

# *Astérisque*

AST

## **Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 89-90 (1981), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1981\\_\\_89-90\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__89-90__1_0)

© Société mathématique de France, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

The present issue of "Asterisque" contains the texts of the lectures and talks delivered at the meeting on "Analytic Solutions of Partial Differential Equations" held in Trento (Italy) from 2. to 7. March 1981, as one of the activities of the "Centro Interuniversitario per la Ricerca Matematica" of the University of Trento. Invited lecturers were professors Akira Kaneko, Pierre Schapira and David S. Tartakoff.

The organization of this meeting began with the assistance of Aldo Andreotti whose recent important contribution to the problems taken as subject of the meeting are well known. His sudden death on February 21., 1980 left the Organizing Committee without the contribution of his ideas and the help of his experience.

The Organizing Committee and all the participants intend to dedicate to Aldo Andreotti the works of this meeting.

Lamberto Cattabriga



## LIST OF PARTICIPANTS

1. W. Abramczuk (University of Stockholm, Stockholm, Sweden)
2. A. Bove (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
3. G. Bratti (Istituto di Analisi Matematica, Università di Padova, Italy)
4. P. Carbonaro (Istituto Matematico, Università di Messina, Italy)
5. A. Cattabriga (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
6. M. Chicco (Istituto Matematico, Università di Genova, Italy)
7. E. De Giorgi (Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy)
8. A. De Vito (Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Ancona)
9. F. Favilli (Istituto Matematico, Università di Pisa, Italy)
10. R. Floris (Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, Roges, Italy)
11. B. Franchi (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
12. H.G. Garnir (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
13. A. Kaneko (Department of Mathematics, University of Tokyo, Tokyo, Japan)
14. P. Laubin (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
15. P. Leonard (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
16. O. Liess (Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule, Darmstadt, W. Germany)
17. J.L. Lieutenant (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
18. A. Lorenzi (Istituto Matematico, Università di Milano, Italy)
19. P. Lousberg (Institut de Mathématique, Université de Liège, Liège, Belgium)
20. D. Mari (Istituto Matematico, Università di Ferrara, Italy)
21. M. Nacinovich (Istituto Matematico, Università di Pisa, Italy)
22. P. Pantano (Dipartimento di Matematica, Università della Calabria, Roges, Italy)
23. C. Parenti (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
24. J. Persson (Institut for Matematiske Realfag, Tromsø, Norway)
25. L. Rodino (Istituto Matematico, Università di Torino, Italy)
26. P. Schapira (Département de Mathématiques, Univ. de Paris Nord, Paris, France)
27. F. Segala (Istituto Matematico, Università di Bologna, Italy)
28. S. Spagnolo (Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy)
29. D.S. Tartakoff (Dept. of Mathematics, Univ. of Illinois, Chicago, U.S.A.)
30. O. von Grudzinski (Mathematisches Seminar der Universität, Hamburg, W. Germany)
31. G. Viola (Istituto Matematico, Università di Genova, Italy)
32. G. Zampieri (Istituto di Analisi Matematica, Università di Padova, Italy)
33. L. Zanghirati (Istituto Matematico, Università di Ferrara, Italy)



TABLE DES MATIÈRES

A.KANEKO - On continuation of real analytic solutions of linear partial differential equations 11

Ce cours donne un exposé sur un problème spécial du prolongement des solutions analytiques réelles pour les équations aux dérivées partielles linéaires.

On y expliquera comment l'étude de la singularité isolée stable, commencée au moyen de l'analyse de Fourier pour les équations à coefficients constants, est développée pour trouver finalement le lien avec la théorie micro-locale contemporaine des équations aux dérivées partielles linéaires et même pour proposer à celle-ci de nouveaux problèmes intéressants.

P.SCHAPIRA - Une introduction à l'étude des systèmes d'équations microdifférentielles 45

Many properties of a module  $M$  over a  $\mathbb{Z}$ -filtered ring  $A$  can be obtained from the corresponding ones on  $\text{gr}(M)$  the associated graded module over  $\text{gr}(A)$  if we make some assumption of noetherianness on  $A$  and assume  $\text{gr}(A)$  commutative. We study in particular homological dimension, characteristic ideal, multiplicities, flatness, coherency, ... Our results are not really new, and some of them are explicitly in Björk's book, but they are useful in order to recover results of Sato-Kawai-Kashiwara on the ring of microdifferential operators as shown here. Finally we briefly recall how to treat the Cauchy problem for (overdetermined) systems of microdifferential equations, with the notion of "microcharacteristic directions".

D.S.TARTAKOFF - Elementary proofs of analytic hypoellipticity for  $\square_b$  and the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem 85

Des démonstrations purement  $L^2$  et classiques sont données pour des questions de l'hypoanalyticité (micro-)locale. On commence avec le cas elliptique, bien connu, pour donner des idées, et ensuite le cas sous-elliptique avec perte d'une dérivée sur une variété symplectique (mais, encore une fois, pour simplifier la démonstration, à coefficients constants). La deuxième partie est consacrée à des

résultats d'analyticité, obtenus avec L. Rothschild, dans un cas non-hypoelliptique et aux problèmes à coefficients variables (le  $\square_b$ , par exemple, et le problème  $\bar{\partial}$ -Neumann). Dans la troisième partie, on donne une esquisse d'une démonstration utilisant des méthodes élémentaires du résultat général de Métivier pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples.

**W.ABRAMCZUK - A remark on ellipticity of systems of linear partial differential equations with constant coefficients** 117

Soit  $\Omega$  un ouvert convexe borné  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $m$  un entier  $\geq 0$ ,  $L^2_{m,\bar{\Omega}}$  l'espace des fonctions à support dans  $\bar{\Omega}$ , de carré sommable ainsi que leur dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ , muni de la topologie habituelle. Soit  $P(D)$  un opérateur différentiel à coefficients constants, d'ordre  $N$ ,  $m-N \geq 0$ .

Il est facile à voir que pour que  $P(D)L^2_{m,\bar{\Omega}}$  soit fermé dans  $L^2_{m-N,\bar{\Omega}}$  il faut et il suffit que  $P(D)$  soit elliptique.

La question étudiée dans ce travail est la suivante: comment généraliser ce résultat aux systèmes  $P(D) = (P_{jk}(D))$ ,  $j = 1, \dots, J$ ,  $k = 1, \dots, K$  ?

Les cas des  $P(D)$  déterminés et non-déterminés sont traités dans Theorem 1 et Theorem 2, respectivement

**L.CATTABRIGA - Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients** 129

On prouve le théorème suivant: Soit  $P(D)$  un opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^n$  à coefficients constants et soit  $d \geq 1$  un nombre rationnel. On suppose qu'il existe un nombre fini de vecteurs  $N^j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $j=1, \dots, l$ , tels que  $\varepsilon$  pour certaines constantes  $k > 1$ ,  $\rho > d$ ,  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  et chaque

$$j = 1, \dots, l :$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, |\xi - \langle \xi, N^j \rangle N^j| \geq k, P(\xi + itN^j) = 0 \text{ implique}$$

$$\text{ou bien } t \geq -c_1 |\xi - \langle \xi, N^j \rangle N^j|^{1/\rho} \text{ ou bien } t \leq -c_2 |\xi|^{1/d} ;$$

$$b) \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^l \Delta_j$$

où  $\Delta_j = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \langle y, N^j \rangle\}$  pour des constantes positives  $\gamma_j, j=1, \dots, l$ .

Alors on a  $P(D)\Gamma^d(\mathbb{R}^n) = \Gamma^d(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Gamma^d(\mathbb{R}^n)$  étant l'ensemble (de Gevrey d'ordre  $d$ ) de toutes les fonctions indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs complexes telles que pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  et tout  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

TABLE DES MATIÈRES

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq c(K, f) |\alpha|^{+1} \Gamma(d|\alpha|+1)$$

où  $c(K, f)$  est une constante positive dépendant seulement de  $K$  et  $f$  et  $\Gamma$  est la fonction d'Euler.

E.DE GIORGI - Limits of functionals and differential operators 153

Le but de cette conférence est de donner une idée d'ensemble des problèmes découlants de l'étude des limites des familles de fonctionnelles et d'opérateurs différentiables. Quoique initialement développés dans le cadre du calcul des variations et des équations différentielles de la physique mathématique, ces problèmes et les méthodes qui en résultent peuvent s'avérer bien utiles pour l'étude des équations différentielles générales et de beaucoup d'autres questions mathématiques. C'est la raison pour laquelle il me semble intéressant de présenter ici les idées fondamentales de cette nouvelle théorie.

O.LIESS - Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and analytic regularity for partial differential equations with polynomial coefficients in the presence of growth type conditions 163

Soit  $p(x, t, D_x, D_t) = \sum_{|\alpha|/s + (s-1)|\beta|/s + j \leq m} a_{\alpha\beta j}(t) x^\alpha D_x^\beta D_t^j$ ,  $s > 1$ , un opérateur linéaire aux dérivées partielles, où les  $a_{\alpha\beta j}$  sont des fonctions analytiques réelles pour  $|t| < h, x \in \mathbb{R}^n$  et  $a_{00m} \equiv 1$ . Considérons les solutions  $u(x, t), x \in \mathbb{R}^n, |t| < h, u \in \mathcal{C}^\infty$ , telles que  $\exists B, \forall \gamma, \forall \ell, \exists c_{\gamma\ell}$  avec  $|D_x^\gamma D_t^\ell u(x, t)| \leq c_{\gamma\ell} \exp(B|x|^s)$ .

Les résultats principaux sont les suivants:

a) relative à l'unicité des solutions du problème de Cauchy caractéristique:

Supposons que  $u(x, t) = 0$  pour  $t < 0$ . Alors  $u \equiv 0$ .

b) relative à la régularité des solutions: Supposons que  $(\xi, \tau) \neq 0$

$$\Rightarrow \sum_{(s-1)|\beta|/s + j = m} a_{\alpha\beta j}(t) \xi^\beta \tau^j \neq 0. \text{ Alors } u \text{ est analytique réelle}$$

Dans les preuves nous utilisons une technique de microlocalisation basée sur une notion de spectre singulier pour des fonctions avec conditions de croissance à l'infini.



J.L.LIEUTENANT - Applications of decompositions of holomorphic functions to partial differential equations with constant coefficients 203

Soit  $\mathcal{D}$  l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants. On montre que pour tout  $P \in \mathcal{D}$ , l'équation  $Pu = f$  est résoluble dans l'espace des fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}^n$  qui admettent une décomposition en somme de fonctions holomorphes dans des tubes coniques dont les polaires ne rencontrent pas la variété caractéristique de  $P$ . On prouve également que pour tout  $\mathcal{D}$ -module de type fini  $\mathcal{M}$ , les  $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^j(\mathcal{M}, \cdot)$  s'annulent pour  $j \geq 1$  sur certains espaces de fonctions holomorphes.

P.LOUSBERG - Backward parabolic equations 213

Nous établissons dans cet article un théorème de régularité des traces d'une distribution solution d'une équation parabolique rétrograde du premier ordre. La méthode utilisée consiste à construire une solution approchée d'un problème de Cauchy associé à l'équation considérée.

J.PERSSON - Singular holomorphic solutions of linear partial differential equations with holomorphic coefficients and nonanalytic solutions of equations with analytic coefficients 223

Soit  $P$  un opérateur linéaire aux dérivées partielles et aux coefficients analytiques dans un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$ . On construit des solutions  $u \in C^\infty$  de  $Pu = 0$  telles que  $D^\xi u = 0$ ,  $x_1 = 0$ , tous  $\xi$ ,  $0 \in \text{supp } u$  ou des solutions  $u \in C^k$ ,  $u \notin C^{k+1}$ ,  $k \geq m$ , telles que  $D^\xi u = 0$ ,  $|\xi| \leq k$ ,  $0 \in \text{supp } u$  quand  $x_1 = 0$  est caractéristique de multiplicité constante et sous certaines autres conditions sur  $P$ . Ces dernières conditions sont toujours satisfaites dans le cas  $C^\infty$  quand  $P$  a des coefficients constants. On met en évidence le lien entre ces résultats et l'existence des solutions holomorphes avec singularités sur  $x_1 = 0$  quand  $P$  est considéré comme un opérateur différentiel en  $\mathbb{C}^n$ . Ces constructions sont seulement indiquées.

Les résultats généralisent des vieux résultats sur la nonunicité du problème

TABLE DES MATIÈRES

de Cauchy caractéristique.

Pour  $r$ ,  $3 \leq r \leq n$  on donne aussi des résultats quand  $x_1 = 0$  est substitué par un ensemble défini par  $x_1 = 0$  ou  $x_j = 0$  pour  $3 \leq j \leq r$ , ou par  $x_1 = 0$  et  $x_j = 0$ ,  $3 \leq j \leq r$ .

L. RODINO - Gevrey hypoellipticity for a class  
of operators with multiple characteristics

249

On a démontré un théorème de régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs quasi-elliptiques dégénérés; le résultat peut s'appliquer par exemple à

$P = D_x - r_1 x^h D_y^k$  et à  $P = (D_x - r_1 x^h D_y^k)(D_x - r_2 x^h D_y^k) + \lambda x^{h-1} D_y^k$ ,  $\text{Im } r_1 \neq 0$ ,  $\text{Im } r_2 \neq 0$ , pour lesquelles on a la régularité  $G^{(k,1)}$  dans  $R_{x,y}^2$ .