

# *Astérisque*

A. FATHI

## **Appendice : Estimations de distances hyperboliques**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 151-158

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__151_0)>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## APPENDICE

### ESTIMATIONS DE DISTANCES HYPERBOLIQUES

par A. FATHI

Nous considérons le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, y > 0\}$ , muni de la métrique  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . La distance entre deux points  $z$  et  $z'$  est notée  $d(z, z')$ .

1. Distance hyperbolique de  $i$  à  $z_0$ .

$$\operatorname{ch}(d(i, z_0)) = \frac{|z_0 + i|^2 + |z_0 - i|^2}{|z_0 + i|^2 - |z_0 - i|^2}.$$

Démonstration. Soit  $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  l'isomorphisme  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ . Soit  $g_{z_0}$  l'automorphisme de  $\mathbb{D}^2$  qui est la multiplication par  $\frac{\overline{f(z_0)}}{|f(z_0)|}$ ; on vérifie que l'automorphisme de  $\mathbb{H}^2$ ,  $f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f$ , admet  $i$  pour point fixe et envoie  $z_0$  au point imaginaire pur  $i \frac{|z_0+i| + |z_0-i|}{|z_0+i| - |z_0-i|}$ . Comme on a la formule  $d(i, iy) = |\operatorname{Log} y|$ , il vient :

$$e^{d(i, z_0)} = \frac{|z_0+i| + |z_0-i|}{|z_0+i| - |z_0-i|}. \quad \square$$

2. Corollaire. Si  $z_0 = \frac{ai+b}{ci+d}$  avec  $ad - bc = 1$ , on a :

$$\operatorname{ch}(d(i, z_0)) = \frac{1}{2} [a^2 + b^2 + c^2 + d^2].$$

3. Translation hyperbolique le long de l'axe imaginaire.

La transformation  $\begin{pmatrix} e^{k/2} & 0 \\ 0 & e^{-k/2} \end{pmatrix}$  envoie en elle-même la droite  $Oy$  et

les points de cette droite sont déplacés de la distance  $k$ .

4. Translation le long de la droite hyperbolique des complexes de module 1.

Si  $z$  est de module 1 et si  $z'$  vérifie  $\frac{z'+1}{z'-1} = e^{k \frac{z+1}{z-1}}$ , alors  $z'$  est de module 1. La transformation  $z \rightarrow z'$  qui est donnée par la matrice de  $SL(2, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \left( \frac{k}{2} \right) & \operatorname{sh} \left( \frac{k}{2} \right) \\ \operatorname{sh} \left( \frac{k}{2} \right) & \operatorname{ch} \left( \frac{k}{2} \right) \end{pmatrix}$$

déplace les points de cette "droite" d'une distance  $k$ , vers la droite (partie réelle positive) si  $k > 0$  et vers la gauche si  $k < 0$ .

5. Relations entre les côtés d'un hexagone hyperbolique droit.

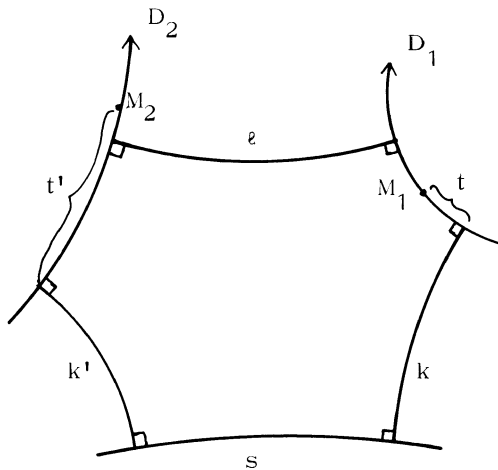


Figure 1

Dans cette figure,  $s, k, k'$  sont donnés. On veut calculer  $\ell$ , qui est la plus courte distance entre les droites  $D_1$  et  $D_2$ . On va établir la formule :

$$\text{ch } \ell = \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k') - \text{ch}(k) \text{ch}(k') .$$

Démonstration. On calcule la distance  $d$  d'un point courant  $M_1$ , d'abscisse  $t$  sur  $D_1$  orienté, et d'un point courant  $M_2$ , d'abscisse  $t'$  sur  $D_2$  orienté (comme sur la figure 1) .

On place  $M_2$  en  $i$  et on essaie d'obtenir  $M_1 = f(i)$ , où  $f$  est composé de translations hyperboliques le long de l'axe  $Oy$  et le long du cercle unité.

On voit facilement que l'on peut prendre  $f \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  comme produit :

$$f = \begin{pmatrix} e^{-t'/2} & 0 \\ 0 & e^{t'/2} \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{où } F = \begin{pmatrix} \text{ch}(\frac{k'}{2}) & \text{sh}(\frac{k'}{2}) \\ \text{sh}(\frac{k'}{2}) & \text{ch}(\frac{k'}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(\frac{k}{2}) & -\text{sh}(\frac{k}{2}) \\ -\text{sh}(\frac{k}{2}) & \text{ch}(\frac{k}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

En effectuant les calculs, il vient :

$$a = \alpha e^{-\frac{t+t'}{2}}, \quad b = \beta e^{\frac{t-t'}{2}}, \quad c = \gamma e^{\frac{t'-t}{2}}, \quad d = \delta e^{\frac{t+t'}{2}},$$

$$\alpha = e^{s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{-s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}),$$

$$\beta = e^{-s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}),$$

$$\gamma = e^{s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{-s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}),$$

$$\delta = e^{-s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}).$$

$$\text{On a : } 2 \text{ch}(d(M_1, M_2)) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$= \alpha^2 e^{-(t+t')} + \beta^2 e^{t-t'} + \gamma^2 e^{t'-t} + \delta^2 e^{t+t'} .$$

En cherchant le point critique de cette fonction des variables  $t$  et  $t'$  (unique parce que la fonction est convexe), il vient :

$$e^{t+t'} = \left| \frac{\alpha}{\delta} \right|, \quad e^{t-t'} = \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|.$$

La valeur critique est donc :  $\text{ch } \ell = |\alpha \delta| + |\beta \gamma|$ .

$$\alpha \delta = \frac{1}{2} [1 + \text{ch}(k) \text{ch}(k') - \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k')]$$

$$\beta \gamma = \frac{1}{2} [\text{ch}(k) \text{ch}(k') - 1 - \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k')].$$

On vérifie d'ailleurs que  $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$ . On trouve alors :

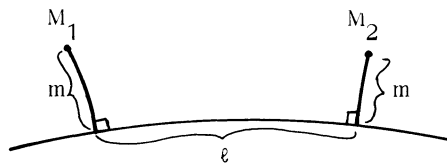
$$\text{ch } \ell = \sup (1, |\text{ch}(k) \text{ch}(k') - \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k')|).$$

Or, on voit géométriquement que, si à partir d'un hexagone, on augmente  $s$ , on obtient un nouvel hexagone pour lequel  $\ell$  n'est sûrement pas nul ( $\text{ch } \ell > 1$ ) ; d'ailleurs,  $\ell$  est une fonction croissante de  $s$  (voir exposé 3, § II). Donc :

$$\text{ch } \ell = \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k') - \text{ch}(k) \text{ch}(k'). \quad \square$$

6. Distance de deux points à égale distance d'une droite.

Figure 2



Dans la situation de la figure 2, on a la formule :

$$\text{ch}(d(M_1, M_2)) = \frac{1}{2} [\text{ch}(\ell) + 1 + (\text{ch}(\ell) - 1) \text{ch}(2m)].$$

Démonstration. On place  $M_1$  en  $i$  et on écrit  $M_2 = f(i)$ , où  $f$  est dans  $SL(2, \mathbb{R})$

le produit suivant :

$$f = \begin{pmatrix} e^{-m/2} & 0 \\ 0 & e^{m/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) & \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) \\ \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{m/2} & 0 \\ 0 & e^{-m/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) & e^{-m} \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) \\ e^m \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) \end{pmatrix}$$

On applique alors la formule 2 .

□

7. Majoration de distances dans le pantalon.

On considère sur le pantalon  $P^2$  une métrique hyperbolique pour laquelle les composantes du bord sont des géodésiques de longueurs respectives  $2m_1, 2m_2, 2m_3$  (attention ! ce n'est pas la notation usuelle). Soit  $g_{ij}$  la géodésique simple orthogonale à  $\partial_i P^2$  et à  $\partial_j P^2$  ; si  $i = j$ , elle coupe  $P^2$  en deux anneaux. Posons  $\ell_3 = \operatorname{long} g_{12}$ ,  $\ell_2 = \operatorname{long} g_{13}$ ,  $\ell_1 = \operatorname{long} g_{23}$ .

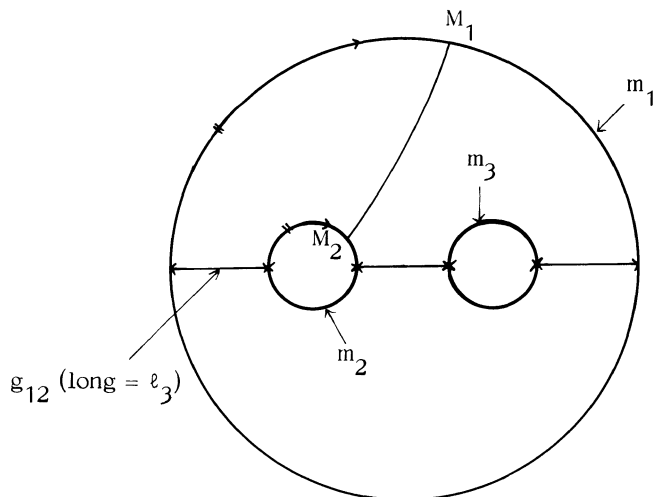


Figure 3

On a :  $\text{ch}(m_3) = \text{ch}(\ell_3) \text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2) - \text{ch}(m_1) \text{ch}(m_2)$  .

Donc : 
$$\text{ch}(\ell_3) = \frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1) \text{ch}(m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} .$$

Proposition. Soit  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) un point d'abscisse  $m \leq \inf(m_1, m_2)$  sur  $\partial_1 P^2$  (resp.  $\partial_2 P$ ) , où l'origine est le point d'intersection avec  $g_{12}$  et l'orientation celle de la figure 3. Pour tout  $\varepsilon > 0$  , il existe une constante, ne dépendant que de  $\varepsilon$  , qui majore  $d(M_1, M_2)$  pourvu que  $m, m_1, m_2, m_3$  vérifient les inégalités (i), (ii) ou (i), (iii) :

- (i)  $m_1, m_2, m_3 > \varepsilon$  ;
- (ii)  $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$  (inégalité du triangle) et  $|m| \leq \frac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$  ;
- (iii)  $m_1 \geq m_2 + m_3$  et  $|m| \leq m_2$  .

Démonstration. D'après la formule 6 , il s'agit de borner la quantité  $(\text{ch}(\ell_3) + 1) + (\text{ch}(\ell_3) - 1) \text{ch}(2m)$  . Pour cela, il suffit de borner  $Q = [\text{ch}(\ell_3) - 1] \text{ch}(2m)$  car on a :  $\text{ch}(\ell_3) + 1 \leq Q + 2$  .

1° (i) et (ii) sont vrais. On a :

$$Q = \left[ \frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1 - m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} \right] \text{ch}(2m) \leq \left[ \frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1 - m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} \right] \text{ch}(m_1 + m_2 - m_3) .$$

Puisque  $\partial_1 P^2$  et  $\partial_2 P^2$  jouent ici des rôles symétriques, on peut supposer

$m_1 - m_2 \geq 0$  . Alors, on a :

$$\text{ch}(m_1 - m_2) \text{ch}(m_1 + m_2 - m_3) \leq \text{ch}(2m_1 - m_3)$$

$$\text{ch}(m_3) \text{ch}(m_1 + m_2 - m_3) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) .$$

D'autre part  $|m_1 - m_3| \leq m_2$  ; donc  $0 \leq |2m_1 - m_3| \leq m_1 + m_2$  ; d'où :

$$\text{ch}(2m_1 - m_3) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) .$$

$$\text{Finalement, on a : } Q \leq \frac{2 \text{ch}(m_1 + m_2)}{\text{sh} m_1 \text{sh} m_2} = 2 + 2 \coth(m_1) \coth(m_2) .$$

Le membre de droite est borné d'après (i) .

2° (i) et (iii) sont vrais.

$$Q = \left[ \frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1 - m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} \right] \text{ch}(2m_2) .$$

On a :

$$\text{ch}(m_3) \text{ch}(2m_2) \leq \text{ch}(m_3 + 2m_2) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) ,$$

$$\text{ch}(m_1 - m_2) \text{ch}(2m_2) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) .$$

On conclut comme dans le 1er cas.  $\square$

Corollaire. Soient  $M, M'$  deux points distincts de  $\partial_1 P^2$ , équidistants de la géodésique  $g_{11}$  et du même côté de celle-ci. Alors  $d(M, M')$  est borné par une constante ne dépendant que de  $\epsilon$  pourvu que l'on ait :

- (i)  $m_1, m_2, m_3 > \epsilon$  ,
- (ii)  $m_1 \geq m_2 + m_3$
- (iii)  $M \in AA'$  (voir figure 4) .

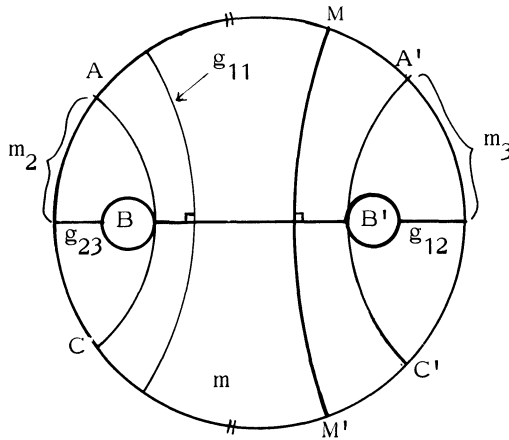


Figure 4

(toutes les lignes de cette figure sont des géodésiques)



Démonstration. D'après la proposition précédente, les quantités  $d(A,B) = d(C,B)$  et  $d(A',B') = d(C',B')$  sont bornées. D'après la formule du n° 6 ,

$$d(M,M') \leq \sup (d(A,C), d(A',C')) .$$

Par l'inégalité triangulaire,  $d(A,C) \leq 2d(A,B)$  et  $d(A',C') \leq 2d(A',B')$  .  $\square$