

# Astérisque

V. POÉNARU

## Quelques rappels sur les difféomorphismes des surfaces

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 21-31

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__21_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## EXPOSÉ 2

### QUELQUES RAPPELS

#### SUR LES DIFFÉOMORPHISMES DES SURFACES

par V. POÉNARU

- § I. - Espaces fonctionnels
- § II. - Les groupes de tresses et leur calcul
- § III. - Les difféomorphismes des disques à 2 trous

#### § I. - ESPACES FONCTIONNELS

Soit  $M^2$  une variété de dimension 2, compacte, connexe. Je vais considérer le groupe des difféomorphismes de  $M^2$ , noté  $\text{Diff } M^2$ . Si  $A \subset M^2$ , je vais noter par  $G(M, A)$  l'espace des équivalences d'homotopie  $M \xrightarrow{f} M$ , telles que  $f|_A = \text{id}$ , muni de la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 1 (Smale).  $\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial D^2)$  est contractile (on écrira  $\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial D^2) \simeq *$ ).

Pour la démonstration, voir [2], [3].

Théorème 2 (voir [2]). Les inclusions naturelles suivantes sont des équivalences d'homotopie :

$$\begin{aligned} O(3) &\hookrightarrow \text{Diff } S^2 \hookrightarrow G(S^2) \\ SO(3) &\hookrightarrow \text{Diff } P^2 \hookrightarrow G(P^2) . \end{aligned}$$

Ces cas-là étant réglés,  $M$  est un  $K(\pi_1, 1)$ ; je considère  $*$   $\in M$  et la fibration :

$$\begin{array}{ccc} G(M, *) & \hookrightarrow & G(M) \\ & & \downarrow \text{ev} (*) \\ & & M \end{array}$$

Par des méthodes standard de théorie des obstructions, on prouve le théorème suivant :

Théorème 3.  $\pi_0 G(M, *) = \text{Aut } \pi_1(M, *)$

$$\pi_i G(M, *) = 0, \quad \text{si } i > 0 .$$

Ainsi, la suite exacte d'homotopie de notre fibration se trouve réduite à :

$$1 \rightarrow \pi_1 G(M) \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{\partial} \text{Aut } \pi_1 M \rightarrow \pi_0 G(M) \rightarrow 1$$

On vérifie sans peine les faits suivants :

- 1) Si  $x \in \pi_1 M$ , alors  $\partial(x)$  est l'automorphisme intérieur qui correspond à  $x$  ;
- 2)  $\pi_1 G(M)$  est le centre de  $\pi_1 M$ . Ce groupe est nul sauf pour les cas exceptionnels suivants : le tore,  $\pi_1 G(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$   
la bouteille de Klein,  $\pi_1 G(K^2) = \mathbb{Z}$  ;
- 3)  $\pi_0 G(M) = \text{Aut } \pi_1 M / \text{les automorphismes intérieurs}$ .

## § II. - LES GROUPES DE TRESSSES ET LEUR CALCUL

(voir [1] pour plus de détails)

Soient  $X$  un espace topologique,  $n$  un entier positif et  $P_n(X) = X^n - \Delta$ , où  $\Delta$  est la "grande diagonale" de  $X^n$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $n$ -uples de points de  $X$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  tels qu'il existe  $i \neq j$  avec  $x_i = x_j$ . Le groupe des permutations  $\text{Perm}(n)$  agit librement sur  $P_n(X)$  et par définition  $B_n(X) = P_n(X) / \text{Perm}(n)$ . On a ainsi un revêtement galoisien

$$\begin{array}{ccc} \text{Perm}(n) & \longrightarrow & P_n(X) \\ & & \downarrow \\ & & B_n(X) . \end{array}$$

Par définition,  $\pi_1 P_n(X) =$  "le groupe des  $n$ -tresses colorées de  $X$ " et  $\pi_1 B_n(X) =$  "le groupe des  $n$ -tresses de  $X$ ".

Dorénavant  $X = \mathbb{R}^2$ , et on note :

$$\pi_1 P_n(\mathbb{R}^2) = P_n \quad (\text{le groupe des } n\text{-tresses colorées})$$

$$\pi_1 B_n(\mathbb{R}^2) = B_n \quad (\text{le groupe des } n\text{-tresses}).$$

On a une suite exacte évidente :

$$1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow \text{Perm}(n) \rightarrow 1.$$

Un élément de  $B_n$  peut être représenté de la manière suivante : on fixe une fois

pour toutes un ensemble de  $n$  points distincts de  $\text{int } D^2$  :  $x_1, \dots, x_n$ . Ensuite, l'élément de  $B_n$  est un système d'arcs de  $D^2 \times I$ , allant de  $(x_1, \dots, x_n) \times 0$  vers  $(x_1, \dots, x_n) \times 1$ , transverses à chaque tranche horizontale  $D^2 \times t$ . Les arcs ne touchent pas à  $\partial D^2 \times I$  et le tout est défini à une isotopie près (isotopie qui laisse invariante le bord du cylindre et qui respecte la projection  $D^2 \times I \rightarrow I$ ).

Avec cette représentation, la loi de composition de  $B_n$  est la même que pour les cobordismes et les tresses colorées sont celles où un arc partant de  $x_i \times 0$  aboutit à  $x_i \times 1$ . La figure 1 ci-dessous représente une tresse de  $B_n$ .

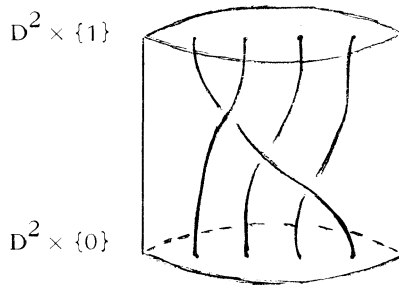


Figure 1

Théorème 4 (Fadell-Neuwirth). L'application  $P_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{R}^2)$  qui consiste à oublier  $x_n$  est une fibration de fibre  $\mathbb{R}^2 - ((n-1) \text{ points})$ .

Corollaire.  $P_n(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_n, 1)$   
 $B_n(\mathbb{R}^2) \simeq K(B_n, 1)$  .

Remarque. Le théorème de Fadell-Neuwirth nous fournit une suite exacte

$$1 \rightarrow F_{n-1} \rightarrow P_n \overset{\leftarrow}{\rightarrow} P_{n-1} \rightarrow 1$$

qui est scindée et  $P_n$  est déterminé à partir de  $P_{n-1}$  et de l'action de  $P_{n-1}$  sur le groupe libre  $F_{n-1}$ .

On va donner maintenant une présentation du groupe  $B_n$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , je considère les coordonnées  $(x, y)$  et, pour  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in B_n(\mathbb{R}^2)$ , j'arrange les indices de telle façon que :

$$x(p_1) < x(p_2) \leq \dots \leq x(p_n) .$$

Par définition,  $M_i \subset B_n(\mathbb{R}^2)$  est l'ensemble des  $p$  tels que  $x(p_i) = x(p_{i+1})$ , comme dans la figure 2 ci-après.

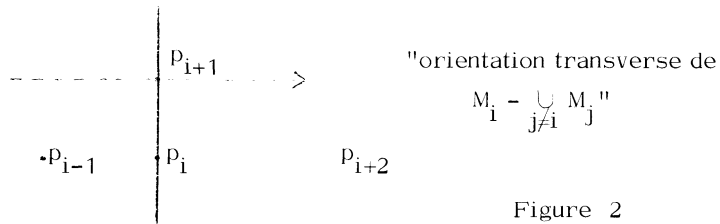


Figure 2

On remarque les choses suivantes :

- 1)  $M_i - \cup_{j \neq i} M_j$  est une sous-variété de codimension 1 de  $B_n(\mathbb{R}^2)$  munie d'une orientation transverse canonique, définie comme dans la figure 2 ci-dessus. Si la numération est telle que  $y(p_{i+1}) > y(p_i)$ , un déplacement de  $p_{i+1}$ , le long de la normale positive, pousse  $p_{i+1}$  jusqu'à ce que  $x(p_{i+1}) > x(p_i)$ .
- 2)  $M_i - \cup_{j \neq i} M_j$  est connexe.
- 3)  $B_n(\mathbb{R}^2) - \cup_i M_i$  est contractile.

Ces remarques impliquent que les lacets simples  $a_i$ , basés quelque part dans  $B_n(\mathbb{R}^2) - \cup_i M_i$  et tels que  $a_i$  traverse exactement une fois  $M_i$  (et pas les autres strates), dans le sens positif, engendrent  $B_n$ . On peut trouver les relations entre les  $a_i$  en regardant ce qui se passe au voisinage des strates de codimension 2, où  $M_i$  et  $M_j$  se rencontrent.

Cas 1.  $|i - j| \geq 2$ . Au niveau de  $\mathbb{R}^2$ , un point de  $M_i \cap M_j$  est comme dans la figure 3. On peut bouger indépendamment le long des traits horizontaux pointillés, ce qui nous donne un petit carré, transverse à  $M_i \cap M_j$  dans  $B_n(\mathbb{R}^2)$ , représenté dans la figure 4. On a mis les bonnes orientations transverses des strates  $M_i, M_j$ .

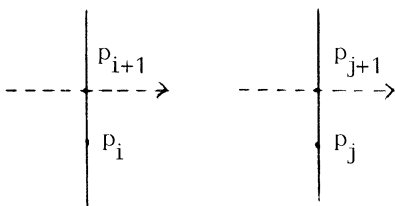


Figure 3

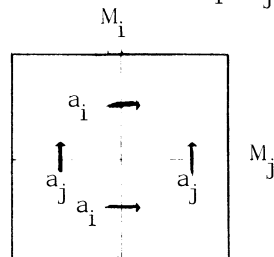


Figure 4

Ceci nous donne la relation  $a_i a_j = a_j a_i$ .

Cas 2.  $|i - j| = 1$ . Au niveau de  $\mathbb{R}^2$ , on a la figure 5, et au niveau de  $B_n(\mathbb{R}^2)$ , la figure 6, sur laquelle on peut lire la relation :

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} .$$

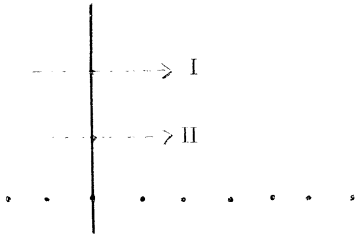


Figure 5

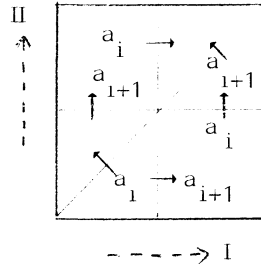


Figure 6

On a trouvé ainsi le théorème suivant :

Théorème 5 (E. Artin).  $B_n$  admet les générateurs  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  et les relations :

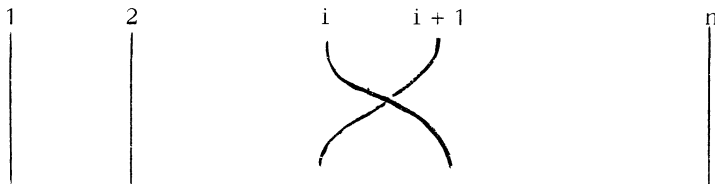
$$[a_i, a_j] = 1 \quad (|i - j| > 1)$$

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$$

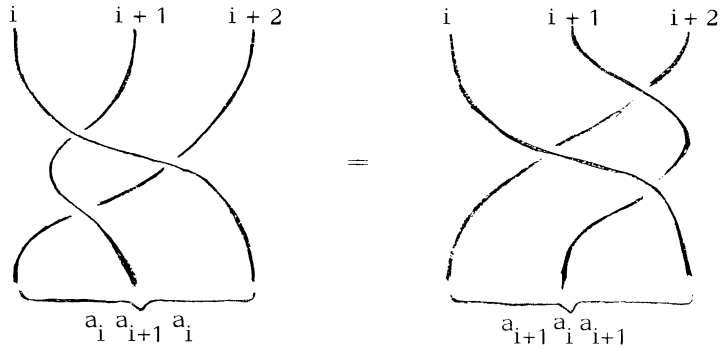
Corollaire.  $B_3 = \pi_1(S^3 - \text{le noeud du trèfle})$ .

[ L'explication de cette "coïncidence" est la suivante :  $B_n(\mathbb{R}^2)$  s'identifie à l'ensemble des polynômes complexes de degré  $n$ , moniques, à racines distinctes. Donc  $B_n = \pi_1(\mathbb{C}^n - \text{le lieu discriminant}) \dots ]$ .

Le générateur  $a_i$  est la tresse suivante :



et la relation  $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$  peut être visualisée comme suit :



En particulier,  $B_2 \approx \mathbb{Z}$  et le générateur  $a_1$  est



De même,  $P_2 \approx \mathbb{Z}$  est engendré par



et l'inclusion naturelle  $P_2 \rightarrow B_2$  est la multiplication par 2 :  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$ .

### § III. - LES DIFFÉOMORPHISMES DU DISQUE À DEUX TROUS

(les espaces  $A(P^2)$ ,  $A'(P^2)$ )

Soit  $K \subset \text{int } D^2$  un ensemble fini de cardinalité  $k$ . On va introduire les notations suivantes :

$\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial)) = \{ \text{l'ensemble des difféomorphismes } D^2 \xrightarrow{\varphi} D^2, \text{ tels que } \varphi|_{K \cup \partial D^2} = \text{id} \}$ ,

$\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial) = \{ \text{l'ensemble des difféomorphismes } D^2 \xrightarrow{\psi} D^2, \text{ tels que } \psi(K) = K, \psi|_{\partial D^2} = \text{id} \}$ .

RAPPELS SUR  $\pi_0(\text{Diff } M^2)$

On a une action naturelle de  $\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial)$  sur  $B_k(\text{int } D^2)$ , et sur  $P_k(\text{int } D^2)$ , ce qui nous fournit deux fibrations :

$$\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial) \subset \cdot \text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial) \longrightarrow B_k(\text{int } D^2)$$

et

$$\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial)) \subset \cdot \text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial) \longrightarrow P_k(\text{int } D^2) .$$

En utilisant le théorème de Smale :

$$\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial) = * ,$$

on a le corollaire suivant :

Corollaire.

1) Chaque composante connexe de  $\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial))$ ,  $\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial)$  est contractile.

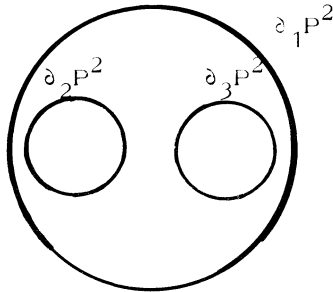
2) On a des isomorphismes canoniques :

$$P_k = \pi_0(\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial)))$$

$$B_k = \pi_0(\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial)) .$$

On va considérer maintenant la variété à bord  $P^2$  qui est le disque à deux trous ou "le pantalon".

"Le pantalon"  
 $P^2$



Remarque. Soit  $\text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1) = \{ \text{les difféomorphismes } P^2 \xrightarrow{\varphi} P^2 \text{ tels que } \varphi|_{\partial_1 P^2} = \text{id}, \varphi(\partial_2 P^2) = \partial_2 P^2, \varphi(\partial_3 P^2) = \partial_3 P^2 \}$ . Manifestement,  $\text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1)$  a le même type d'homotopie que  $\text{Diff}(P^2, \text{rel}(K, \partial))$ .

Proposition.  $\pi_0 \text{Diff}(P^2, \text{rel } \partial) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ .

Démonstration. En considérant les 1-jets des difféomorphismes, aux deux points de  $K$ ,

on a une fibration :  $\text{Diff}(P^2, \text{rel } \partial P^2) \hookrightarrow \text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial))$

$$\downarrow \\ S^1 \times S^1$$



d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(P^2, \text{rel } \partial P^2)) \rightarrow P_2 \rightarrow 0 .$$

On vérifie que cette suite splitte, que l'extension est centrale, et que l'action de  $P_2$  sur  $\pi_1(S^1 \times S^1)$  est triviale, d'où le résultat.  $\square$

On considère maintenant

$$\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \{\text{les difféomorphismes } \varphi : P^2 \rightarrow P^2, \text{ préservant l'orientation, tels que } \varphi(\partial_i P^2) = \partial_i P^2\} .$$

Proposition.  $\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$  est contractile.

Démonstration. Par restriction d'un  $\varphi \in \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$  à  $\partial_1 P^2 = \partial D^2$ , on a une fibration :

$$\underbrace{\text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1)}_{P_2 = K(\mathbf{Z}, 0)} \hookrightarrow \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \xrightarrow{\text{restriction}} \text{Diff}_+ S^1 = K(\mathbf{Z}, 1) .$$

On vérifie aussi que la flèche :

$$\pi_1 \text{Diff}_+ S^1 \xrightarrow{\partial} \pi_0 \text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1) = P_2$$

est un isomorphisme, d'où le résultat.  $\square$

Soit maintenant  $N^2$  une surface compacte, à bord  $\neq \emptyset$ , quelconque. On définit  $A(N^2) = \{\text{l'ensemble des classes d'isotopie d'arcs } I \subset N^2, \text{ avec } \partial I \subset \partial N^2, \text{ chaque bout pouvant bouger sur la composante connexe respective de } \partial N^2, \text{ et représentant des éléments non triviaux de } \pi_1(N^2, \partial N^2)\} ,$

$$A'(N^2) = \{\text{la même chose que ci-dessus avec plusieurs arcs, 2 à 2 disjoints}\} .$$

Corollaire.  $A(P^2)$  possède exactement 6 éléments, classifiés par les composantes connexes de  $\partial P^2$  où tombent les bouts des arcs respectifs.

Démonstration. Soient  $\tau$  et  $\tau'$  deux représentants d'éléments de  $A(P^2)$  avec leurs extrémités sur les mêmes composantes connexes de  $\partial P^2$ . On vérifie sans peine qu'il existe un difféomorphisme, respectant les orientations,

$$(P^2, \tau) \xrightarrow{\psi} (P^2, \tau') .$$

Puisque  $\pi_0 \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = 0$ , ce difféomorphisme est isotope à l'identité, d'où

le résultat. Les six modèles sont donnés par la figure 7.  $\square$

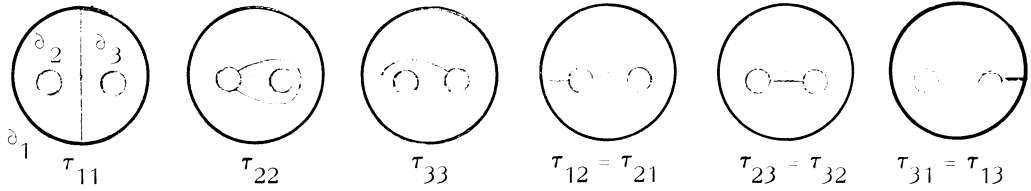


Figure 7 : les six modèles de  $A(P^2)$

Soit maintenant  $A' = \{\text{l'ensemble des triplets ordonnés } (a_1, a_2, a_3), \text{ où } a_i \geq 0, a_i \in \mathbf{Z}_+, \sum_1^3 a_i \equiv 0 \pmod{2}\}$ . Si  $\tau \in A'(P^2)$ , on lui associe :

$$i(\tau) = (i(\tau, \partial_1), i(\tau, \partial_2), i(\tau, \partial_3)) \in A'$$

où  $i(\tau, \gamma)$  est le nombre de points communs de  $\tau$  et  $\gamma$ . Pour la commodité, on ajoute  $\emptyset \in A'(P^2)$ , avec  $i(\emptyset) = (0, 0, 0)$ .

Théorème 6. L'application  $A'(P^2) \xrightarrow{i} A'$  est une bijection.

Démonstration. On va commencer par construire une application  $A' \xrightarrow{\tau} A'(P^2)$  telle que  $i(\tau(a_1, a_2, a_3)) = (a_1, a_2, a_3)$ . Si  $(a_1, a_2, a_3) \neq 0$ , le point de coordonnées barycentriques  $(\frac{a_1}{\sum a_i}, \frac{a_2}{\sum a_i}, \frac{a_3}{\sum a_i})$  tombe dans l'une des quatre régions de la figure 8.

Si  $(a_1, a_2, a_3)$  satisfait aux inégalités du triangle, on considère les entiers  $\geq 0$  :

$$x_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3), \quad x_{23} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1), \quad x_{31} = \frac{1}{2}(a_3 + a_1 - a_2)$$

et l'on définit  $\tau(a_1, a_2, a_3)$  comme étant l'élément de  $A'(P^2)$  qui consiste en  $x_{ij} = x_{ji}$  segments de type  $\tau_{ij}$ , pour  $i \neq j$ .

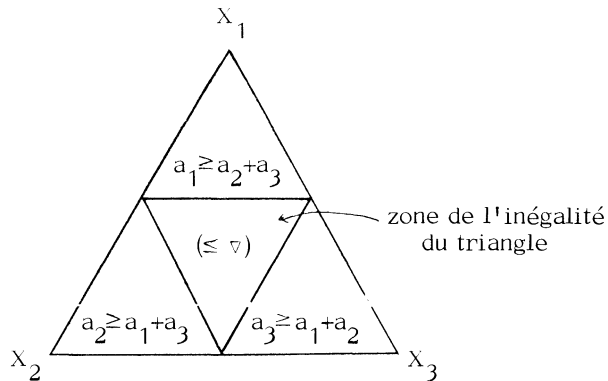


Figure 8

EXPOSÉ 2

Si  $a_1 \geq a_2 + a_3$ , on pose :

$$x_{11} = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3), \quad x_{12} = a_2, \quad x_{13} = a_3,$$

et l'on définit  $\tau(a_1, a_2, a_3)$  comme dans la figure 9.

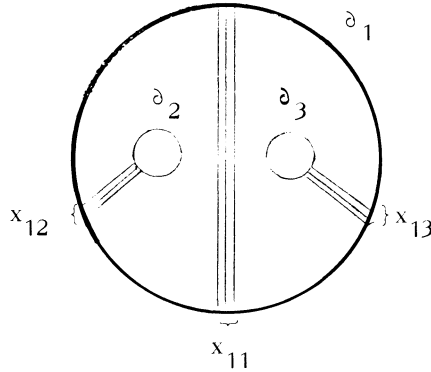


Figure 9

Les autres cas se traitent d'une manière similaire. On peut vérifier que sur  $\partial(\leq \nabla)$  les différentes définitions se recollent bien et que  $i \circ \tau = \text{identité}$ . Ainsi  $i$  est surjective.

On remarque maintenant que les paires compatibles d'éléments de  $A(P^2)$  sont exactement celles qui sont jointes par un segment dans la figure 10.

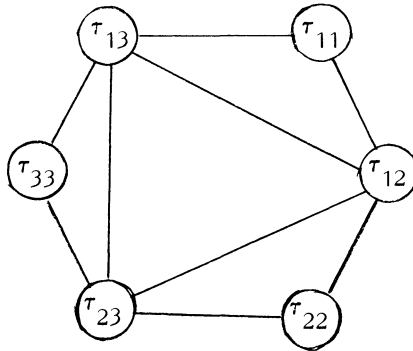


Figure 10

Les quatre triangles de la figure 10 correspondent canoniquement aux quatre triangles de la figure 8. D'une manière plus précise, soit  $x_{\alpha\beta}$  le nombre de segments du type  $\tau_{\alpha\beta}$  qui apparaît dans  $\tau \in A'(P^2)$ . On a les quatre situations mutuellement exclusives suivantes :

RAPPELS SUR  $\pi_0(\text{Diff } M^2)$

1)  $x_{\alpha\alpha} = 0$  pour  $\alpha = 1, 2, 3$ , ce qui implique que  $i(\tau) \in (\leq 7) ..$

2)  $x_{11} \neq 0$ , ce qui implique  $a_1 > a_2 + a_3$ .

.....

Supposons maintenant que  $\tau_1, \tau_2 \in A'(P^2)$  et que  $i(\tau_1) = i(\tau_2) \in A'$ . On en déduit d'abord que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont dans la même des 4 situations décrites ; par un calcul d'algèbre linéaire à partir des  $a_1, a_2, a_3$  qui sont (par définition) les mêmes pour  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , on en déduit que les  $x_{\alpha\beta}$  sont aussi les mêmes. Il nous reste à prouver que si  $\tau_1, \tau_2 \in A'(P^2)$  sont tels que tous leurs  $x_{\alpha\beta}$  sont égaux, alors  $\tau_1 = \tau_2$ . Ceci est déjà prouvé si  $\sum_{\alpha \leq \beta} x_{\alpha\beta} = 1$ . La preuve du cas général se fait par induction sur  $\sum_{\alpha \leq \beta} x_{\alpha\beta}$ . On laisse les détails au lecteur. On a ainsi prouvé que  $i$  est injective.  $\square$

Remarque. Soit  $\tau \in A'(P^2)$ . Il n'existe aucun élément non trivial de  $\pi_0 \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3, \tau)$ . En particulier, pour un  $\tau$  donné, on ne peut pas mélanger les différentes composantes connexes de  $\tau$  entre elles.

RÉFÉRENCES

- [1] J. BIRMAN, Braids, links and mapping class group, Annals of Math-Studies Princeton University Press, Princeton 1974.
- [2] J. CERF, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ( $\Gamma_4 = 0$ ), Lecture Notes in Math. 53, Springer, 1968.
- [3] S. SMALE, Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), p. 621-626.