

# *Astérisque*

AST

**Pages annexes (abstract et errata)**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 283-286

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__283_0)>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ABSTRACT

This book is an exposition of Thurston's theory of surfaces (measured foliations, compactification of Teichmüller space and classification of diffeomorphisms).

The mathematical content is roughly the following.

For a surface  $M$  (let's say closed, orientable, of genus  $g > 1$ ), one defines  $\mathcal{L}$  as the set of isotopy classes of simple closed curves in  $M$ . For  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ , one denotes by  $i(\alpha, \beta)$  the minimum number of geometric intersection points of  $\alpha'$  with  $\beta'$ , where  $\alpha'$  (resp.  $\beta'$ ) is a simple curve in the class  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). This induces a map  $i_* : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$  which turns out to be injective. In fact, if one projectivizes  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - \{0\}$ ,  $i_*$  induces an injection  $\mathcal{L} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$  which endows  $\mathcal{L}$  with a nontrivial topology. Here  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$  is provided with the weak topology (= product topology). Two curves  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$  are "near to each other" in  $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$  if, up to a multiple, they are made up by more or less the same strands going more or less in the same direction. This has nothing to do with homotopy theory.

The limits of curves are naturally interpreted as projective classes of "measured foliations", which means foliations with an "invariant" transverse distance, having a certain kind of singularities (well-known in the theory of quadratic holomorphic differentials, or in smectic liquid crystals). The space of measured foliations considered in  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$  (or in  $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$ ) is denoted by  $\mathfrak{MF}$  (resp.  $P\mathfrak{MF}$ ). One shows that :

$$\mathfrak{MF} \cong \mathbb{R}^{6g-6}, \quad P\mathfrak{MF} = S^{6g-7}.$$

In  $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$ ,  $P\mathfrak{MF}$  and the Teichmüller space  $\mathfrak{T}(M)$  glue together into a  $6g-6$  dimensional disk :

$$\overline{\mathfrak{T}(M)} = \mathfrak{T}(M) \cup P\mathfrak{MF}(M) = D^{6g-6}.$$

The group  $\text{Diff } M$  acts continuously on this compactification of  $\mathfrak{T}$  (this is hence "a natural compactification").

Hence any  $\varphi \in \text{Diff } M$  has a fixed point in  $\overline{\mathfrak{T}(M)}$  (Brouwer) and the analysis of this fixed point shows that (up to isotopy) each  $\varphi$  is either a hyperbolic isometry, or "Anosov-like" (the word is "pseudo-Anosov") or else "reducible".

Pseudo-Anosov diffeomorphisms minimize the topological entropy in their isotopy class. Also two pseudo-Anosov's which are isotopic are actually conjugate.

*ABSTRACT*

Every diffeomorphism  $\phi : M \rightarrow M$  has a (finite) spectrum defined in terms of the length of  $\phi^n \alpha$  raised to the power  $\frac{1}{n}$ . A pseudo-Anosov is characterized by the fact that the spectrum is reduced to a single value  $\lambda > 1$ .

There is a good method to produce many pseudo-Anosov's out of combination of Dehn's twists which is explained in "exposé 13".

The last two chapters are of a somewhat different character : "exposé 14" is about closed non singular 1-forms on 3-manifolds, and "exposé 15" about the Hatcher-Thurston theorem of finite presentability of  $\pi_0 \text{Diff } M$ .

## Errata

### Exposé 2, Théorème 2, page 21

G. Mess nous a signalé que les inclusions  $\text{Diff}(S^2) \hookrightarrow G(S^2)$  et  $\text{Diff}P^2 \hookrightarrow G(P^2)$  ne sont pas des équivalences d'homotopie.

Le théorème 2 n'est pas réutilisé dans la suite.

### Exposé 5, Proposition 5, page 134

L'argument pour la propriété est incomplet. Il manque d'envisager le cas d'une suite de métriques où la longueur de l'une des courbes  $K_i$  tend vers zéro. L'inégalité

$$(*) \quad \text{ch}(\ell(m, [K'_i])) \text{sh}(\ell(m, [K_i])) \geq 1$$

montre que, dans ce cas, la longueur de  $K'_i$  (et de  $K''_i$ ) tend vers l'infini.

On peut établir l'inégalité (\*) à partir de la formule 7.18.2, page 159 du livre de A. Beardon "*The geometry of discrete groups*" (Springer Verlag 1983).

Montrons comment elle résulte de la formule du haut de la page 153 de ce livre sur les côtés d'un hexagone à angles droits

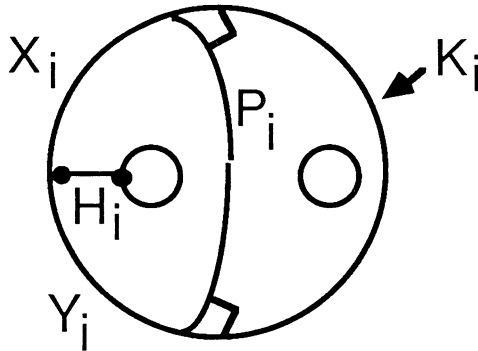


Figure 1

Avec les notations de la figure 1, la longueur de  $K'_i$  est supérieure à celle du pont  $P_i$  et la longueur de  $K_i$  est supérieure à la longueur de  $X_i$

et à celle de  $Y_i$ . Si on coupe suivant  $P_i$  et  $H_i$ , on obtient un hexagone à angles droits qui admet  $X_i, P_i, Y_i$  comme côtés consécutifs. La formule du haut de la page 153 montre alors que

$$\operatorname{ch}(\ell(m, P_i)) \operatorname{sh}(\ell(m, X_i)) \operatorname{sh}(\ell(m, Y_i)) \geq 1 + \operatorname{ch}(\ell(m, X_i)) \operatorname{ch}(\ell(m, Y_i)) \quad ;$$

d'où il résulte que

$$\operatorname{ch}(\ell(m, P_i)) \operatorname{sh}(\ell(m, X_i)) \geq 1$$

La formule (\*) en résulte. Il est clair, à partir de la démonstration, que cette formule n'est pas optimale. Signalons que c'est un cas particulier du "collar theorem" ou de l'inégalité de Margoulis.

### **Exposé 11, §3.6. Difféomorphisme pseudo-Anosov pour une variété à bord**

B.J. Jiang nous a signalé que, dans la définition d'un "difféomorphisme" pseudo-Anosov d'une variété à bord, on ne peut pas exiger d'être l'identité sur le bord. En particulier, la dernière phrase de la page 216 est incorrecte.