

# *Astérisque*

A. GALLIGO

M. GRANGER

PH. MAISONOBE

***D*-Modules et faisceaux pervers dont le support  
singulier est un croisement normal II**

*Astérisque*, tome 130 (1985), p. 240-259

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1985\\_\\_130\\_240\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130_240_0)

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**$\mathcal{D}$ -MODULES ET FAISCEAUX PERVERS DONT LE SUPPORT  
SINGULIER EST UN CROISEMENT NORMAL II**

---

A. GALLIGO      M. GRANGER      Ph. MAISONOBE

Soit  $X$  un polydisque ouvert centré en zéro de  $\mathbb{C}^n$  et  $T$  le croisement normal d'équation  $z_1 z_2 \dots z_n = 0$ . Notons  $\mathcal{O}_X$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $X$ ,  $\mathcal{D}_X$  le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{O}_X$ . Le foncteur :  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$  établit ([K<sub>1</sub>], [M], [B], et [K] pour une autre démonstration) une équivalence de catégorie entre les  $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes réguliers et la catégorie  $\text{Perv}(X)$  des faisceaux pervers. On obtient ainsi une équivalence entre d'une part  $(\mathcal{D}_X^T)_{\text{hr}}$  la catégorie des  $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes réguliers dont le support singulier (c'est-à-dire la projection sur  $X$  de la variété caractéristique) est contenu dans  $T$  et d'autre part  $\text{Perv}^T(X)$ , catégorie des faisceaux pervers relativement à la stratification naturelle de  $T$ .

Soit  $\mathcal{C}_n$  la catégorie dont les objets sont les  $n$ -hypercubes de  $\mathbb{C}$  espaces vectoriels de dimension finie  $\{F_I; I \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$  où les  $F_I$  sont reliés par des applications linéaires  $F_I \begin{matrix} \xrightarrow{u_i} \\ \xleftarrow{v_i} \end{matrix} F_{I \cup \{i\}}$  assujetties aux conditions

$$u_i u_j = u_j u_i, \quad v_i v_j = v_j v_i, \quad u_i v_j = v_j u_i, \quad v_i u_i + 1d \text{ inversible.}$$

Dans les deux premiers chapitres, nous donnons les grandes lignes de la démonstration de l'équivalence de catégorie entre  $\text{Perv}^T(X)$  et  $\mathcal{C}_n$  détaillée dans [G.G.M]. Cette démonstration est obtenue par la construction effective de deux foncteurs quasi-inverses :  $\text{Perv}^T(X) \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{matrix} \mathcal{C}_n$ . Au Chapitre III, nous décrivons les objets simples de  $\mathcal{C}_n$  et de  $\text{Perv}^T(X)$  et caractérisons les objets de  $\mathcal{C}_n$  qui correspondent aux complexes d'intersection au sens de [G.M].

Au Chapitre IV nous donnons une interprétation en termes de  $\mathcal{D}$ -Modules de nos résultats. Notons  $\mathcal{D}_X^T$  la catégorie des  $\mathcal{D}_X$ -Modules holonomes sur  $X$  dont le support singulier est contenu dans  $T$ .  $\text{Sol}(\mathcal{M}) = \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ , où  $\mathcal{M} \in \mathcal{D}_X^T$  est toujours un élément de  $\text{Perv}^T(X)$ . La commutativité des foncteurs  $R\Gamma_K$  et  $\mathbb{R} \text{Hom}(\mathcal{M}, \cdot)$  permet de décrire le foncteur  $\alpha \circ \text{Sol} : \mathcal{D}_X^T \rightarrow \mathcal{C}_n$ . En utilisant l'équivalence de catégorie  $\alpha \circ \text{Sol} : (\mathcal{D}_X^T)_{\text{hr}} \rightarrow \mathcal{C}_n$ , on obtient une série de propriétés sur  $(\mathcal{D}_X^T)_{\text{hr}}$  qu'il suffit de vérifier sur les objets simples. Les théorèmes généraux sur les  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^\infty$ -Modules nous autorisent à étendre ces résultats à  $\mathcal{D}_X^T$ .

NOTATIONS

$X$	variété analytique complexe
$\mathbb{C}_X$	catégorie des faisceaux d'espaces vectoriels
$K(\mathbb{C}_X)$	catégorie des complexes d'objets de $\mathbb{C}_X$ avec morphisme défini à homotopie près
$D(\mathbb{C}_X)$	catégorie dérivée associée
$D^b(\mathbb{C}_X)$	sous-catégorie pleine des objets bornés
	Pour $\mathcal{F}^\bullet$ objet de $K(\mathbb{C}_X)$ (ou $D(\mathbb{C}_X)$ ) , on note :
$h^i(\mathcal{F}^\bullet)$	son $i^{\text{ème}}$ faisceau de cohomologie
$\mathcal{F}_x^\bullet$	sa fibre en un point $x$ de $X$
$\mathcal{F}^\bullet[k]$	complexe égal à $\mathcal{F}^\bullet$ en degré $k+n$ dont la différentielle est celle de $\mathcal{F}^\bullet$ multipliée par $(-1)^k$
$\Gamma_A$	foncteur de $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_X$ égal pour $A$ fermé au foncteur section à support $A$ et pour $A$ ouvert à $i_*i^{-1}$ , où $i : A \rightarrow X$ est l'inclusion ouverte
$\Gamma_A$	est aussi défini pour les localement fermés, de façon que
	$\Gamma_A \Gamma_B = \Gamma_{A \cap B}$
$R\Gamma_A$	foncteur dérivé de $\Gamma_A$ ( $R\Gamma_A R\Gamma_B = R\Gamma_{A \cap B}$ )

. Dans tout ce travail, les triangles dans  $D(\mathbb{C}_X)$  sont notés "à plat"  $A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet$  , ou simplement  $A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet$  .

$\xleftarrow{+1}$

I . TRADUCTION DES CONDITIONS DE PERVERSITÉ

Soit  $X$  une variété analytique complexe lisse de dimension  $n$  et  $\Sigma$  une stratification analytique complexe de Whitney de  $X$  :

$$X = \bigcup_{0 \leq j \leq n} \Sigma_j .$$

$\Sigma_j$  est la strate lisse de dimension complexe  $j$  .

Un complexe  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $D(\mathbb{C}_X)$  est dit à cohomologie constructible relativement à  $\Sigma$  , si pour tout entier  $i$  ,  $h^i(\mathcal{F}^\bullet)$  , le  $i^{\text{ème}}$  groupe de cohomologie de  $\mathcal{F}^\bullet$  , vérifie :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad h^i(\mathcal{F}^\bullet)|_{\Sigma_j} \text{ est un système local.}$$

I.1. DÉFINITION . Un élément  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $D(\mathbb{C}_X)$  à cohomologie constructible relativement à  $\Sigma$  est dit pervers relativement à  $\Sigma$  , si les conditions Aa, Ab, B sont vérifiées :

Aa)  $\forall i \notin \{0, 1, \dots, n\} \quad h^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$

Ab) le support du faisceau  $h^i(\mathcal{F}^\bullet)$  est contenu dans

$$\bar{\Sigma}_{n-i} = \bigcup_{0 \leq j \leq n-i} \Sigma_j$$

B) mêmes conditions que Aa et Ab , en remplaçant  $\mathcal{F}^\bullet$  par

$$\mathbb{R} \text{ Hom}(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{C}_X) = \mathcal{F}^\vee .$$

I.2. PROPOSITION . Un complexe  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $D(\mathbb{C}_X)$  à cohomologie constructible relativement à  $\Sigma$  est pervers relativement à  $\Sigma$  si les conditions Aa et Ab de la définition I.1 sont vérifiées ainsi que :

B)  $(R\Gamma_{\Sigma_{n-j}} \mathcal{F}^\bullet)|_{\Sigma_{n-j}}$  est concentré en degré  $\geq j$  .

Preuve . voir [ G.G.M. ]

Soit  $T$  le croisement normal de  $X = \mathbb{C}^n$  d'équation  $z_1 z_2 \dots z_n = 0$  ,  $S$  une variété analytique complexe lisse qui jouera le rôle d'un ensemble de paramètres. Stratifions  $X \times S$  par

$$\begin{aligned} \Sigma_{n+\dim S} &= (\mathbb{C}^n - T) \times S, \quad \Sigma_{n-1+\dim S} = (T - \text{Sing } T) \times S, \dots, \\ \Sigma_{\dim S} &= \{0\} \times S . \end{aligned}$$

I.3. NOTATION .  $\text{Perv}^{T \times S}(X \times S)$  désignera la sous-catégorie pleine de  $D(\mathbb{C}_{X \times S})$  formée des complexes pervers relativement à cette stratification de  $X \times S$  .

II . FAISCEAUX PERVERS RELATIVEMENT A UN CROISEMENT NORMAL

II.1. NOTATIONS .

$$\text{Soit } X = \mathbb{C}^n = \coprod_{i=1}^n \mathbb{C}_i$$

$$K_i = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}_i, \quad V_i = \mathbb{C}_i - K_i, \quad K'_i = K_i - \{0\}$$

{ I, J, L } désignant une partition de { 1, 2, ..., n } , on considère les sous-espaces localement fermés de  $\mathbb{C}^n$  :

$$Z_{I,J,L} = \coprod_{i=1}^n W_i \quad \text{où } W_i = K_i \text{ si } i \in I, \quad W_i = \mathbb{C}_i \text{ si } i \in J \\ W_i = V_i \text{ si } i \in L .$$

{ A, B, C } désignant une partition de { 1, 2, ..., n } , on considère la stratification réelle de  $\mathbb{C}^n$  :

$$S_{A,B,C} = \coprod_{i=1}^n W_i \quad \text{où } W_i = K'_i \text{ si } i \in A, \quad W_i = \{0\} \text{ si } i \in B \\ W_i = V_i \text{ si } i \in C .$$

Soit  $\mathcal{F}^\bullet$  un objet de  $\text{Perv}^T(X)$  (voir notation I.3) , on note :

$$\mathcal{F}_{I,J,L}^\bullet = R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{F}^\bullet$$

Ces complexes sont à cohomologies constructibles relativement à la stratification réelle  $S_{A,B,C}$  .

L'objet de l'étude qui suit est le diagramme du type hypercube à  $3^n$  termes reliant les  $\mathcal{F}_{I,J,L}^\bullet$  constitué par les triangles  $\mathcal{C}_{I,J,L,i}$  suivant de  $D^b(\mathbb{C}_X)$  , où { I, J, L, { i } } est une partition de { 1, 2, ..., n } :

$$\mathcal{F}_{I \cup \{i\}, J, L}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}_{I, J \cup \{i\}, L}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}_{I, J, L \cup \{i\}}^\bullet$$

Le centre de cet hypercube est  $\mathcal{F}^\bullet$  et ses sommets sont :

$$\mathcal{F}_I^\bullet = R\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\bullet, \quad \text{où } Z_I = Z_{I, \phi, \{1, 2, \dots, n\} - I} .$$

On note  $|I|$  le cardinal de I .

II.2. CONSTRUCTION DES FONCTEURS  $\alpha$  ET  $\beta$  .

II.2.1. PROPOSITION . Le complexe  $\mathcal{F}_I^\bullet$  est concentré en degré  $|I|$  .

NOTATION .  $\tilde{\mathcal{F}}_I$  désignera le faisceau  $R^{|I|}\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\bullet$  .

On a ainsi un isomorphisme dans  $D^b(\mathbb{C}_X)$  :

$$\mathcal{F}_I \cong \tilde{\mathcal{F}}_I [- |I| ] \quad .$$

Les triangles  $\mathcal{C}_{I,\phi,J,i}$  fournissent des morphismes de faisceaux :

$$\Delta_i : \tilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}} \quad .$$

En remplaçant  $\Delta_i$  par  $U_i = (-1)^{n_{I,i}} \Delta_i$ , où  $n_{I,i}$  est le cardinal de l'ensemble  $\{j \in I, j \geq i\}$ , on obtient un diagramme commutatif (l'hypercube des faisceaux  $\tilde{\mathcal{F}}_I$ ).

NOTATION .  $F_I = (\tilde{\mathcal{F}}_I)_O$  (fibre en 0)  
 $u_i = (U_i)_O : F_I \longrightarrow F_{I \cup \{i\}}$  .

II.2.2. PROPOSITION . La restriction de  $\tilde{\mathcal{F}}_I$  à  $S_{A,B,C}$  est isomorphe à un faisceau constant de type  $(F_I)^N$ . La restriction de  $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2,\dots,n}$  à la strate  $K_I = S_{I',I,\phi}$  de  $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$  est le faisceau constant  $F_I$  .

Comme  $K_I \cup \{i\} \subset \bar{K}_I$ , on en déduit des morphismes de recollement du faisceau  $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2,\dots,n}$  :

$$v_i : F_{I \cup \{i\}} \longrightarrow F_I \quad .$$

Ces morphismes dépendent du choix d'un isomorphisme  $\tilde{\mathcal{F}}_{1,2,\dots,n|K_I} \cong F_I$  ; mais on a précisément :

II.2.3. PROPOSITION . On peut choisir dans II.2.2 des isomorphismes dépendant fonctoriellement de  $\tilde{\mathcal{F}}$  de façon que  $(F_I, u_i, v_i)$  soit un objet de  $\mathcal{C}_n$  .

On a ainsi obtenu un foncteur  $\alpha : \text{Perv}^T(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n$  .

De plus, à tout objet  $\underline{F}$  de  $\mathcal{C}_n$ , on peut associer un diagramme de faisceaux  $(\tilde{\mathcal{F}}_I, U_i)$  isomorphe à  $(\tilde{\mathcal{F}}_I, U_i)$  lorsque  $\underline{F} = \alpha(\tilde{\mathcal{F}})$ . Ceci résulte des deux propositions suivantes :

II.2.4. PROPOSITION . Les restrictions des morphismes  $U_i : \tilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$  à chaque strate  $S_{A,B,C}$  et les morphismes de recollement de  $\tilde{\mathcal{F}}_I$  entre strate s'expriment à l'aide des formules universelles ne dépendant que des  $u_i, v_i$  :

$$(F_{I'_1})^{N_1} \xrightarrow{\Psi(\{u_i, v_i\})} (F_{I'_2})^{N_2} \quad .$$

Pour le détail de ces formules et les valeurs exactes de  $(F_I)^N$  dans la proposition II.2.2., on se reportera à [G.G.M.] .

Elles permettent d'assurer les résultats suivants :

II.2.5. PROPOSITION . A tout objet de  $\mathcal{C}_n$  on peut associer un diagramme  $\bar{\mathcal{F}}_I$  de faisceaux et de morphismes  $U_i : \bar{\mathcal{F}}_I \rightarrow \bar{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$  , où  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$  et  $i \notin I$  , tels que :

$$\bar{\mathcal{F}}_I|_{S_{A,B,C}} = (F_I)^N \quad (I', N \text{ étant donné dans II.2.2}) .$$

Les restrictions de  $U_i$  aux strates et les morphismes de recollement sont donnés par les formules de la Proposition II.2.4.

Pour obtenir un diagramme dont chaque carré soit anticommutatif, on note  $\Delta_i = (-1)^{n-I, i} U_i$  et on considère le complexe simple associé  $\beta(\underline{F})$  :

$$\begin{aligned} \beta(\underline{F})_k &= \bigoplus_{|I|=k} \bar{\mathcal{F}}_I \quad \text{muni des différentielles} \\ d_k &= \sum_{i \in I, |I|=k} \Delta_i \end{aligned}$$

II.2.6. PROPOSITION . Pour tout objet de  $\mathcal{C}_n$  ,  $\beta(\underline{F})$  est un complexe pervers relativement à  $T$  .

On peut énoncer le théorème :

II.2.7. THÉORÈME . Les foncteurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont quasi inverses.

### II.3. INDICATION SUR LES DÉMONSTRATIONS

Pour les propositions II.2.2. à II.2.6. de nature assez technique, nous renvoyons le lecteur à [ G.G.M. ] .

Pour démontrer la proposition II.2.1. , on utilise une récurrence sur  $n$  dans une version " avec paramètres " de cette proposition : soit  $S$  une variété analytique complexe lisse et  $\mathcal{F}^\bullet$  un élément de  $\text{Perv}^T \times^S (X \times S)$  (voir notation I.3) , on remplace  $Z_{I,J,L}$  et  $S_{A,B,C}$  par  $Z_{I,J,L} \times S$  et  $S_{A,B,C} \times S$  . Les  $F_I$  deviennent des systèmes locaux sur  $S$  et les  $u_i, v_i$  des morphismes de faisceaux. Les étapes de la preuve de II.2.1 sont les suivantes :

1) On considère la restriction de  $\mathcal{F}^\bullet$  à  $\mathbb{C}_1 \times \dots \times \mathbb{C}_i - \{0\} \times \dots \times \mathbb{C}_n \times S$  comme un faisceau pervers à  $n-1$  variables paramétré par  $(\mathbb{C}_i - \{0\}) \times S$  . L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir le résultat de la proposition II.2.1. pour



$\mathcal{F}_I^\bullet$  quand  $I \neq \{1, 2, \dots, n\}$  et pour  $\mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet|_{\mathbb{C}^n - \{0\}}$ . En particulier si  $k \neq n$   $h^k(\mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet)$  est à support  $\{0\}$ .

2) Dans l'hypercube des  $\mathcal{F}_{I,J,L}^\bullet$  les degrés des faisceaux de cohomologie éventuellement non nuls sont connus pour les sommets  $\mathcal{F}_I^\bullet$ ,  $I \neq \{1,2,\dots,n\}$  d'après la première étape et au centre  $\mathcal{F}^\bullet$ . Une chasse aux degrés dans les  $\mathcal{C}_{I,J,L}$  donne alors :

$$h^k(\mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet) = 0, \quad k > n \text{ et } k < 0$$

3) La perversité de  $\mathcal{F}^\bullet$  implique (voir Proposition I.2., B) :  $R^i \Gamma_{\{0\}} \mathcal{F}^\bullet = 0$ , si  $i < n$  ; par ailleurs :

$$R\Gamma_{\{0\}} \mathcal{F}^\bullet = R\Gamma_{\{0\}} \mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet$$

et  $\Gamma_{\{0\}}(h^k(\mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet)) = h^k(\mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet)$ , si  $k < n$ .

Il en résulte aisément que :

$$h^k(\mathcal{F}_{1,2,\dots,n}^\bullet) = 0 \quad \text{si} \quad i < n.$$

Pour démontrer le théorème II.2.7., on remarque que les propositions II.2.1. à II.2.6 demeurent encore valables avec paramètres. Si  $\mathcal{C}_n(S)$  désigne la catégorie dont les objets sont les  $F_I, u_i, v_i$  avec :

$F_I$  système local sur  $S$

$$F_I \begin{matrix} \xrightarrow{u_i} \\ \xleftarrow{v_i} \end{matrix} F_{I \cup \{i\}} \quad \text{morphismes de faisceaux}$$

avec les mêmes conditions que dans  $\mathcal{C}_n$  pour ces  $u_i, v_i$ , on doit démontrer la version avec paramètres du théorème II.2.7, soit :

II.3.1. THÉORÈME.  $\alpha : \text{Perv}^{\text{TxS}}(X \times S) \longrightarrow \mathcal{C}_n(S)$  établit une équivalence de catégorie.

PREUVE DU THÉORÈME II.3.1. Il s'agit de construire des transformations naturelles de foncteurs  $\text{Id}_{\mathcal{C}_n(S)} \longrightarrow \alpha \circ \beta$

$$\text{Id}_{\text{Perv}^{\text{TxS}}(X \times S)} \longrightarrow \beta \circ \alpha$$

telles que pour tout objet  $\underline{F}$  de  $\mathcal{C}_n(S)$  et  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $\text{Perv}^{\text{TxS}}(X \times S)$ , on ait des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \underline{F} & \xrightarrow{\varphi_F} & \alpha(\beta(\underline{F})) \\ \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{F}^\bullet}} & \mathcal{G}^\bullet = \beta(\alpha(\mathcal{F}^\bullet)) \end{array} .$$

On remarque en premier lieu un isomorphisme naturel entre  $R\Gamma_{Z_I}(\beta(\underline{F}))$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_I^\bullet$ . Le premier isomorphisme  $\varphi_F$  se construit assez facilement à partir de remarques de ce type. Pour ce qui est de  $\psi_{\mathcal{F}^\bullet}$ , on obtient d'abord l'existence de morphismes :

$$h_I : \mathcal{F}_I^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}_I^\bullet$$

commutant avec les morphismes bord  $U_i$  relatifs à  $\mathcal{F}^\bullet$  et  $\mathcal{G}^\bullet$ . La deuxième partie du théorème est alors une conséquence du lemme suivant :

II.3.2. LEMME. Soient  $\mathcal{F}^\bullet$  et  $\mathcal{G}^\bullet$  des complexes pervers et  $h_I : \tilde{\mathcal{F}}_I^\bullet \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_I^\bullet$  des morphismes commutant avec les  $U_i$ . Alors il existe un unique morphisme

$$h : \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet, \text{ tel que } h_I = R^{|\mathbb{I}|} \Gamma_{Z_I} h .$$

Si on remplace  $\mathcal{F}^\bullet$  et  $\mathcal{G}^\bullet$  par leurs résolutions injectives canoniques, les triangles  $\mathcal{T}_{I,J,L,\{i\}}$  deviennent des suites exactes courtes scindées de complexes dont chaque terme est injectif.

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{I \cup \{i\}, J, L}^\bullet \longrightarrow \mathcal{J}_{I, J \cup \{i\}, L}^\bullet \longrightarrow \mathcal{J}_{I, J, L \cup \{i\}}^\bullet \longrightarrow 0$$

Les morphismes bords des triangles sont alors réalisés par des morphismes de complexes définis dans  $K(\mathbb{C}_X)$  (c'est-à-dire à homotopie près) :

$$\delta : \mathcal{J}_{I, J, L \cup \{i\}}^\bullet \longrightarrow \mathcal{J}_{I \cup \{i\}, J, L}^\bullet [+1] .$$

D'autre part, pour les complexes d'objets injectifs, on a :

$$\text{Hom}_{K(\mathbb{C}_X)} = \text{Hom}_D(\mathbb{C}_X) .$$

Enfin, on remarque que les morphismes de triangles de type  $(R\Gamma_K \varphi, \varphi, R\Gamma_U \varphi)$ , où  $K \subset X$  est fermé et  $U = X - K$ , deviennent des morphismes de suites exactes courtes  $(\Gamma_K \varphi, \varphi, \Gamma_U \varphi)$ , où

$$\varphi : \mathcal{J}_{I, J \cup \{i\}, L}^\bullet \longrightarrow \mathcal{J}_{I, J \cup \{i\}, L}^\bullet .$$

La preuve du lemme III.3.2. résulte alors d'applications répétées du lemme qui suit dans le cas où  $\text{Hom}(C^*, A^*) = 0$ .

$\mathcal{A}$  désignant une catégorie abélienne, considérons un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B \cdot & \xrightarrow{\pi} & C \cdot & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \varphi_1 & & & & \downarrow \varphi_3 & & \\
 0 & \longrightarrow & A' \cdot & \xrightarrow{i'} & B' \cdot & \xrightarrow{\pi'} & C' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

tel que les lignes horizontales sont des suites exactes courtes scindées d'objets de  $\mathcal{A}$  . Notons

$$\delta : C \cdot \longrightarrow A \cdot [+1] \qquad \delta' : C' \cdot \longrightarrow A' \cdot [+1]$$

les morphismes bords de ces suites exactes. Et notons enfin  $\bar{\varphi}$  le représentant dans  $K(\mathcal{A})$  d'un morphisme de complexe  $\varphi$  .

II.3.3. LEMME . Si dans la situation ci-dessus on a  $\bar{\varphi}_1 \delta = \delta' \bar{\varphi}_3$  dans  $K(\mathcal{A})$  , il existe un morphisme  $\varphi_2 : B \rightarrow B' \cdot$  , tel que  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  soit un morphisme de suites exactes courtes. De plus  $\bar{\varphi}_2$  est unique modulo  $\text{Hom}(C \cdot, A' \cdot)$  (c'est-à-dire  $\overline{\varphi_2'} - \overline{\varphi_2} = \overline{i' \circ h \circ \pi}$ ) .

III . OBJETS SIMPLES ET COMPLEXES D'INTERSECTION

III.1.  $\mathcal{C}_n$  est une catégorie abélienne dont tous les objets sont de longueur finie, précisément  $\underline{F} = (F_I, u_i, v_i)$  est de longueur inférieure ou égale à

$$\sum_I \dim_{\mathbb{C}} F_I .$$

Les objets simples de  $\mathcal{C}_n$  sont décrits par la proposition suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur :

III.1.1. PROPOSITION . Un objet de  $\mathcal{C}_n$  est simple si et seulement si il est isomorphe à l'un des objets suivants de  $\mathcal{C}_n$  noté  $\underline{F}^{I,J}$ , indexé par les couples de sous-ensembles disjoints I et J de  $\{1, \dots, n\}$  et

$$(\lambda_j)_{j \in J} \in (\mathbb{C} - \{0\})^J$$

$$F^{I,J} = \mathbb{C} \quad \text{si} \quad I \subset I' \subset I \cup J$$

$$= 0 \quad ; \quad \text{sinon}$$

$$u_j = \text{Id} \quad , \quad \text{si} \quad I \subset I' \subset I' \cup \{j\} \subset I \cup J$$

$$v_j = \lambda_j \text{Id} \quad \text{avec} \quad \lambda_j = e^{2i\pi\alpha_j} - 1 \quad \text{et} \quad \alpha_j \notin \mathbb{Z} .$$

III.2. D'après [ G. M. ] , on a une équivalence de catégories entre les systèmes locaux  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{C}^n - T$  et les complexes de faisceaux constructibles  $\mathcal{F}^\bullet$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

- i)  $\mathcal{F}^\bullet$  est pervers relativement à T
- ii)  $h^j(\mathcal{F}^\bullet)_x = 0$  si  $x \in \Sigma_{n-j}$  et  $j > 0$
- iii)  $(R^j \Gamma_{\Sigma_{n-j}} \mathcal{F}^\bullet)|_{\Sigma_{n-j}} = 0$  si  $j > 0$

Ces propriétés sont équivalentes aux axiomes [ ax 1 ] de [ G M ] pour le complexe  $\mathcal{F}^\bullet(2n) = IC^\bullet(\mathcal{E})$ , avec la perversité moyenne. La proposition suivante décrit ces complexes d'intersection :

III.2.1. PROPOSITION . Soit  $\mathcal{E}$  le système local sur  $\mathbb{C}^n - T$  défini par un espace vectoriel de dimension finie E et des monodromies partielles  $M_j : E \rightarrow E$ ,  $j = 1, \dots, n$ . On note  $v_j = M_j - \text{Id}$ . Le complexe d'intersection décalé  $IC(\mathcal{E})(-2n) = \mathcal{F}^\bullet$  est représenté dans  $\mathcal{C}_n$  par  $\alpha(\mathcal{F}^\bullet)$  isomorphe à l'objet  $\underline{F}(\mathcal{E})$  de  $\mathcal{C}_n$  décrit par :  $F(\mathcal{E})_I = E / \ker(\prod_{j \in J} v_j)$ ,  $u_j$  étant le passage au quotient et  $v_j$  défini par  $v_j(\dot{x}) = \frac{\cdot}{v_j(x)}$ .

PREUVE . On constate sans difficulté que  $\underline{F}(\underline{\mathcal{E}})$  est un objet bien défini de  $\mathcal{C}_n$  et que la restriction de  $\beta(\underline{F}(\underline{\mathcal{E}}))$  à  $\mathbb{C}^n - T$  est isomorphe à  $\underline{\mathcal{E}}$  . Le foncteur inverse de  $IC^*(-2n)$  étant précisément fourni par cette restriction, il suffit donc de s'assurer que le complexe pervers  $\mathcal{F}^* = \beta(\underline{F}(\underline{\mathcal{E}}))$  satisfait aux propriétés ii) et iii) ci-dessus :

Pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$  , on note  $m = |I|$  et :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{\{1, \dots, n\} - I} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; z_j = 0 \text{ si } j \in I\}$$

$$\Sigma' = \mathbb{C}^I = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; z_j = 0 \text{ si } j \notin I\}$$

et  $\Sigma'' = \Sigma - T \cap \Sigma$  :  $\Sigma''$  est une strate de codimension  $m$  .

Le complexe pervers  $\mathcal{F}^*|_{\Sigma'' \times \Sigma'}$  peut être étudié du point de vue du Théorème

II.3.1. avec  $\Sigma''$  comme variétés de paramètre et  $\Sigma'' \times T_I$  comme support singulier, où  $T_I$  est le croisement normal standard de  $\mathbb{C}^I$  . Il est représenté par les systèmes locaux sur  $\Sigma''$  définis par les  $F_{I'}$ , où  $I' \subset I$  , munis des monodromies  $M_j$  ou  $j \notin I$  , avec les morphismes  $F_{I'} \xrightleftharpoons[v_i]{u_i} F_{I' \cup \{i\}}$  qui commutent aux  $M_j$  : il en résulte, d'après la définition de  $\beta$  (§ II 2) , que la fibre de  $\mathcal{F}^*$  en  $x$  est isomorphe au complexe simple associé à  $(F_{I'}, I' \subset I, u_i, i \in I)$  . La surjectivité des  $u_i$  implique alors :

$$h^m(\mathcal{F}^*)_x = 0 \quad ; \quad \text{d'où ii) .}$$

Par ailleurs, en considérant les inclusions fermées :

$$\Sigma'' \subset Z_I' = \left( \prod_{j \in I} K_j \right) \times \Sigma'' \subset \mathbb{C}^n - \Sigma'$$

et en utilisant le fait que  $R\Gamma_{Z_I'}(\mathcal{F}^*|_{\mathbb{C}^I \times \Sigma''})$  est concentré en degré  $m$  , on trouve :

$$\begin{aligned} (1) \quad (R^m \Gamma_{\Sigma''-m} \mathcal{F}^*)|_{\Sigma''} &= R^m \Gamma_{\Sigma''}(\mathcal{F}^*|_{\Sigma''}) \\ &= \Gamma_{\Sigma''}(R^m \Gamma_{Z_I'} \mathcal{F}^*)|_{\Sigma''} \end{aligned}$$

Les restrictions de  $R^m \Gamma_{Z_I'} \mathcal{F}^*$  aux strates de  $Z_I'$  sont les systèmes locaux  $(F_{I'}, I' \subset I ; M_j, j \notin I)$  , la restriction à la strate minimale  $\Sigma''$  étant  $F_I$  et les morphismes de recollement les  $v_j, j \in I$  (cf Proposition II.2.2 et [G.G.M.]). De l'injectivité des morphismes  $v_j$  , il résulte que les sections à support  $\Sigma''$  sont nulles d'où ii) , d'après l'égalité (1) .

On retrouve à partir des propositions III.1.1. , III.2.1. le fait que les objets simples de  $\text{Perv}^T(\mathbb{C}^n)$  sont le prolongement par zéro, convenablement décalés, des complexes d'intersection sur les adhérences des strates  $\sum_I$  des systèmes locaux de rang un sur ces strates  $\sum_I = \left\{ z \in \mathbb{C}^n, \begin{array}{l} z_i = 0 \text{ si } i \in I \\ z_i \neq 0 \text{ si } i \notin I \end{array} \right\}$ .

III.2.2. COROLLAIRE . L'image par  $\beta$  de l'objet simple de  $\mathcal{C}_n$  décrit dans III.1.1 est :

$$\beta(\underline{\mathbb{F}}^{I,J}) = \tau_*(\mathbb{I}C(\mathcal{E}))(-2n - |I|) ,$$

où  $\tau$  est l'inclusion  $\mathbb{C}^{\{1, \dots, n\} - I} = \mathbb{C}^{I'} \longrightarrow \mathbb{C}^n$  et  $\mathcal{E}$  est le système local sur  $\mathbb{C}^{I'} - T_I$ , défini par  $\mathbb{C}$  muni des monodromies  $e^{2i\pi\alpha_j} = 1 + \lambda_j$ , si  $j \in I$  et  $e^{2i\pi\alpha_j} = 1$ , si  $j \notin I \cup J$ .

IV . D - MODULES DONT LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE SE PROJETTE SUR UN CROISEMENT NORMAL

IV.1. ÉTUDE DE L'HYPERCUBE  $R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{G}_X$  .

Cet hypercube est obtenu à partir des triangles

$$* \quad R\Gamma_{Z_{I \cup \{i\}, J, L}} \mathcal{G}_X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} R\Gamma_{Z_{I, J \cup \{i\}, L}} \mathcal{G}_X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} R\Gamma_{Z_{I, J, L \cup \{i\}}} \mathcal{G}_X$$

$\Delta_i$

IV.1.1. PROPOSITION . Le complexe  $R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{G}_X$  est concentré en degré  $|I|$  .

PREUVE . Remarquons que  $Z_{I,J,L}$  est contenu dans le fermé  $Z_{I, J \cup L, \phi}$  .

En appliquant un résultat classique (voir par exemple remarque p. 276 [S.K.K]), on obtient que  $R\Gamma_{Z_{I, J \cup L, \phi}} \mathcal{G}_X$  n'a de cohomologie qu'en degré  $\geq |I|$  . Il en est donc de même de  $R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{G}_X$  .

Pour  $I = \phi$  , la proposition provient du fait que  $Z_{\phi, J, L}$  est un ouvert de Stein ; on obtient alors la proposition pour tous les  $I$  par une " chasse aux degrés " dans les triangles. Cela nous permet d'établir par récurrence :

IV.1.2. PROPOSITION . L'hypercube formé à partir des triangles \* est fonctoriellement isomorphe à celui formé à partir des triangles :

$$\mathcal{O}_{I \cup \{i\}, J, L} \begin{matrix} \xrightarrow{[-|I|-1]} \\ \xleftarrow{(-1)^{N_{I,i}} U_i} \end{matrix} \mathcal{O}_{I, J \cup \{i\}, L} \begin{matrix} \xrightarrow{[-|I|]} \\ \xleftarrow{\phantom{(-1)^{N_{I,i}} U_i}} \end{matrix} \mathcal{O}_{I, J, L \cup \{i\}} \begin{matrix} \xrightarrow{[-|I|]} \\ \xleftarrow{\phantom{(-1)^{N_{I,i}} U_i}} \end{matrix}$$

où

$$\mathcal{O}_{I, J, L} = \frac{\prod_{k \in I \cup L} \Gamma_{v_k} \times \prod_{k \in J} \Gamma_{c_k} \mathcal{O}_X}{\sum_{k \in I} \Gamma_{c_k} \times \prod_{j \in I \cup L - \{k\}} \Gamma_{v_j} \times \prod_{j \in J} \Gamma_{c_j} \mathcal{O}_X}$$

$U_i$  étant le morphisme de passage au quotient.

NOTATION .  $\mathcal{O}_I = \mathcal{O}_{I, \phi, \{1, 2, \dots, n\} - I} = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma_{v_i} \mathcal{O}}{\sum_{k \in I} \Gamma_{c_k} \times \prod_{i \neq k} \Gamma_{v_i} \mathcal{O}}$

IV.2. DESCRIPTION DU FONCTEUR  $\alpha \circ \text{SOL} : \mathcal{D}_X^T \longrightarrow \mathcal{E}_n$

Les  $\mathcal{D}$ -Modules considérés dans ce paragraphe ne sont pas nécessairement réguliers.

Les foncteurs  $R\Gamma_Z$  et  $\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \cdot)$  commutent. Si  $M$  appartient à  $\mathcal{D}_X^T$  l'hypercube associé au complexe pervers  $\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) = \text{Sol}(M)$  de la façon décrite au chapitre II est donc fonctoriellement isomorphe à celui bâti sur les complexes :

$$\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, R\Gamma_{Z, I, J, L} \mathcal{O}_X) .$$

LEMME .  $\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, R\Gamma_{Z_I} \mathcal{O}_X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_I) \begin{matrix} \xrightarrow{[-|I|]} \\ \xleftarrow{\phantom{[-|I|]}} \end{matrix}$  .

PREUVE . Il suffit d'utiliser les propositions II.2.1. , IV.1.1. , IV.1.2. .

LEMME . Les solutions  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_I)$  sont multiformes de détermination finie  $(\Psi(\varphi, m) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_I) \times M_0, \varphi(m))$  est représentable par une fonction analytique multiforme en dehors de l'hypercube  $z_1 \dots z_n = 0$  .

PREUVE . Le lemme se déduit de la constructibilité de  $\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})$  et d'une chasse dans l'hypercube  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O}_{I, J, L}) \begin{matrix} \xrightarrow{[-|I|]} \\ \xleftarrow{\phantom{[-|I|]}} \end{matrix}$  . De plus, en reprenant de façon détaillée la construction de l'objet de  $\mathcal{E}_n \alpha(\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X))$  , on établit la proposition :

IV.2.1. PROPOSITION .  $\alpha(\mathbb{R} \text{Hom}(M, \mathcal{O}))$  est fonctoriellement isomorphe à l'objet de  $\mathcal{E}_n$  :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O}_{I, 0}) \begin{matrix} \xleftarrow{u_i} \\ \xrightarrow{v_i} \end{matrix} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M_0, \mathcal{O}_{I \cup \{i\}, 0}) ,$$

où  $u_i$  est la flèche canonique de passage au quotient entre solutions à valeurs dans  $\mathcal{O}_{I,0}$  et à valeurs dans  $\mathcal{O}_{I \cup \{i\},0}$  et  $v_i$  la variation partielle autour de  $z_i = 0$  :

$$\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M_o, \mathcal{O}_{I \cup \{i\},o}) \quad (v_i \varphi)(m) = (M_i \varphi - \varphi)(m) \quad ,$$

$M_i \varphi(m)$  étant la classe d'un représentant multiforme de  $\varphi(m)$  obtenu après un tour autour de l'axe  $z_i = 0$  .

IV. 2.2. PROPOSITION . Soit  $M$  un objet de  $\mathcal{D}_X^T$  ,  $x$  un point de  $X$  , l'indice du complexe  $\mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X,x}}(M_x, \mathcal{O}_{X,x})$  est égal à

$$\sum_{I \subset \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{X,x}(M_x, \mathcal{O}_{I,x})$$

PREUVE . Elle est immédiate à partir de la description du foncteur  $\beta \circ \alpha$  équivalent à l'identité.

IV.3. DICTIONNAIRE  $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^T)_{\text{hr}} \longrightarrow \mathcal{C}_n$

La proposition IV.2.1. permet, en utilisant le théorème d'équivalence de catégorie  $(\mathcal{D}_X^T)_{\text{hr}} \longrightarrow \text{Perv}^T(X)$  démontré dans  $[B]$  ,  $[K]$  ,  $[M]$  , d'obtenir :

IV.3.1. PROPOSITION .  $M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X,o}}(M_o, \mathcal{O}_{I,o}) \xrightleftharpoons[v_i]{u_i} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M_o, \mathcal{O}_{I \cup \{i\},o})$

est une équivalence de catégorie entre  $(\mathcal{D}_X^T)_{\text{hr}}$  et  $\mathcal{C}_n$  .

IV.3.2. PROPOSITION . Les objets simples de  $(\mathcal{D}_X^T)_{\text{hr}}$  sont isomorphes aux

$$\mathcal{D}_X\text{-Modules} : \frac{\mathcal{D}_X}{D_{I,J,\alpha_J}} \quad , \text{ où}$$

$I$  et  $J$  sont deux parties de  $\{1, 2, \dots, n\}$  disjointes ,

$$\alpha_J = (\alpha_i)_{i \in J} \quad \text{et} \quad \alpha_i \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} \quad ,$$

$D_{I,J,\alpha_J}$  étant l'idéal de  $\mathcal{D}_X$  engendré par

$$(z_i)_{i \in I} \quad , \quad (D_i)_{i \notin I \cup J} \quad , \quad (z_i^{D_i - \alpha_i})_{i \in J} \quad .$$



PREUVE . Les objets simples se correspondent par l'équivalence de catégorie.

On vérifie que les  $\frac{\mathcal{D}_X}{D_{I,J,\alpha_J}}$  sont des éléments de  $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$  . Il reste alors

à montrer que  $\alpha \circ \text{Sol} \left( \frac{\mathcal{D}_X}{D_{I,J,\alpha_J}} \right) \cong (F^{I,J,\lambda_j}, u_i, v_i)$  . Cet isomorphisme s'établit par la proposition IV.2.1. en résolvant des équations très simples aux dérivées partielles. (  $\lambda_j = e^{2i\pi\alpha_j} + 1$  ) .

DÉFINITION . (voir [ S. Gre ] exposé 3) . Soit  $M$  un  $\mathcal{D}_Y$ -Module cohérent,  $x^*$  un point de  $T^*Y$  dans la variété caractéristique de  $M$  . Nous savons que  $M$  admet une bonne filtration locale à laquelle nous associons  $(gr M)_{x,\xi}$  .

La multiplicité de ce  $\mathbb{C}\{x\}[\xi]$  - module ne dépend que de  $M$  et est appelé multiplicité de  $M$  en  $x^*$  , que l'on note  $\text{mult}_{x^*} M$  .

Rappelons que si  $M$  est un  $\mathcal{D}_Y$ -Module holonome, la dimension de  $(gr M)_{x,\xi}$  est égale à  $\dim_{\mathbb{C}} Y$  et que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de  $\mathcal{D}_Y$  - Module holonome, on a :

$$\text{mult}_{x^*} M = \text{mult}_{x^*} M' + \text{mult}_{x^*} M'' .$$

IV.3.3.3 PROPOSITION . Soit  $M$  un élément de  $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$  , sa variété caractéristique est donc contenue dans  $\Delta_T$  :

$$\Delta_T = \{ (z_1, \dots, z_n ; \xi_1, \dots, \xi_n) \in T^*X ; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ z_i \xi_i = 0 \} .$$

Soit  $z_I^* = (z_1, \dots, z_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  vérifiant :

$$i \in I \Leftrightarrow z_i = 0 \text{ et } j \in I \Leftrightarrow \xi_j \neq 0 .$$

On a :  $\text{mult}_{z_I^*} (M) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{I,0}} (M, \mathcal{O}_{I,0})$

$$\text{mult}_{(0,0)} (M) = \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{I,0}} (M, \mathcal{O}_{I,0}) .$$

PREUVE . L'application de  $\mathcal{C}_n$  dans  $\mathcal{N} : (F_J \xrightleftharpoons[u_i]{v_i} F_{J \cup \{i\}}) \longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} F_I$

se comporte de façon additive pour les suites exactes de la catégorie abélienne

$\mathcal{C}_n$  . Il suffit donc de vérifier la proposition sur les objets simples, ce qui est facile.

NOTATION . Soit  $\mathfrak{J}$  un idéal de  $\mathcal{D}_{X,0}$  tel que  $\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J}}$  appartienne à  $(\mathcal{D}_{X,0}^T)_{hr}$ . (D'après [Bjo] chap I, tout élément de  $(\mathcal{D}_{X,0}^T)_{hr}$  est isomorphe à un tel  $\mathcal{D}_{X,0}$ -module). On appelle solution de  $\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J}}$  à valeurs dans  $\mathcal{O}_I$ , un élément  $f$  de  $\mathcal{O}_{I,0}$  tel que :

$$\forall Q \in \mathfrak{J} \quad Qf = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_{I,0} .$$

Ces solutions d'identifient aux éléments de  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X,0}}(\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J}}, \mathcal{O}_{I,0})$  et forment donc un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie .

IV.3.4. COROLLAIRE .  $\mathfrak{J}$  vérifiant les hypothèses précédentes, si  $P \in \mathcal{D}_{X,0}$  s'annule pour tout  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$  sur les solutions de  $\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J}}$  à valeurs dans  $\mathcal{O}_I$ , alors  $P$  appartient à l'idéal  $\mathfrak{J}$  .

PREUVE . Il suffit de considérer la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{J} + \mathcal{D}_{X,0} P}{\mathfrak{J}} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J}} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J} + \mathcal{D}_{X,0} P} \longrightarrow 0$$

Vu l'hypothèse sur  $P$ , la proposition IV.3.3. et le fait que

$$\frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J} + \mathcal{D}_{X,0} P} \in (\mathcal{D}_{X,0}^T)_{hr}, \quad \text{mult}_{(0,0)} \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J}} = \text{mult}_{(0,0)} \frac{\mathcal{D}_{X,0}}{\mathfrak{J} + \mathcal{D}_{X,0} P}$$

On en déduit que  $\text{mult}_{(0,0)} \frac{\mathfrak{J} + \mathcal{D}_{X,0} P}{\mathfrak{J}} = 0$  ; d'où  $P \in \mathfrak{J}$  .

Citons également une proposition qu'il suffit de vérifier sur les objets simples de  $(\mathcal{D}_{X,0}^T)_{hr}$  .

IV.3.5. PROPOSITION . Soit  $M$  un élément de  $(\mathcal{D}_{X,0}^T)_{hr}$  ; supposons que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X,0}}(M, \mathcal{O}_{I,0}) = 0$ , alors la variété caractéristique de  $M$  ne contient pas la variété de dimension  $n$  d'équations :

$$\xi_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \in I \quad \text{et} \quad x_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \notin I .$$

IV.4. SANS L'HYPOTHÈSE DE RÉGULARITÉ

Dans [M<sub>1</sub>] et [L.M.2.] est expliqué comment à un  $\mathcal{D}$ -Module holonome M est associé un unique  $\mathcal{D}$ -Module régulier M<sub>r</sub> (à isomorphe près) tel que :

$$\mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} M \cong \mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}} M_r .$$

Ce  $\mathcal{D}$ -Module est caractérisé par  $\text{Sol}(M) = \text{Sol}(M_r)$  .

IV.4.1. LEMME . La variété caractéristique de M est égale à la variété caractéristique de M<sub>r</sub> . Les multiplicités des composantes de la variété caractéristique de M et de M<sub>r</sub> sont les mêmes.

PREUVE . Comme Z.Mebkhout nous l'a signalé (voir [L.M.1] ), le premier point provient du fait que la variété caractéristique de M est le support de  $\mathcal{L}_X^\infty \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)} M$  . Le deuxième point se démontre en utilisant

le théorème de l'indice de Kashiwara [K<sub>2</sub>] .

IV.4.2. COROLLAIRE . Les propositions IV.3.3., IV.3.4., IV.3.5. sont encore vérifiées pour un élément de  $\mathcal{D}_X^T$  .

REMARQUE . Des preuves élémentaires des ces propositions sont données dans le cas n = 1 , par une toute autre méthode dans [Bri-Mai] .

B I B L I O G R A P H I E

- [ Bjo ] J.E. BJORK Rings of differential operators, North Holland, Mathematical Library (1979)
- [ Bri - Mai ] J. BRIANÇON et Ph. MAISONOBE "Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable" à paraître dans l'Enseignement Mathématique (1984)
- [ B ] J.L. BRYLINSKI "Modules holonomes à singularité régulière et filtration de Hodge", Proceedings, La Rabida, Lecture Notes in Mathematics n° 961
- [ G.G.M. ] A. GALLIGO, M. GRANGER et Ph. MAISONOBE " $\mathcal{D}$ - Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal", à paraître aux Annales de l'Institut Fourier. (1985)
- [ G.M. ] M. GORESKY et R. MAC PHERSON "Intersection Homology II", Inventiones Math, vol 72, fasc. 1, (1983)
- [ K ] M. KASHIWARA "The Riemann Hilbert problem for holonomic systems" R.I.M.S. preprint 437 (1983)
- [ K 1 ] M. KASHIWARA "On the maximally overdetermined system of linear differential equations I " Publ. RIMS, Kyoto Univ. n° 10 (1975), 563-579.
- [ K<sub>2</sub> ] M. KASHIWARA "Systems of Microdifferential Equations" (Notes and translation by Teresa Monteiro Fernandes. Introduction by Jean Luc Brylinski) Birkhäuser, Progress in Mathematics, Vol. 34, (1983)
- [ L.M.1. ] LE DUNG TRANG et Z. MEBKHOUT "Variétés caractéristiques et variétés polaires." C.R. Acad. Paris, t. 296 (Janv. 1983)
- [ L.M.2. ] LE DUNG TRANG et Z. MEBKHOUT "Introduction to linear differential systems", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 40, (1982) (Conférences à Arcata, 1981)
- [ M ] Z. MEBKHOUT Thèse d'Etat, Université de Paris VII, Février (1979)  
Z. MEBKHOUT "Une équivalence de catégorie." "Une autre équivalence de catégorie", Compositio Mathematica, Vol 51 n° 1, pp. 51-62 et pp. 63-88 (1984)

- [ M<sub>1</sub> ]      Z. MEBKHOUT      Sur le Problème de Hilbert-Riemann, Proc. Les Houches (1979), Lecture Notes in Phys, vol. 126, Springer-Verlag.
- [ S.Gre ]      Séminaire de Grenoble (1975-1976) : " Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels ". Preprint Univ. de Grenoble
- [ S.K.K. ]      M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA Microfonctions and pseudo-differentials equations, Springer Lectures Notes, n° 287, (1973)