^* : A(G/B) \rightarrow A(G)$  est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par l'image par  $c$  de  $S^+(\chi(B))$  .

COROLLAIRE.-  $A(G)$  est réduit à  $\mathbb{Z}$  si et seulement si  $G$  est isomorphe à un produit de  $Sl(n)$  et  $Sp(m)$  .

Démonstration.- Une démonstration complète se trouve dans [V] , mais on peut aisément voir que le noyau de  $\pi^*$  contient cet idéal. En effet un fibré en droite sur  $G/B$  associé à un caractère de  $B$  se relève en un fibré trivial sur  $G$  .

§ 3. Anneau de Grothendieck de  $G/B$  .

3.1. DÉFINITIONS.- Si  $X$  est une sous-variété irréductible de  $G/B$  , soit  $\gamma(X)$  la classe dans  $K(G/B)$  de  $\mathcal{O}_X$  considéré comme faisceau algébrique cohérent sur  $G/B$  . Par linéarité  $\gamma$  se prolonge aux cycles sur  $G/B$  .

Soit  $K^i(G/B)$  le sous-groupe de  $K(G/B)$  engendré par les classes des faisceaux algébriques cohérents dont la codimension du support est supérieure ou égale à  $i$  .

3.2. Rappel.

Le morphisme  $\gamma$  vérifie alors les propriétés suivantes :

3.2.1. Le groupe  $K^i(G/B)$  est engendré par les  $\gamma(X)$  , où  $X$  parcourt l'ensemble des sous-variétés de  $G/B$  de codimension supérieure ou égale à  $i$  .

3.2.2. Si deux cycles  $X$  et  $X'$  , homogènes de codimension  $i$  , sont rationnellement équivalents, alors dans  $K(G/B)$  on a :

$$\gamma(X) = \gamma(X') \text{ mod } K^{i+1}(G/B) .$$

3.2.3. Si deux cycles  $X$  et  $X'$  , homogènes de codimensions respectives  $i$  et  $j$  , sont "en bonne position", alors on a :

$$\gamma(X) \cdot \gamma(X') \equiv \gamma(X \cdot X') \pmod{K^{i+j+1}(G/B)} .$$

3.2.4. D'après ce qui précède,  $\gamma$  induit un homomorphisme surjectif d'anneaux gradués

$$\varphi : \Lambda(G/B) \longrightarrow \text{Gr}_{\text{top}}(G/B) .$$

3.2.5. Le noyau de  $\varphi$  est de torsion. Ce dernier point résulte du fait que si  $\psi$  est l'homomorphisme classe de Chern

$$\psi : \text{Gr}_{\text{top}}(G/B) \longrightarrow \Lambda(G/B)$$

on a alors :

$$\begin{cases} \psi \circ \varphi(x) = (-1)^{i-1} (i-1)! x \pmod{\text{torsion}}, & x \in \Lambda^i(G/B) , \\ \varphi \circ \psi(x) = (-1)^{i-1} (i-1)! x \pmod{\text{torsion}}, & x \in \text{Gr}_{\text{top}}^i(G/B) . \end{cases}$$

Si  $x$  est un sous-schéma fermé irréductible lisse de  $G/B$  la première formule n'est autre que Riemann-Roch pour l'inclusion de  $x$  dans  $G/B$ , la seconde se déduit de la première puisque  $\varphi$  est surjective.

3.3. PROPOSITION ([III]).- Soient  $w$  et  $w'$  des éléments de  $W$  tels que  $l(w) + l(w') \leq \dim(G/B)$ .

Dans l'anneau  $K(G/B)$ , on a alors :

(a)  $\gamma(X_w) \cdot \gamma(X_{w'}) = \delta_{w, w'} \gamma(X_e)$  ,

(b)  $\chi(X_w, O_{X_{w'}}) = \delta_{w, w'}$  ,

(c)  $K(G/B)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $(\gamma(X_w))_{w \in W}$ . Les formes linéaires  $(u \longmapsto \chi(X_w, u))_{w \in W}$  forment une base du  $\mathbb{Z}$ -module dual.

Démonstration.- Cela résulte des propositions 1.4 et 1.5 et de la partie 3.2. En ce qui concerne (c), (b) montre que la matrice  $(\chi(X_w, \gamma(X_{w'})))_{w, w' \in W}$  est "triangulaire", avec des 1 sur la diagonale.

COROLLAIRE.-  $\varphi$  est un isomorphisme d'anneaux gradués de  $\Lambda(G/B)$  sur  $\text{Gr}_{\text{top}}(G/B)$ .

Démonstration.- Cela résulte immédiatement du fait que  $\Lambda(G/B)$  est sans torsion et de 3.2.5



3.4. Homomorphisme caractéristique.

3.4.1. La construction faite dans 1.6.1 permet d'associer à toute représentation de  $B$  un fibré vectoriel  $G \times^B V$  de base  $C/B$ , auquel on peut faire correspondre le faisceau localement libre de ses sections. Si  $Z(\chi(B))$  désigne l'algèbre du groupe  $\chi(B)$ ,  $Z(\chi(B))$  s'identifie à  $R(B)$ , l'algèbre des représentations de  $B$ .

En composant le tout, on obtient l'homomorphisme caractéristique  $c_K$  :

$$c_K : Z(\chi(B)) \longrightarrow R(B) \longrightarrow K(G/B) .$$

3.4.2. PROPOSITION ([III]).- Il existe une base  $(a_w)_{w \in W}$  du  $\mathbb{Z}$ -module  $K(G/B)$  telle que l'homomorphisme caractéristique soit donné par :

$$c_K(e^\lambda) = \sum_{w \in W} \chi(X_w, L(\lambda)) a_w ,$$

où  $L(\lambda)$  désigne le module inversible associé à  $\lambda$ , et  $e^\lambda$  l'élément de la base du  $\mathbb{Z}$ -module  $Z(\chi(B))$  associé à  $\lambda$ .

Démonstration.- Ceci résulte immédiatement du fait que les formes linéaires  $(u \mapsto \chi(X_w, u))_{w \in W}$  constituent une base du  $\mathbb{Z}$ -module dual de  $K(G/B)$ .

3.4.3. Remarque ([III]).- On peut définir des opérateurs  $L_w$ ,  $w \in W$ , de l'anneau  $Z(\chi(B))$  jouissant des propriétés suivantes :

- si  $w$  et  $w'$  appartiennent à  $W$  et sont tels que  $l(w) + l(w') = l(ww')$ , alors :  $L_w L_{w'} = L_{ww'}$ .

- si  $\alpha$  est une racine simple,  $S_\alpha$  la symétrie correspondante,  $\lambda$  un caractère :

$$L_S L_S = L_S ,$$

$$L_S(e^\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{S_\alpha(\lambda)}}{1 - e^\alpha} .$$

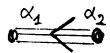
Si  $\rho$  désigne la demi-somme des racines positives du système,  $e$  l'augmentation naturelle de  $Z(\chi(G/B))$  ( $e^\lambda \mapsto 1$ ). On a alors :

$$\chi(X_w, L(\lambda)) = e L_w(e^{\lambda - \rho}) .$$

§ 4. Anneau de Grothendieck de G .

4.1. PROPOSITION ([V]).- Si  $\pi$  est l'homomorphisme de projection  $\pi : G - G/B$  ,  $\pi^* : K(G/B) \rightarrow K(G)$  est surjectif et son noyau est l'idéal engendré par l'image par  $c_K$  de  $Z^+(X(B))$  .

Démonstration.- Cette proposition est l'analogue de la proposition 2.1. Sa démonstration s'obtient de manière identique.

§ 5. G groupe algébrique semi-simple déployé de type  $G_2$  . 

5.1. Anneaux de Chow.

5.1.1. LEMME.- Soit G un groupe algébrique semi-simple déployé de type  $G_2$  .

On a :

$$\begin{aligned} A^0(G/B) &\sim \mathbb{Z} , \\ A^i(G/B) &\sim \mathbb{Z}^2 , \quad 1 \leq i \leq 5 , \\ A^6(G/B) &\sim \mathbb{Z} , \\ A^i(G/B) &= \{0\} , \quad i > 6 . \end{aligned}$$

Démonstration.- Claire d'après 1.5 et la structure du groupe de Weyl du système  $G_2$  .

5.1.2. PROPOSITION.- Soit  $I$  l'idéal de  $A(G/B)$  engendré par l'image de l'homomorphisme caractéristique,  $I = \bigoplus_{i>0} I^i$  . Soient  $Z_{w_1}$  et  $Z_{w_2}$  les deux éléments de base de  $A^3(G/B)$  . On a alors :

$$\begin{aligned} I^i &= A^i(G/B) , \quad i > 0 , \quad i \neq 3 , \\ I^3 &\text{ admet pour base } (Z_{w_1} + Z_{w_2}, Z_{w_1} - Z_{w_2}) . \end{aligned}$$

Démonstration.- Ce résultat est obtenu dans [VI], § 8 , en utilisant la formule de Chevalley 1.6.2.

COROLLAIRE 1.- L'anneau de Chow de  $G/B$  n'est pas engendré par les classes des modules inversibles.

COROLLAIRE 2.- Dans l'anneau de Chow de G , on a :

$$\begin{aligned} \Lambda^0(G) &\sim \underline{\mathbb{Z}} , \\ \Lambda^3(G) &\sim \underline{\mathbb{F}_2} , \\ \Lambda^i(G) &= \{0\} , \quad i \notin \{0,3\} . \end{aligned}$$

5.2. Anneau de Grothendieck.

5.2.1. PROPOSITION.- L'homomorphisme caractéristique  $c_K$  est surjectif.

COROLLAIRE 1.- L'anneau de Grothendieck de  $G/B$  est engendré par les classes des modules inversibles.

COROLLAIRE 2.-  $K(G)$ , et donc  $Gr_{top}(G)$ , sont tous deux réduits à  $\underline{\mathbb{Z}}$ .

Démonstration.- D'après 3.4.2, on a :  $c_K(e^\lambda) = \sum_{w \in W} \chi(X_w, L(\lambda)) a_w$ . Il suffit donc de trouver une famille de caractères  $(\lambda_w)_{w \in W}$  telle que le déterminant de la matrice de terme général :  $\alpha_{w,w'} = \chi(X_w, L(\lambda_{w'}))$ , (matrice carrée d'ordre  $\# W$ ) soit inversible (dans  $\underline{\mathbb{Z}}$ ).

La famille suivante convient :

$$\{5\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_1, -\alpha_2, -3\alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2, 0\} .$$

Les coefficients  $\alpha_{w,w'}$ , étant calculés en utilisant les opérateurs  $L_w$  de la remarque 3.4.3 la matrice obtenue est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 & -3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -5 & 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -6 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -6 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant à la 5eme colonne la 7eme et la 12eme,  
à la 6eme colonne la 8eme et la 12eme,

En ajoutant à la 7eme colonne la 12eme,  
à la 9eme colonne sept fois la 12eme,  
on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 0 & 3 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 10 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. Les corollaires s'en déduisent immédiatement.

5.3. Conclusions.

Si  $G$  est un groupe algébrique semi-simple déployé de type  $G_2$ ,  $B$  un sous-groupe de Borel,  $A(G/B)$  et  $Gr_{top}(G/B)$  sont isomorphes, mais il n'existe pas d'isomorphisme entre ces anneaux et  $K(G/B)$  compatible avec les classes de Chern (ce dernier est engendré par les classes des modules inversibles, les autres non).  $K(G)$  et  $Gr_{top}(G)$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ , mais  $\Lambda(G)$  (qui contient un sous-groupe de torsion) ne leur est pas isomorphe. Néanmoins, dans les deux cas, les trois anneaux sont isomorphes une fois tensorisés par  $\mathbb{Q}$ .

Cette situation se retrouvera avec tous les groupes algébriques semi-simples simplement connexes déployés non isomorphes à un produit de  $Sl(n)$  et de  $Sp(m)$  (i.e. de type  $B_n$ ,  $n \geq 3$ ;  $D_n$ ,  $n \geq 4$ ;  $E_6$ ;  $E_7$ ;  $E_8$ ;  $F_4$ ;  $G_2$ ). Des détails sur les anneaux de Chow de tels groupes se trouvent dans [VI]. Le fait que  $K(G/B)$  est engendré par les classes des modules inversibles a été obtenu, par voie topologique, par Hodgkin dans sa thèse (pour  $\underline{k} = \mathbb{C}$ ), ou plus généralement dans [VII].

BIBLIOGRAPHIE

- [I] C. CHEVALLEY - Sur les décompositions cellulaires des espaces  $G/B$ ,  
(Manuscrit non publié, circa 1958).
- [II] C. CHEVALLEY - Classification des groupes de Lie algébriques,  
multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris 1958.
- [III] M. DEMAZURE - Désingularisation des variétés de Schubert généralisées,  
Annales Scientifiques de l'E.N.S., 4e série, t. 7, fasc. 1, 1974.
- [IV] A. GROTHENDIECK - Exposés 4 et 5 dans "Anneaux de Chow et applications",  
Séminaire C. Chevalley, multigraphié, Secrétariat Mathématique,  
Paris, 1958.
- [V] A. GROTHENDIECK - Exposé 14 dans S.G.A. 6, Lectures Notes in Mathematics  
n°225, Springer Verlag 1971.
- [VI] R. MARLIN - Anneaux de Chow des groupes algébriques  $SO(n)$ ,  $Spin(n)$ ,  
 $G_2$  et  $F_4$ , Université de Paris XI, n°95-7419.
- [VII] R. MARLIN - Anneau de Grothendieck des variétés de drapeaux, à paraître  
Bull. Soc. Math.