

# *Astérisque*

F. LAUDENBACH

## **Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 243-250

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_243\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__243_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DE DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

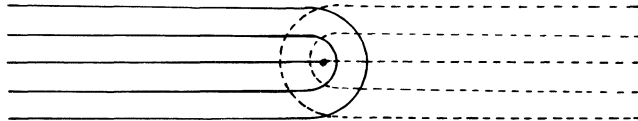
par F. LAUDENBACH

- § I. - Difféomorphisme pseudo-Anosov généralisé.
- § II. - Construction par revêtement ramifié.
- § III. - Construction par twists de Dehn.

§ I. - DIFFÉOMORPHISME PSEUDO-ANOSOV GÉNÉRALISÉ

Un feuilletage mesuré avec épines est un feuilletage mesuré pour lequel on admet, en plus des singularités usuelles (exposé 5), celles de la figure 1 ; la figure représente deux feuilletages mesurés avec épine, mutuellement transverses.

Figure 1



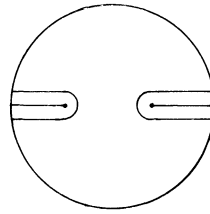
Un difféomorphisme pseudo-Anosov généralisé est un homéomorphisme  $\varphi$  pour lequel il existe deux feuilletages mesurés avec épines  $(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S)$ ,  $(\tilde{\mathfrak{F}}^U, \mu^U)$ , mutuellement transverses, et un scalaire  $\lambda > 1$ , tel que  $\varphi(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S) = (\tilde{\mathfrak{F}}^S, \lambda^{-1} \mu^S)$  et  $\varphi(\tilde{\mathfrak{F}}^U, \mu^U) = (\tilde{\mathfrak{F}}^U, \lambda \mu^U)$ .

Le disque admet un feuilletage mesuré avec épines, transversal au bord (figure 2). Il se peut aussi que, pour  $\alpha \in \mathcal{J}$ , on ait  $I(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S; \alpha) = 0$ , bien que  $\tilde{\mathfrak{F}}^S$  ne contienne aucun cycle de feuilles <sup>(†)</sup> (comme  $\varphi$  contracte les  $\mu^U$ -longueurs,

---

<sup>(†)</sup> On construit un tel exemple sur  $T^2$  par la construction du § III faite sur  $(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha$  est un "générateur" du tore et où  $\beta$ , isotope à  $\alpha$ , découpe  $T^2 - \alpha$  en cellules.

Figure 2



$\mathfrak{F}^S$  n'a pas de liaison entre singularités). Un pseudo-Anosov généralisé peut laisser fixe un élément de  $\mathcal{A}$  ; il ne vérifie pas le lemme de croissance des classes d'isotopie de courbes (proposition 19 de l'exposé 9)(voir note en bas de page précédente). D'ailleurs, il peut être isotope à l'identité (voir l'exemple sur  $S^2$  en 3.6, exp. 11).

Néanmoins, son qualificatif n'est pas usurpé à cause de la remarque suivante. Si on troue la surface à la pointe des épines, on obtient un difféomorphisme pseudo-Anosov de la surface à bord. En particulier, le théorème de récurrence de Poincaré reste vrai et on peut construire une partition de Markov. Donc un pseudo-Anosov généralisé est encore un processus de Bernoulli.

## § II. - CONSTRUCTION PAR REVÊTEMENT RAMIFIÉ

II.1. Soit  $p : N \rightarrow M$  un revêtement ramifié de surfaces compactes ; soit  $\Sigma \subset M$  le lieu de ramification. On suppose que le revêtement est galoisien de groupe  $G$  au-dessus de  $M - \Sigma$ . Soit  $\varphi$  un pseudo-Anosov généralisé de  $M$  ; par isotopie de  $p$ , on peut placer  $\Sigma$  dans l'ensemble infini des points périodiques de  $\varphi$ . Alors, quitte à remplacer  $\varphi$  par une de ses puissances, on peut supposer que  $\varphi|_{\Sigma} = \text{Id}$ . Le revêtement régulier de  $p$  au-dessus de  $M - \Sigma$  est classifié par un élément de  $H^1(M - \Sigma ; G)$ , groupe fini sur lequel opère  $\varphi$ . Quitte de nouveau à prendre une puissance de  $\varphi$ , on peut supposer que  $\varphi^*(p : N \rightarrow M) \approx (p : N \rightarrow M)$  ; autrement dit,  $\varphi$  se relève en un difféomorphisme  $\psi$ . Les propriétés locales de  $\varphi$  sont les mêmes que celles de  $\psi$  ; donc  $\psi$  est un pseudo-Anosov généralisé, avec le même facteur de dilatation.

II.2. Toute surface orientable fermée  $N$ , de genre  $g \geq 1$ , est l'espace total d'un revêtement ramifié à 2 feuillets sur  $T^2$  avec un lieu de ramification  $\Sigma$  vérifiant :

$$\text{card } \Sigma = 2g - 2 .$$

Pour le voir, on perce  $T^2$  en  $n = \text{card } \Sigma$  points ; cette variété ouverte se rétracte sur un bouquet de  $n + 1$  cercles  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}$  ; disons que les  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$

entourent chacun un trou et que  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{n+1}$  sont "générateurs" du tore. Le dernier trou, noté  $\infty$ , est entouré homologiquement par  $[\epsilon_1] + \dots + [\epsilon_{n-1}]$ . On construit le revêtement associé à l'homomorphisme  $\pi_1(T^2 - \Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui envoie  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$  sur 1 qui prend n'importe quelle valeur sur  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{n+1}$ . Comme n est pair, le revêtement est non trivial au voisinage de  $\infty$ . Ainsi la compactification donne un revêtement qui est effectivement ramifié en chaque point de  $\Sigma$ .

Soit  $\varphi$  un Anosov (linéaire) de  $T^2$ , qui est l'identité sur  $\Sigma$  et qui se relève en  $\psi$  dans  $N$ . Le feuilletage stable de  $\psi$  est transversalement orientable et ses singularités ont 4 branches. Donc  $\psi$  est pseudo-Anosov (non généralisé) et le feuilletage stable est défini comme feuilletage mesuré par une 1-forme fermée  $\omega^S$ ; on a :

$$\psi^* \omega^S = \lambda \omega^S \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1) .$$

De même, on a  $\psi^* \omega^U = \lambda^{-1} \omega^U$ , où  $\omega^U$  définit le feuilletage instable. Noter que les deux égalités simultanées interdisent à  $\psi$  d'être dérivable aux singularités, mais on peut approcher  $\psi$  par un difféomorphisme  $\psi'$  qui satisfait l'une des égalités.

L'inconvénient de cette construction est d'être assez peu maniable au niveau du calcul, par exemple pour trouver l'effet de  $\psi$  sur l'homologie.

### § III. - CONSTRUCTION PAR TWISTS DE DEHN

On suppose que la surface  $M$  est orientable et fermée. Dans le cas où il y aurait un bord, on commencerait par boucher les trous et, à la fin de la construction décrite ci-dessous, on éclaterait le nombre correspondant de singularités.

#### III. 1. Structure plate sur $M$ .

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes simples de  $M$ , à intersections transversales, vérifiant la condition suivante :

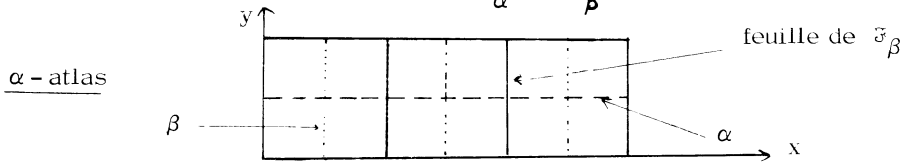
(\*) Chaque composante de  $M - (\alpha \cup \beta)$  est une cellule (ouverte) .

La décomposition cellulaire induite sur  $M$  par  $\alpha \cup \beta$  admet une décomposition cellulaire duale : les co-sommets sont les centres des cellules de  $M - (\alpha \cup \beta)$ ; chaque arc de  $(\alpha \cup \beta) - (\alpha \cap \beta)$  est traversé par une co-arête ; chaque point  $x$  de  $\alpha \cap \beta$  est le centre d'une co-cellule, qui est un carré puisque  $\alpha$  et  $\beta$  ne passent chacun qu'une fois en  $x$ .

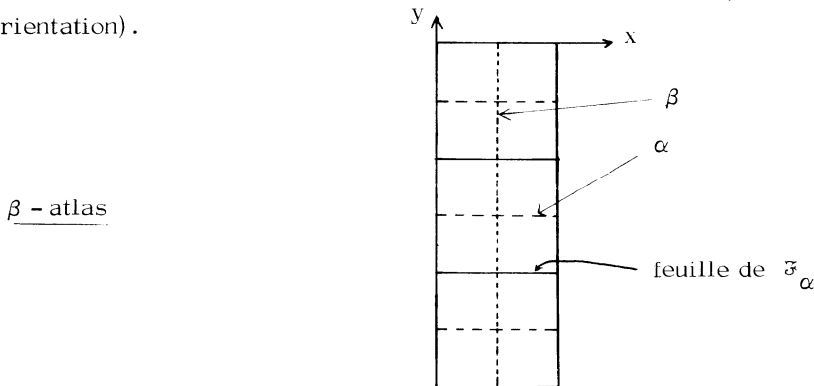
En "élargissant"  $\alpha$ , au sens de l'exposé 5, on construit un feuilletage mesuré  $\tilde{\omega}_\alpha$ , transversal à  $\beta$  et aux co-arêtes qui rencontrent  $\alpha$ ; on s'arrange

aussi pour que les co-arêtes qui ne rencontrent pas  $\alpha$  soient dans des feuilles de  $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ . Similairement, on construit  $\tilde{\mathfrak{F}}_\beta$  en élargissant convenablement  $\beta$ ; d'ailleurs, par des isotopies dans l'intérieur des co-cellules, on peut prendre  $\tilde{\mathfrak{F}}_\beta$  transversal à  $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ . Ces feuilletages ont leurs singularités aux co-sommets; dans le complémentaire, ils définissent une structure plate. On comprend bien ces feuilletages dans les figures "déroulées" ci-dessous.

Si on déroule les co-cellules le long de  $\alpha$ , on obtient une bande de  $n = \text{card}(\alpha \cap \beta)$  carrés, que l'on place dans  $\mathbb{R}^2$  de sorte que  $dy$  et  $dx$  induisent respectivement les feuilletages mesurés  $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$  et  $\tilde{\mathfrak{F}}_\beta$ .



De même, on construit le  $\beta$  -atlas par déroulement le long de  $\beta$  (en respectant l'orientation).



Les changements de cartes sont des isométries de  $\mathbb{R}^2$  avec dérivée  $\pm 1$ , selon le signe du point d'intersection où est centrée la co-cellule. [Noter que le changement de cartes conservant l'orientation ne peut avoir pour dérivée la matrice diagonale  $\text{diag}(1, -1)$ .] Par conséquent, relativement à ces atlas, la notion de feuilletage mesuré linéaire est intrinsèque; d'ailleurs, la pente du feuilletage est invariante par changement de cartes. Une fois que l'on revient sur  $M$ , le feuilletage est lisse sauf aux co-sommets (chaque point du complémentaire est intérieur à au moins une carte). Les co-sommets apparaissent comme singularités (inexistantes si la cellule correspondante est un carré). Le nombre de séparatrices du feuilletage au sommet est la moitié du nombre de côtés de la cellule correspondante.

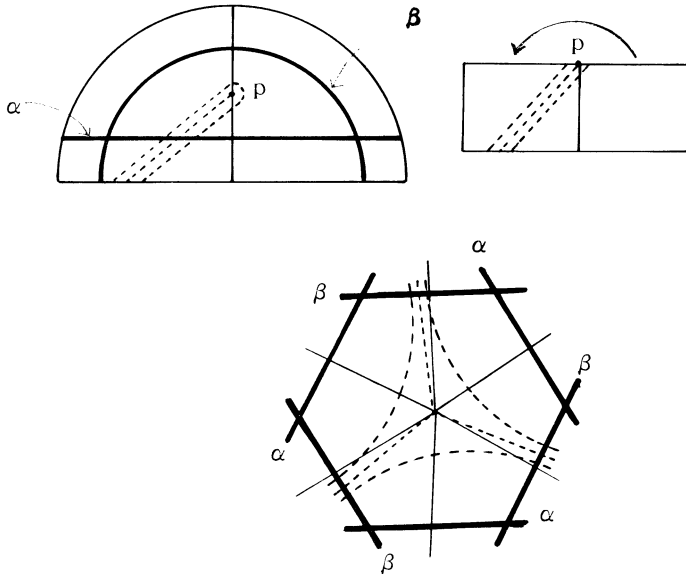


Figure 3

Remarque. Si tous les points d'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe, alors les changements de cartes ont  $+I$  pour dérivée ; donc, l'orientation des feuilletages est invariante par changement de cartes. Autrement dit dans ce cas, tous les feuilletages linéaires sont orientables. D'ailleurs, les atlas définissent une application  $M \rightarrow T^2$  qui est un revêtement à  $n$  feuillets ramifié en un point ; mais le revêtement  $n$  n'est pas régulier et on ne contrôle pas la fibre singulière.

### III. 2. Homéomorphismes affines.

Un homéomorphisme  $\varphi$  sera dit affine s'il laisse invariant l'ensemble des sommets et si l'image d'une droite de la structure plate est une droite. Soit  $A(M)$  le groupe des homéomorphismes affines.

La dérivée de  $\varphi$ , modulo  $\pm I$ , est indépendante de l'atlas utilisé et du point où on la calcule. On a donc un homomorphisme de dérivation

$$D : A(M) \longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) / \pm I .$$

Par exemple, le twist de Dehn positif le long de  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) admet un représentant affine qui, dans le  $\alpha$ -atlas (resp.  $\beta$ -atlas), est induit par la transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ [resp } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} ] .$$

Les dérivées de ces twists sont données par les classes de ces matrices dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

Remarque. C'est à ce point qu'on utilise qu'il n'y a que deux courbes. En effet, dans ce cas, le  $\alpha$ -atlas couvre tout  $M$  et l'homéomorphisme est bien défini par sa description dans le  $\alpha$ -atlas. D'ailleurs, s'il y a plus de deux courbes, le twist le long de  $\alpha$  ne peut pas en général être représenté par un homéomorphisme affine.

Lemme. Un homéomorphisme affine  $\varphi$  de  $M$  est un pseudo-Anosov généralisé si et seulement si  $D\varphi$  a des valeurs propres réelles  $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$  avec  $\lambda \neq 1$ .

Preuve. La condition sur  $D\varphi$  signifie que  $\varphi$  respecte deux feuilletages linéaires transverses en contractant les distances sur les feuilles de l'un et en les dilatant sur celles de l'autre, par un facteur constant.  $\square$

III. 3. Théorème. Soit  $G(\alpha, \beta)$  le sous-groupe de  $A(M)$  engendré par les twists de Dehn affines le long des courbes  $\alpha$  et  $\beta$  qui vérifient la condition  $(*)$ . La dérivation induit un homomorphisme  $D: G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Alors,  $\varphi \in G(\alpha, \beta)$  est un pseudo-Anosov généralisé si et seulement si  $D\varphi$  a des valeurs propres réelles distinctes de  $\pm 1$ . Si en plus,  $\text{card}(\alpha \cap \beta) = i(\alpha, \beta)$  (intersection minimale), alors  $\varphi$  est pseudo-Anosov.

Remarques. 1) Dans son annonce, Thurston dit qu'il existe un homomorphisme  $G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ ; étant donné sa valeur sur les deux twists, c'est un relèvement de  $D$ .

2) Une matrice de  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ , dont la trace a un module  $> 2$ , est d'Anosov. Donc, si  $\varphi$  est obtenu en combinant des twists positifs le long de  $\alpha$  et négatifs le long de  $\beta$ , avec au moins un de chaque, alors  $\varphi$  est un pseudo-Anosov généralisé.

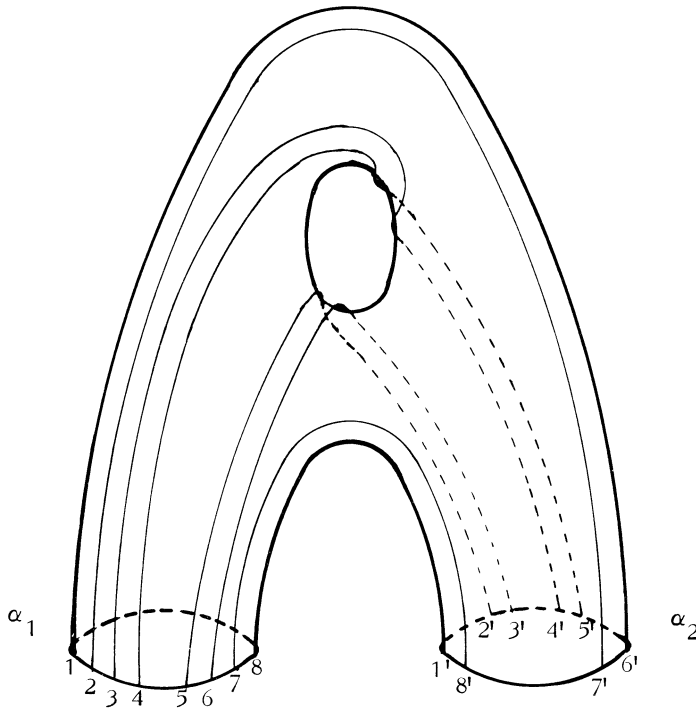
Démonstration du théorème. Après le lemme, il ne reste à prouver que la seconde assertion. Or un feuilletage linéaire a une épine si et seulement si le co-sommet correspondant est le centre d'une cellule à deux côtés; l'hypothèse d'intersection minimale interdit cette configuration.  $\square$

III. 4. Exemples.

Dans le premier exemple, on prend  $\alpha$  à complémentaire connexe dans

$M$  = surface fermée de genre 2 . Soient  $M'$  la surface obtenue en coupant  $M$  le long de  $\alpha$  ;  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les deux copies de  $\alpha$  qui bordent  $M'$  . Il faut 4 arcs joignant  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  pour couper  $M'$  en 2 cellules octogonales. Mais il n'y a aucune façon de recoller  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  pour que ces arcs fassent une courbe connexe ; en revanche, cela devient possible si chaque arc est dédoublé (voir figure 4) . Dans cet exemple, tous les points d'intersection sont du même signe, donc les feuilletages linéaires sont orientables ; ils ont donc deux singularités à 4 branches ; ils sont donc définis par des 1-formes fermées avec pour singularité des selles de Morse.

Figure 4



D'autres exemples résultent du lemme suivant.

Lemme. Soit  $\alpha$  une courbe simple non homotope à zéro sur la surface fermée  $M$  . Alors, il existe une courbe simple  $\beta$  telle que  $M - (\alpha \cup \beta)$  soit une union de cellules. De plus, si  $\alpha$  est homologue à zéro,  $\beta$  peut être choisie homologue à zéro.

Démonstration. On trouve une décomposition de  $M$  en pantalons par des courbes  $K_j$  telles que, pour tout  $j$  ,  $i(K_j, \alpha) \neq 0$  (si on pense à  $\alpha$  comme à un feuilletage mesuré



on applique le lemme 1 de V.4, exposé 6). Soit  $\beta$  la courbe obtenue en twistant  $\alpha$  d'un tour positif le long de chaque  $K_j$ . Prouvons d'abord que, pour tout  $\gamma \in \pi_1(M)$ ,  $i(\alpha, \gamma) \neq 0$  ou  $i(\beta, \gamma) \neq 0$ . Supposons  $i(\alpha, \gamma) = 0$ ; alors, pour un  $j$ ,  $i(\gamma, K_j) \neq 0$  sinon  $\gamma$  serait isotope à l'un des  $K_\ell$  et couperait  $\alpha$ . Appliquons maintenant l'inégalité de l'appendice, exposé 4 :

$$|i(\beta, \gamma) - \sum_j i(\alpha, K_j) i(\gamma, K_j)| \leq i(\alpha, \gamma) = 0.$$

Donc,  $i(\beta, \gamma)$  est strictement positif.

Ceci prouve que toute courbe simple  $\gamma$  dans  $M - (\alpha \cup \beta)$  est homotope à zéro et donc borde un disque  $D$  dans  $M$ . On voit que  $D$  est contenu dans  $M - (\alpha \cup \beta)$ ; en effet, dans le cas contraire,  $\text{int } D$  contiendrait un morceau de  $\beta$  (ou de  $\alpha$ ); comme  $\beta$  ne coupe pas le bord de  $D$ ,  $\beta$  serait entièrement contenu dans  $D$ , ce qui est absurde. A partir de là, il est facile de voir que les composantes de  $M - (\alpha \cup \beta)$  sont des disques ouverts.  $\square$

Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont homologues à zéro, les homéomorphismes affines induisent l'identité en homologie. Pourtant certains d'entre eux ne sont, à isotopie près, ni périodiques ni réductibles; ceci contredit une conjecture de Nielsen [1], disant que, si les valeurs propres de l'automorphisme induit en homologie sont sur le cercle-unité, alors le difféomorphisme serait décomposable en morceaux périodiques.

Remarque. Toutes les constructions précédentes conduisent à des pseudo-Anosov dont le facteur de dilatation est un entier quadratique. Les "membres du séminaire" ne savent pas construire d'exemple où il soit de degré plus élevé.

### RÉFÉRENCE

- [1] J. NIELSEN, Surface transformation classes of algebraically finite type, Danske Vid. Selsk. Math-Phys. Medd. 21 n° 2, 89 pp (1944)  
[voir le rapport de R.H. Fox dans Math. Rev. 7, p. 469].