MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

# Sur la croissance des nombres de Betti de l'espace des lacets libres sur un espace donné

*Astérisque*, tome 113-114 (1984), p. 344-348

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__113-114__344_0>

# SUR LA CROISSANCE DES NOMBRES DE BETTI DE L'ESPACE DES LACETS LIBRES SUR UN ESPACE DONNÉ

par

Micheline VIGUÉ-POIRRIER

Tous les espaces topologiques considérés sont 1-connexes et tels que, pour tout $n \geqslant 0$, l'espace vectoriel dim $H^n(.,Q)$ soit de dimension finie, ceci implique que $\Pi_n(.) \otimes Q$ est aussi de dimension finie pour tout $n$.

Si $X$ est un tel espace, on notera $\Omega X$ l'espace des lacets d'origine fixée et $X^{S^1}$ l'espace des lacets libres muni de la topologie compacte ouverte. On note $b_i(X^{S^1}) = \dim H^i(X^{S^1},Q)$ le ième nombre de Betti de $X^{S^1}$.

Rappelons que l'application $p : X^{S^1} \to X$ qui, à un lacet, associe son origine, est une fibration de fibre $\Omega X$.

Beaucoup de problèmes de géométrie différentielle ont une formulation équivalente en utilisant le langage de l'homotopie rationnelle ; ce qui rend d'autant plus intéressant l'étude des nombres de Betti de $X^{S^1}$, à l'aide de l'homotopie rationnelle.

Un des problèmes les plus étudiés en géométrie est le suivant : "Est-ce que sur une variété riemannienne fermée 1-connexe $V$, il existe une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes ?".

En 1969, Gromoll et Meyer [G-M] démontrent que si les nombres de Betti de $V^{S^1}$ ne sont pas bornés, alors il existe sur $V$ une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes.

Plusieurs années plus tard, utilisant la théorie du modèle minimal de Sullivan, [Su], Sullivan et Vigué démontrèrent le théorème suivant :

THÉORÈME [S-V] : Soit $X$ un espace 1-connexe, tel que $\dim H^*(X,\mathbb{Q}) < \infty$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) les nombres de Betti de $X^{S^1}$ ne sont pas bornés.

(2) $\dim \sum_{i\geq 1} \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \geq 2$

(3) l'algèbre $H^*(X.\mathbb{Q})$ ne peut pas être engendrée par un générateur et $H^*(X,\mathbb{Q}) \neq Q$.

Un second problème intéressant en géométrie est de connaître le nombre de géodésiques fermées géométriquement distinctes de longueur $< n$ ($n$ entier fixé) sur une variété $V$ donnée.

Dans [Gr], Gromov dit que le nombre de telles géodésiques de longueur $< n$ est minoré par $C/n \sum_{i=1}^{n} b_i(V^{S^1})$ où $C$ est une constante ; (si $V$ est munie d'une métrique "bumpy") ; ceci nous amène à étudier la série de Poincaré $S_{X^{S^1}}(T) = \sum_p \dim H^p(X^{S^1})T^p$ et à la comparer à $S_X(T) = \sum_p \dim H^p(X,\mathbb{Q})T^p$, $S_{\Omega X} = \sum \dim H^p(\Omega X,\mathbb{Q})T^p$, $S_{\Pi X} = \sum \dim \Pi_p(X) \otimes \mathbb{Q}\ T^p$, pour un espace $X$ quelconque.

Le théorème suivant montre qu'en général, l'étude de la fibration $\Omega X \xrightarrow{j} X^{S^1} \xrightarrow{p} X$ ne nous donne pas de renseignements sur $S_{X^{S^1}}$.

THÉORÈME [V-1] : Pour le fibré $\Omega X \xrightarrow{j} X^{S^1} \xrightarrow{p} X$, on a les équivalences :

(1) $H^*(X,\mathbb{Q})$ est une algèbre graduée commutative libre

(2) $j^* : H^*(X^{S^1},\mathbb{Q}) \to H(\Omega X,\mathbb{Q})$ est surjective

(3) la suite spectrale de Serre du fibré vérifie $d_i = 0$, $\forall i \geq 2$

(4) $S_{X^{S^1}}(T) = S_X(T).S_{\Omega X}(T)$.

Ceci montre que pour une variété compacte $V$ de dimension $n$, telle que $H^*(V,R)$ ne soit pas une algèbre commutative libre, les nombres de Betti $b_i(V^{S^1})$ sont inférieurs (et non tous égaux) aux coefficients de la série formelle $P(T).S_{\Omega V}(T)$ où $P(T) = \sum_{p=0}^{n} \dim H^p(V)\ T^p$ est un polynôme (réciproque) de degré $n$.

Les travaux de Félix et Halperin [F-H] montrent que les espaces X 1-connexes tels que $\dim H^*(X) < \infty$ se divisent en deux familles disjointes :

I) Espaces tels que $\dim \Pi_*(X) \otimes Q < \infty$, appelés elliptiques ; alors $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \geq q = \sum_j \dim \Pi_{2j}(X) \otimes \mathbb{Q}$, $S_{\Omega X}$ est une fraction rationnelle, et dans le développement en série formelle de $[1/(1-T)].S_{\Omega X}$ le coefficient de $T^n$ croit comme $n^p$.

II) Espaces tels que $\dim \Pi_*(X) \otimes Q = \infty$, appelés hyperboliques ; alors les séries $S_{\Omega X}$ et $S_{\Pi X} = \sum_p \dim \Pi_p(X) \otimes \mathbb{Q}\ T^p$ croissent exponentiellement, i.e. il existe

$C_1 \geq C_2 > 1$ et un entier $N$ tels que $\forall n \geq N$ le coefficient de $T^n$ dans $[1/(1-T)].S_{\Omega X}$ est minoré par $C_2{}^n$ et majoré par $C_1{}^n$.

Nous formulons alors la conjecture suivante pour étudier le problème énoncé dans [Gr].

CONJECTURE : Les nombres de Betti de $X^{S^1}$ croissent comme ceux de $\Omega X$.

Voici les résultats déjà obtenus sur cette conjecture.

I) Espace elliptique :

Remarque : Le théorème de [S-V] cité plus haut démontre la conjecture pour tout espace tel que $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \leq 2$.

THÉORÈME I.1 : Soit $X$ un espace tel que $\dim H^*(X) < \infty$, pur, elliptique et soit $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$, alors il existe une constante $A$ et un entier $N$ tels que $\forall n \geq N$

$$\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1},\mathbb{Q}) \geq An^p.$$

Définition : Un espace est dit pur s'il possède un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda Z,d)$ ayant les propriétés suivantes : $d_{|Z^{pair}} = 0$, $d(Z^{impair}) \subset \Lambda Z^{pair}$.

Exemples : $S^k$, $k \geq 2$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, $G/H$ où $G$ est un groupe de Lie compact et $H$ un sous-groupe fermé,... ainsi que les produits d'espaces purs sont des espaces purs.

COROLLAIRE I.2 : Soit $X$ un espace tel que $\dim H^*(X) < \infty$, $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, $\chi_\Pi = \sum_i (-1)^i \dim \Pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$, alors il existe une constante $A$ et un entier $N$ tels que $\forall n \geq N$, $\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1},\mathbb{Q}) \geq An^p$ si $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Le corollaire découle du théorème I.1 et d'un théorème de Halperin [H] qui dit qu'un tel espace est pur.

Le théorème I.1 résulte du théorème suivant :

THÉORÈME I.3 : Soit $X$ un espace tel que $\dim H^*(X) < \infty$, $\dim \Pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, supposons que $X$ possède un modèle minimal $(\Lambda Z,d)$ tel que $dZ \subset Z^{pair}.\Lambda Z$, alors $\exists A > 0$ et un entier $N$ tels que $\forall n \geq N$ $\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X^{S^1},\mathbb{Q}) \geq An^p$, où $p = \sum_i \dim \Pi_{2i+1}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

La démonstration de ce théorème utilise des méthodes voisines de celles utilisées pour démontrer le théorème de [S-V].

Le contre-exemple suivant montre que les hypothèses du théorème I.3 ne peuvent être affaiblies.

CONTRE-EXEMPLE I.4 : Soit $(\Lambda Z,d) = \Lambda(x,y,z,d)$, $\deg x=5$, $\deg y=3$, $\deg z=3$, $dy=dz=0$, $dx=yz$, modèle minimal d'un espace $X$. On montre que $b_n(X^{S^1})$ est un polynôme de degré 1 en $n$.

II) Espaces hyperboliques formels (i.e. ayant même modèle minimal que leur algèbre de cohomologie).

Les résultats obtenus utilisent le théorème préliminaire :

THÉORÈME II.0 : Soit $X$ un espace 1-connexe formel tel que $H = \dim H^*(X,\mathbb{Q}) < \infty$ Soient $(d_1,\dots,d_p)$ les degrés d'une base de l'espace vectoriel $H^+/H^{+2}$ et $(e_2,\dots,e_q)$ les degrés d'une base de l'espace vectoriel gradué $H^{+2}$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^n(X^{S^1}) \geq \sum_{i=1}^{p} \dim \Pi_{n-d_i+1}(X) \otimes \mathbb{Q} - \sum_{i=1}^{q} \dim \Pi_{n-e_i+2}(X) \otimes \mathbb{Q} - \dim \Pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

La démonstration de ce théorème utilise le calcul du modèle minimal de $X^{S^1}$ fait dans [S-V] et la théorie du modèle minimal bigradué de [H-S].

THEOREME II.1 : Soit $X = \bigvee_{i=1}^{p} S^{k+1}$ le bouquet de $p$ sphères $(p \geq 2)$ de même dimension $k+1 \geq 2$. Alors la série $S_{X^{S^1}}$ est à croissance exponentielle.

Ce théorème se démontre uniquement à l'aide du théorème II.0, de la formule de Hilton-Steer $[S_{\Omega X}(T)]^{-1} = 1-pT^k$ et du fait que

$$[S_{\Omega X}(T)]^{-1} = \prod_n (1-(-1)^n T^n)^{(-1)^n \rho_{n+1}}$$

où $\rho_n = \dim \Pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$.

THÉORÈME II.2 : Soit $X$ une intersection complète de $r$ hypersurfaces dans $P_{\mathbb{C}}^{r+n}$ $(n \geq 2,\ r \geq 1)$, telle que $|\chi-n-1| \geq 2$ où $\chi$ est la caractéristique d'Euler alors la série $S_{X^{S^1}}$ est à croissance exponentielle.

La démonstration utilise le théorème II.0, les calculs de Babenko dans [Ba 1] et [Ba 2] qui donnent une expression de $\dim \Pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ en fonction des fonctions symétriques du polynôme $z^{2n-1}-(-1)^n(\chi-n-1)z^{n-1}(1+z) + 1$.

THÉORÈME II.3 : Soit $X = (S^n\times S^n) \# (S^n\times S^n) \# \dots \# (S^n\times S^n)$ somme connexe de $g$ copies de $S^n\times S^n$ où $g \geq 2$ et $n$ un entier impair, $n \geq 3$. Alors la série de Poincaré $S_{X^{S^1}}$ est à croissance exponentielle. Plus précisément $\forall p \geq 2$, il existe $\phi_p \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $\dim H^{p(n-1)+n}(X^{S^1}) \geq \phi_p(g)$ et le terme de plus haut degré de $\phi_p$ est $(2x)^{p+1}/p(p+1)$.

Preuve : Elle résulte du théorème II.0, des calculs de Babenko [Ba 1] et de l'étude de la cohomologie de X faite dans [F-H].

Ces résultats sont détaillés dans [V 2].

## BIBLIOGRAPHIE

[Ba 1] Babenko I.K. On analytic properties of the Poincare Serie of loop spaces. Math. Zametki 27, 751-765.

[Ba 2] Babenko I.K. On real homotopy properties of complete intersections ; Math USSR. Isvestijr Vol. 15 (1980).

[F-H] Félix Y., Halperin S. Rational L.S. category and its applications. à paraître aux Trans. am. math. soc.

[G-M] Gromoll D., Meyer W. Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds. J. diff. geom. 3 (1969) 493-510.

[Gr] Gromov M. Homotopical effects of dialation. J. diff. geom. 13 (1978) 303-310.

[H] Halperin S. Finiteness in minimal models. Trans. am. math. soc. 230 (1977) 173-199.

[H-S] Halperin S., Stasheff J. Obstructions to homotopy equivalences. Advances in Math. 32 (1979) 233-279.

[Su] Sullivan D. Infinitesimal computations in topology. I.H.E.S. Publ. Math. 47 (1978) 269-331.

[S-V] Sullivan D., Vigué-Poirrier M. The homology theory of the closed geodesic problem. J. diff. geom. 11 (1976) 633-644.

[V-1] Vigué-Poirrier M. Le fibré de l'espace des lacets libres n'est pas en général T.N.C.Z. à paraître aux Math. Zeitschrift.

[V-2] Vigué-Poirrier M. Homotopie rationnelle et croissance du nombre de géodésiques fermées. Preprint Université de Lille (1982).