

# *Astérisque*

A. DOUADY

## **L'espace de Teichmüller**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 127-137

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__127_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

par A. DOUADY

(Rédaction de F. LAUDENBACH)

Etant donnée une surface compacte  $M$  dont la caractéristique d'Euler  $\chi(M)$  est négative, on considère l'espace  $\mathfrak{H}$  des métriques de courbure  $-1$  sur  $M$ , qui rendent le bord géodésique ; il est non vide et est muni de la topologie  $C^\infty$  de tous les champs de tenseurs contravariants. Le groupe  $\text{Diff}^0(M)$  des difféomorphismes de  $M$ , isotopes à l'identité, équipé de la topologie  $C^\infty$ , agit à gauche sur  $\mathfrak{H}$  par la formule générale déduite de la naturalité des champs de tenseurs contravariants  $m \in \mathfrak{H}$ ,  $\varphi \in \text{Diff}^0(M) \rightarrow \varphi^* m \in \mathfrak{H}$ . L'espace quotient  $\mathfrak{T} = \mathfrak{H}/\text{Diff}^0(M)$  est l'espace de Teichmüller de  $M$  ; lorsque  $M$  est orientable, cette définition coïncide avec la définition classique comme espace des structures complexes à isotopie près, via le théorème d'uniformisation [ 6 ]. Il est connu que cet espace est homéomorphe à une "cellule" [ 4 ] ; Earle et Eells ont montré que  $\mathfrak{H}$  est l'espace total d'un fibré principal au-dessus de l'espace de Teichmüller [ 3 ].

Le programme ici est d'établir un paramétrage de l'espace de Teichmüller qui ne dépende que des longueurs des géodésiques fermées simples.

On rappelle que  $\mathcal{J}$  désigne l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples non homotopes à zéro sur  $M$ . Si  $m$  est une métrique hyperbolique, pour  $\alpha \in \mathcal{J}$ ,  $\ell(m, \alpha)$  est la longueur de l'unique géodésique qui se trouve dans la classe d'isotopie de  $\alpha$  ; on en déduit une application :

$$\ell_* : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$$

par la formule  $\langle \ell_*(m), \alpha \rangle = \ell(m, \alpha)$ .

Proposition 1. Pour  $\alpha \in \mathcal{A}$  fixé, l'application qui, à  $m \in \mathbb{H}$ , associe la  $m$ -géodésique de  $\alpha$ , est continue pour la topologie  $C^\infty$ .

Corollaire. L'application  $\ell_{\star}$  est continue (évident).

Démonstration. Une façon de la faire est d'utiliser les propriétés de convexité de la fonction "déplacement" (théorème de Bishop-O'Neill [1] ; voir l'exposé de Bourguignon dans [2]). Voici une autre démonstration.

On note  $\Gamma$  l'ensemble des couples  $(m, \gamma)$  où  $m$  est une métrique hyperbolique et où  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  paramètre à vitesse constante la  $m$ -géodésique de  $\alpha$ . On munit  $\Gamma$  de la topologie induite par la topologie  $C^\infty$  de l'espace produit

$$\mathbb{H} \times C^\infty(S^1, M) .$$

On considère la projection  $p : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}$  sur le premier facteur. On veut montrer que  $p$  est propre.

Si on note  $TM$  la variété des vecteurs tangents à  $M$ , on regarde dans  $\mathbb{H} \times TM$  l'ensemble

$$C = \{ (m, v) \mid \forall t, \exp_m(t+1)v = \exp_m tv \text{ et la courbe fermée } t \in [0, 1] \rightarrow \exp_m tv \text{ est dans la classe } \alpha \} .$$

Pour la topologie produit de  $\mathbb{H} \times TM$ ,  $C$  est un fermé. Si  $S^1$  est obtenu en identifiant les extrémités de  $[0, 1]$ , on a une application évidente  $C \rightarrow \Gamma$ , qui est surjective ; d'après les théorèmes sur les équations différentielles, elle est continue. La propriété de  $p$  résulte donc de la propriété de la projection  $q : C \rightarrow \mathbb{H}$ , que nous allons prouver.

On sait que  $m \in \mathbb{H} \mapsto \ell(m, \alpha)$  est une fonction semi-continue supérieurement. Donc, si  $m$  appartient à un compact  $K$ , l'ensemble  $\{ \ell(m, \alpha) \mid m \in K \}$  est borné. Soit  $(m, v) \in q^{-1}(K)$  ; la quantité  $\sqrt{m(v, v)} = \ell(m, \alpha)$  est donc bornée. Soit  $m_0 \in K$  ; il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $w \in TM$  et tout  $m \in K$ , on ait :

$$m_0(w, w) \leq \lambda m(w, w) .$$

Donc, si  $(m, v) \in q^{-1}(K)$ ,  $m_0(v, v)$  est borné. Finalement  $q^{-1}(K)$  est compact parce qu'il est fermé dans un produit de compacts.

Le groupe  $O(2)$  des rotations agit naturellement sur  $\Gamma$  : pour  $r \in O(2)$ ,  $(m, \gamma) \star r = (m, \gamma \circ r)$ . Le quotient est l'espace des  $m$ -géodésiques de  $\alpha$ ,  $m \in \mathbb{H}$ . En courbure négative,  $p$  induit une bijection  $\Gamma/O(2) \rightarrow \mathbb{H}$ , qui est continue et propre d'après ce qui précède. Comme les espaces considérés sont métrisables, la bijection

réciproque est continue.  $\square$

A partir de maintenant, on suppose, pour simplifier l'exposé, que  $M$  est sans bord ; on note  $g$  son genre. On se fixe une décomposition  $\mathcal{K}$  de  $M$  en pantalons  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, 2g-2$ , limités par des courbes  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, 3g-3$ . Chaque pantalon est donné avec un paramétrage sur un modèle et chaque courbe  $K_j$  est donnée avec une orientation. On a une application continue :

$$L : \mathcal{T} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$$

définie par  $L(m) = (\ell(m, K_i) ; i = 1, \dots, 3g-3)$ , où  $m$  est une métrique hyperbolique rendant les  $K_i$  géodésiques (métrique adaptée à la décomposition).

Remarque. A partir de maintenant,  $\mathcal{H}$  désigne l'espace des métriques adaptées à  $\mathcal{K}$ . On voit facilement que  $\mathcal{T}$  est en bijection avec le quotient de  $\mathcal{H}$  par  $\text{Diff}(M, \mathcal{K}) \cap \text{Diff}^0(M)$ . Pour voir que la topologie est la même, on utilise la proposition 1 et le fait que l'action de  $\text{Diff} M$  sur l'espace des courbes simples admet des sections locales [5].

Le "twist" le long des courbes  $K_i$  définit une action continue  $\theta$  de  $\mathbb{R}^{3g-3}$  sur  $\mathcal{T}$ . Plus précisément, soit  $K_i \times [0, 1]$  un collier de  $K_i = K_i \times \{0\}$ , donné une fois pour toutes ; tous les colliers sont supposés deux à deux disjoints. Etant donné une métrique hyperbolique adaptée  $m$  et un nombre  $\alpha$ , il existe un difféomorphisme  $\varphi_i(m, \alpha)$  du collier  $K_i \times [0, 1]$  avec les propriétés suivantes :

- 1)  $\varphi_i(m, \alpha)$  est l'identité au voisinage de  $K_i \times \{1\}$  ;
- 2)  $\varphi_i(m, \alpha)$  est une isométrie de  $m$  au voisinage de  $K_i \times \{0\}$  ;
- 3) le relèvement de  $\varphi_i(m, \alpha)$  au revêtement universel  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , qui est l'identité sur  $\mathbb{R} \times \{1\}$ , est une translation de longueur  $\alpha \ell(m, K_i)$  sur  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , dans le sens indiqué par le signe de  $\alpha$  (le revêtement universel étant muni de la métrique relevée).

La métrique tordue  $\theta_i(m, \alpha)$  est définie par  $\theta_i(m, \alpha) = \varphi_i^*(m, \alpha) m$  en tout point du collier  $K_i \times [0, 1]$  et par  $\theta_i(m, \alpha) = m$  ailleurs.

Pour  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$ , on note  $\theta(m, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3})$  la métrique définie par  $\theta_1(m, \alpha_1)$  dans  $K_1 \times [0, 1]$ , ..., par  $\theta_{3g-3}(m, \alpha_{3g-3})$  dans  $K_{3g-3} \times [0, 1]$  et par  $m$  ailleurs. Comme métrique adaptée, sa classe d'isotopie est bien déterminée.

Remarques. 1) D'après la classification des métriques sur le pantalon (exposé 3),

les orbites de l'action  $\theta$  coïncident exactement avec les fibres de  $L$ . Le corollaire de la proposition 2 impliquera que cette action est libre.

2) Le twist de Dehn  $\rho$  le long de  $K_i$ , qui est un difféomorphisme global de la surface, à support dans un collier de  $K_i$ , est une isométrie (à isotopie près) de la métrique  $\theta_i(m, 1)$  sur  $m$ . On a donc, pour toute courbe  $K'$  :

$$\ell(\theta_i(m, 1), [K']) = \ell(m, \rho([K'])).$$

Soient  $R$  et  $R'$  les deux pantalons adjacents à  $K_i$ ; disons que  $R$  contient le collier  $K_i \times [0, 1]$ . Soit  $K'_i$  une courbe simple de  $R \cup R'$ , coupant  $K_i$  en deux points essentiels ( $K'_i$  n'est pas isotope à une courbe disjointe de  $K_i$ ) - comparer avec IV.5 (exposé 6). On note  $K''_i$  la courbe de  $R \cup R'$  obtenue à partir de  $K'_i$  par un twist le long de  $K_i$  :  $\rho(K'_i) = K''_i$ .

Proposition 2. La longueur  $\ell(\theta_i(m, \alpha), [K'_i])$  est une fonction strictement convexe de  $\alpha$ , ayant un minimum.

Corollaire. 1° La métrique  $m_0$  étant donnée, il existe une classe d'isotopie  $\gamma_i$  dans  $R \cup R'$ , telle que la fonction

$$\alpha \mapsto \ell(\theta_i(m_0, \alpha), \gamma_i)$$

soit strictement croissante pour  $\alpha > 0$ .

2° La longueur  $\ell(\theta_i(m, \alpha), [K'_i])$  tend uniformément vers  $+\infty$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  et que  $m$  reste dans un compact.

Preuve du corollaire. 1° Disons que  $\ell(\theta_i(m, \alpha), [K'_i])$  est croissante à partir de  $\alpha = k$ , où  $k$  est un entier. On prend alors  $\gamma_i = \rho^k([K'_i])$  et on applique le 2) de la remarque ci-dessus.

2° C'est une propriété générale des familles de fonctions strictement convexes à minimum d'une variable réelle, dépendant continûment d'un paramètre (topologie compacte ouverte). Soit  $f_\lambda(x)$  une telle famille et soit  $x = m(\lambda)$  le point où se réalise le minimum. Alors  $m(\lambda)$  est une fonction continue. En effet,  $\epsilon$  étant donné, si  $\lambda$  est assez voisin de  $\lambda_0$ , on a :

$$f_\lambda(m(\lambda_0)) < \inf [f_\lambda(m_{\lambda_0} - \epsilon), f_\lambda(m_{\lambda_0} + \epsilon)] ;$$

donc  $m(\lambda)$  appartient à  $]m(\lambda_0) - \epsilon, m(\lambda_0) + \epsilon[$ .

Ceci étant, soit  $x_0 > m(\lambda_0)$  et soit  $K$  compris entre  $f_{\lambda_0}(m(\lambda_0))$  et  $f_{\lambda_0}(x_0)$ . Alors si  $\lambda$  est assez voisin de  $\lambda_0$ , on a  $f_\lambda(x_0) > K$  et  $f_\lambda$  est strictement croissante sur  $[x_0, +\infty[$ ; donc  $f_\lambda([x_0, +\infty[) \subset ]K, +\infty[$ .  $\square$

Démonstration de la proposition 2.

Lemme 1. Soient  $\gamma$  une droite du demi-plan de Poincaré et  $\tau$  une isométrie laissant  $\gamma$  invariante. Soient  $x$  un point de  $\gamma$  et  $y$  un point hors de  $\gamma$ ; alors

$$d(x, \tau x) < d(y, \tau y)$$

où  $d$  désigne la distance hyperbolique.

Preuve.

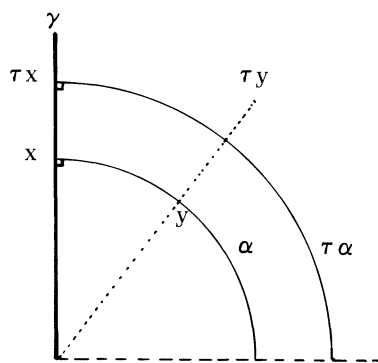


Figure 1

On peut prendre pour  $x$  le pied de la perpendiculaire  $\alpha$  issue de  $y$  sur  $\gamma$ . Donc  $\gamma$  est l'unique perpendiculaire commune à  $\alpha$  et  $\tau\alpha$ . D'où l'inégalité.  $\square$

Lemme 2. Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux droites ne se coupant pas dans l'espace hyperbolique. Alors la fonction  $d(x, y)$ ,  $x \in \gamma_1$ ,  $y \in \gamma_2$ , est strictement convexe.

Preuve. Soient  $x, x'$  (resp.  $y, y'$ ) deux points de  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ); on ne perd pas de généralité en supposant  $x \neq x'$ . Soient  $i$  le milieu de  $\widehat{xx'}$ ,  $j$  celui de  $\widehat{yy'}$ ,  $\delta$  la géodésique  $\widehat{ij}$ . On note  $\sigma_i$  (resp.  $\sigma_j$ ) la symétrie par rapport à  $i$  (resp.  $j$ );  $\sigma_j \sigma_i$  est une isométrie que laisse  $\delta$  invariante. Soient  $z = \sigma_j \sigma_i(x)$ ,  $z' = \sigma_j \sigma_i(x')$ ,  $k = \sigma_j \sigma_i(i)$ . Donc  $\sigma_j$  envoie  $x$  en  $z'$  et  $y$  en  $y'$ . D'où

$$d(x, y) = d(y', z') .$$

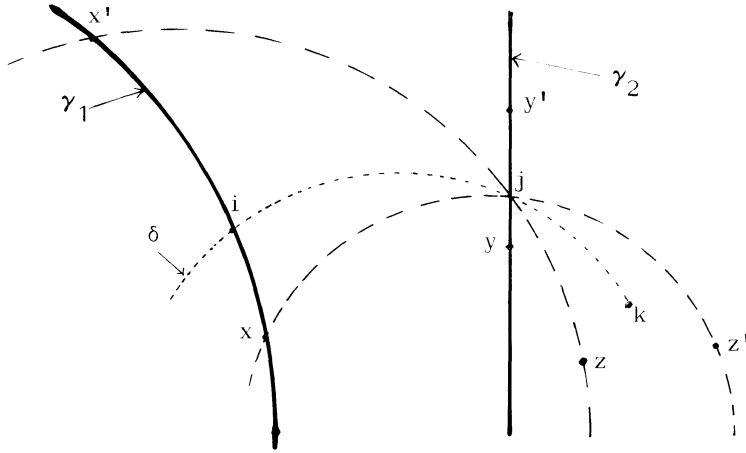


Figure 2

D'autre part, par l'inégalité du triangle, on a :

$$d(x', z') \leq d(x', y') + d(y', z') .$$

Par le lemme 1, on a :

$$2d(i, j) = d(i, k) < d(x', z') .$$

(Noter que  $\gamma_1$  ne coupant pas  $\gamma_2$ , le point  $x'$  n'est pas sur  $\delta$ .)

Finalement, on obtient l'inégalité de convexité :

$$2d(i, j) < d(x, y) + d(x', y') . \quad \square$$

Fin de la démonstration. La surface étant munie de la métrique  $m$  et son revêtement universel métrique étant identifié à l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , il existe un élément  $\tau$  de  $\pi_1(M, *)$  qui agit comme isométrie de  $\mathbb{H}^2$  laissant invariante une droite  $\delta$ , qui relève la géodésique  $K_i^1$ . Soit  $x$  un point de  $\delta$ , se projetant sur un point de  $K_i^1 \cap K_i$ ; on note  $\tilde{K}^1$  le relèvement de  $K_i$  par  $x$  et  $\tilde{K}^3$  celui par  $\tau x$ . Le segment  $(x, \tau x)$  coupe exactement un autre relèvement  $\tilde{K}^2$  de  $K_i$  en un point  $y$ . On a porté sur la figure 3 les orientations dont sont munis ces trois relèvements.

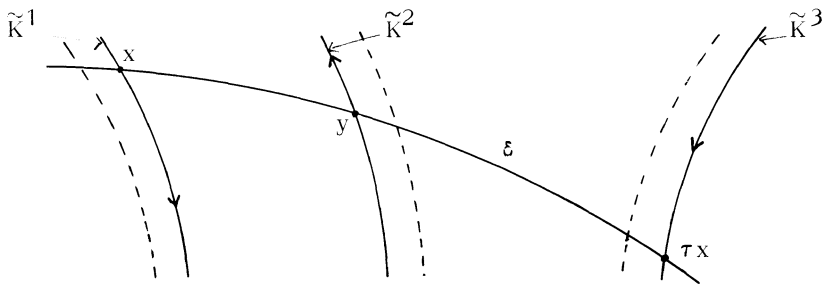


Figure 3

Si on tord la métrique d'un "angle  $\alpha$ " dans les colliers indiqués sur la figure, le relèvement de la  $\theta_i(m, \alpha)$ -géodésique de  $[K_i^1]$  coupe  $\tilde{K}^1$  en un point  $x'$  et  $\tilde{K}^2$  en  $y'$ ; c'est une droite de  $x'$  à  $y'$ , avec la métrique du plan hyperbolique; mais de  $y'$  à  $\tau x'$ , sa longueur est la distance hyperbolique  $d(y' + \alpha, \tau x' + \alpha)$ ; dans cette formule  $+$  désigne la translation sur les géodésiques  $\tilde{K}^2$  et  $\tilde{K}^3$ . Finalement, on a :

$$\varrho(\theta_i(m, \alpha), [K_i^1]) = \inf_{x \in \tilde{K}^1, y \in \tilde{K}^2} (d(x, y) + d(y + \alpha, \tau x + \alpha)) .$$

On va montrer que  $f(x, y, \alpha) = d(x, y) + d(y + \alpha, \tau x + \alpha)$  est une fonction propre et strictement convexe. Pour cela, on utilise le fait  $d(x, y)$  est propre, parce que les droites sur lesquelles se déplacent les points ont une perpendiculaire commune (à distance finie), et qu'elle est strictement convexe d'après le lemme 2.

Montrons la propriété de  $f$ . Soit  $(x_n, y_n, \alpha_n) \rightarrow \infty$ ; si  $(x_n, y_n) \rightarrow \infty$ , alors  $d(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$ , donc  $f(x_n, y_n, \alpha_n) \rightarrow +\infty$ . Si  $(x_n, y_n)$  reste dans un compact, alors  $\alpha_n \rightarrow \infty$  et  $(y_n + \alpha_n, \tau x_n + \alpha_n)$  tend vers  $\infty$ , donc  $d(y_n + \alpha_n, \tau x_n + \alpha_n)$  tend vers  $+\infty$ .

On vérifie tout de suite que  $f$  est strictement convexe.

Pour  $\alpha$  fixé, la fonction  $f(x, y, \alpha)$  a un minimum  $g(\alpha)$  à cause de la propriété de  $f$ . La convexité de  $f$  entraîne celle de  $g$ ; comme  $g(\alpha)$  est une valeur atteinte par  $f(x, y, \alpha)$ , on vérifie que  $g$  est strictement convexe.

La fonction  $f$  a un minimum absolu ( $f$  est propre et minorée); c'est le minimum de  $g$ .  $\square$

Proposition 3. L'application  $L : \mathcal{T} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$  est une fibration principale de groupe  $\mathbb{R}^{3g-3}$  agissant via  $\theta$ .

Corollaire. L'espace de Teichmüller d'une surface fermée de genre  $g$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6}$ .

Démonstration. Le point important est de montrer qu'il existe des sections locales pour  $L$ . On sait d'après le théorème 5 de l'exposé 3 que, pour le pantalon-modèle  $P^2$ , l'application

$$\mathbb{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 ,$$

qui, à une métrique adaptée au bord, associe les trois longueurs du bord, admet des sections locales au niveau des métriques.

On sait que pour recoller deux métriques hyperboliques le long d'une géodésique



il n'y a qu'à spécifier une isométrie de la géodésique de recollement. Or, si on a une métrique sur  $P^2$  et si on considère une courbe  $C$  du bord, on a un unique arc géodésique sans point double qui rencontre  $C$  en ses deux extrémités (arc jaune ; (+)). D'après la proposition 1, son origine, que l'on distingue de l'autre extrémité par une orientation convenue une fois pour toutes, varie continûment avec la métrique.

La section locale cherchée s'obtient maintenant comme suit. Au-dessus de  $3g - 3$  longueurs, on choisit une métrique qui a la propriété suivante : si  $K_j$  est adjacent à  $R_{i_1}$  et à  $R_{i_2}$ , les deux origines sur  $K_j$  des arcs jaunes de ces deux pantalons coïncident. En imposant cette condition, on obtient une section locale continue.

Soit  $D$  une boule de  $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$  au-dessus de laquelle  $L$  admet une section  $\sigma$ . Soit l'application  $T : D \times \mathbb{R}^{3g-3} \rightarrow \mathfrak{T}$  définie par :

$$T(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) = \theta(\sigma(x), \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) .$$

Il s'agit de montrer que  $T$  est un homéomorphisme sur son image. Comme  $\mathfrak{T}$  est à base dénombrable de voisinages, on doit juste montrer que  $T$  est injectif et propre.

Si deux métriques se déduisent l'une de l'autre par un twist, elles sont distinguées par une longueur de géodésique (corollaire de la proposition 2) ; ceci prouve l'injectivité.

Pour simplifier, on note  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) = \alpha$ . Soit  $(x^n, \alpha^n)$  une suite tendant vers l'infini dans  $D \times \mathbb{R}^{3g-3}$ . Le 2° du même corollaire interdit que l'image par  $T$  de cette suite soit un compact de l'espace de Teichmüller. Donc  $T$  est propre.  $\square$

Théorème 4. L'application  $\ell_* : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$  est une application propre qui est un homéomorphisme sur son image.

En réalité, on va prouver une proposition plus forte relative au système des courbes  $K_i, K_i^!, K_i''$  décrit avant la proposition 2.

Proposition 5. L'application  $\Lambda : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{9g-9}$ , qui à  $m \in \mathfrak{T}$  associe le triplet  $(\ell(m, [K_i]), \ell(m, [K_i^!]), \ell(m, [K_i'']))$  est injective et propre (donc un homéomorphisme sur son image).

#### Démonstration

On choisit une section  $s$  de la fibration  $L$  ; autrement dit, on écrit tout  $m \in \mathfrak{T}$  sous la forme :

$$m = \theta(s(x), \alpha)$$

(+) Comparer à la terminologie des feuilletages mesurés (exposé 6).

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$  est un "multiangle de twist" et où  $x \in (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$  est le système des longueurs des courbes  $K_i$ .

La variable  $x$  étant fixée, la fonction  $\ell(m, [K_i^1])$  est une fonction strictement convexe et propre  $g_i(\alpha_i)$  de la  $i$ -ème composante de  $\alpha$ ; d'autre part,  $\ell(m, [K_i'']) = g_i(\alpha_i + 1)$ .

Lemme. Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction strictement convexe, propre, alors  $t \rightarrow (g(t), g(t+1))$  définit un plongement propre de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Donc le  $(6g-6)$ -système  $(\ell(m, [K_i^1]), \ell(m, [K_i'']))$  est une fonction injective propre du multi-angle  $\alpha$ . De là, il suit que  $\Lambda$  est injective.

Pour montrer que  $\Lambda$  est propre, on considère une suite  $(x_n, \alpha_n)$  tendant vers l'infini. Si  $x_n$  tend vers  $\infty$ , il est clair que  $\Lambda(x_n, \alpha_n)$  tend vers  $\infty$ ; sinon les  $x_n$  restent dans un compact et, d'après le corollaire de la proposition 2, la longueur d'une des courbes  $K_i^1$  tend vers l'infini.  $\square$

On complète le théorème par la proposition suivante, selon une démonstration indiquée par S.Kerckhoff. On rappelle que  $\pi$  désigne la projection  $\mathbb{R}^{\mathcal{J}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{J}})$ .

Proposition 6. L'application composée  $\pi \circ \ell_* : \mathcal{J} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$  est une injection.

Démonstration. On prend pour  $\mathbb{H}^2$  le modèle du demi-plan de Poincaré  $= \{x + iy \mid y > 0\}$  avec la métrique  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . Le groupe des isométries est  $SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm Id\}$ , où l'action de  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est donnée par  $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ .

Si  $A$  est un élément hyperbolique (i.e. laisse une géodésique invariante), on définit le déplacement

$$\ell(A) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d(z, A \cdot z).$$

Le minimum est atteint sur la géodésique invariante.

Lemme 1. Si  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  est hyperbolique, on a :

$$\text{Tr}(A) = 2 \text{ch} \left( \frac{\ell(A)}{2} \right).$$

Démonstration. Par conjugaison dans  $SL(2, \mathbb{R})$ , on se ramène au cas où la géodésique invariante est le demi-axe des  $y$ . Alors, on a :

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho > 0.$$

Par conséquent  $A \cdot i = \rho^2 i$ . Donc, on a :

$$\ell(A) = d(i, \rho^2 i) = \int_1^{\rho^2} \frac{dt}{t} = 2 \operatorname{Log} \rho,$$

et 
$$\operatorname{Tr}(A) = \rho + \rho^{-1} = 2 \operatorname{ch} \left( \frac{\ell(A)}{2} \right). \quad \square$$

Lemme 2. Soient  $A, B \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ . On a :

$$\operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(A^{-1}B).$$

(Evident par le calcul).

Considérons sur la surface  $M$  deux courbes simples orientées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  se coupant transversalement en un point-base.

On peut donc parler des classes d'homotopie des lacets pointés  $\gamma_1 * \gamma_2$  et  $\gamma_1^{-1} * \gamma_2$ ; elles sont toutes les deux représentables par des courbes simples  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$ . Si  $M$  est munie d'une métrique  $m$  de courbure  $-1$ , ces éléments du groupe fondamental correspondent à des isométries hyperboliques de  $\mathbb{H}^2$  dont le déplacement est  $\ell_i = \ell(m, [\gamma_i])$ . Les lemmes précédents donnent donc les formules :

$$2 \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_1}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_2}{2} \right) = \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_3}{2} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_4}{2} \right)$$

ou encore

$$(*) \quad \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \right) = \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_3}{2} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{\ell_4}{2} \right).$$

(H) Supposons qu'il existe une autre métrique de courbure  $-1$  pour laquelle les longueurs de toutes géodésiques fermées soient multipliées par  $k \neq 1$ . Pour cette métrique, l'égalité (\*) devient :

$$(**) \quad \operatorname{ch} \left( k \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \right) + \operatorname{ch} \left( k \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \right) = \operatorname{ch} \left( k \frac{\ell_3}{2} \right) + \operatorname{ch} \left( k \frac{\ell_4}{2} \right).$$

Lemme 3. Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quatre nombres  $\geq 0$  et  $k > 0, k \neq 1$ . Les relations

$$\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} \beta = \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{ch} \delta$$

$$\operatorname{ch} k\alpha + \operatorname{ch} k\beta = \operatorname{ch} k\gamma + \operatorname{ch} k\delta$$

impliquent  $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma, \delta\}$ .

Démonstration. On peut se limiter à  $k > 1$ . Le lecteur vérifiera que la fonction  $\text{ch}(k \text{Arg ch } x)$  est une fonction strictement convexe de  $x$ . Maintenant, si  $c$  est la valeur commune de la première égalité et si on pose  $x = \text{ch } \alpha$ ,  $y = \text{ch } \gamma$ , la seconde relation est :

$$\text{ch}(k \text{Arg ch } x) + \text{ch}(k \text{Arg ch}(c-x)) = \text{ch}(k \text{Arg ch } y) + \text{ch}(k \text{Arg ch}(c-y)).$$

On peut supposer  $y \leq x \leq c-x \leq c-y$ . Si on avait  $y < x$ , d'après la convexité stricte, le membre de gauche serait strictement plus petit que celui de droite.  $\square$

Par conséquent, (\*) et (\*\*) donnent :

$$\{\ell_1 + \ell_2, \ell_1 - \ell_2\} = \{\ell_3, \ell_4\}.$$

Quitte à changer la numérotation, on peut dire que :

$$\ell_3 = \ell_1 + \ell_2.$$

Comme l'angle entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  n'est pas nul, il n'y a aucune chance que  $\ell_1 + \ell_2$  soit une plus courte distance ; donc, l'égalité ci-dessus ne peut être vraie et l'hypothèse (H) est absurde.  $\square$

### RÉFÉRENCES

- [1] L. BISHOP - B.O'NEILL, Manifolds of negative curvature, Trans. AMS 145 (1969), p. 1-48.
- [2] J.P. BOURGUIGNON, Sur la structure du  $\pi_1$ , Séminaire de géométrie riemannienne 1970-71, variétés à courbure négative, Publications de l'Université Paris VII.
- [3] C.J. EARLE - J. EELLS, A fiber bundle description of Teichmüller theory, J. Diff. Geom. 3 (1969), p. 19-43.
- [4] R. FRICKE - F. KLEIN, "Automorphen Functionen" vol. II, Teubner, Leipzig, 1912.
- [5] R. PALAIS, Local triviality of the restriction map for embeddings, Comm. Math. Helv. 34 (1960), p. 305-312.
- [6] G. SPRINGER, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley Pub. Comp., 1957.