Astérisque

D. BARLET

Prolongement analytique de $|f|^{2\lambda}$ et connexion de Gauss-Manin

Astérisque, tome 130 (1985), p. 48-55

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__130__48_0>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE $|f|^{2\lambda}$ ET
CONNEXION DE GAUSS-MANIN

par D. BARLET

Soit X un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante vérifiant $f(0) = 0$. Nous supposerons dans la suite que 0 est la seule valeur critique de f dans X , cas auquel on peut toujours se ramener quand on étudie un problème local à la source. L'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f permet de montrer que pour $\varphi \in C_c^\infty(X)$ forme différentielle de degré $2n+2$, la fonction holomorphe $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ définie par

$$F_\varphi(\lambda) = \int_X |f|^{2\lambda} \varphi$$

se prolonge méromorphiquement au plan complexe tout entier :

Soit $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}, \lambda\right)$ un opérateur différentiel holomorphe sur X dépendant polynomialement de λ et vérifiant :

$$(1) \qquad P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}, \lambda\right) f^{\lambda+1} = b(\lambda) \cdot f^\lambda$$

où $b \in \mathbb{C}[\lambda]$ est un polynôme unitaire (donc non nul). [Pour donner un sens précis à l'égalité (1) il faut se placer sur le revêtement universel de $X - f^{-1}(0)$ et choisir une détermination de Log f] . Le polynôme de Bernstein-Sato de f est le générateur unitaire de l'idéal de $\mathbb{C}[\lambda]$ formé des polynômes qui apparaissent dans une identité telle que (1) (le point non trivial dans tout cela étant l'existence d'une identité telle que (1) avec b non nul !). Une fois que l'on dispose d'une identité telle que (1) avec b non nul le prolongement méromorphe de $F_\varphi(\lambda)$ s'obtient de la manière suivante : en itérant la relation (1) on aura pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$b(\lambda) \cdot b(\lambda+1) \ \dots \ b(\lambda+N-1) \cdot f^\lambda = P_N\left(z, \frac{\partial}{\partial z}, \lambda\right) f^{\lambda+N}$$

où P_N est encore un opérateur différentiel holomorphe dépendant polynomialement de λ . Alors, on aura, au moins pour $\mathrm{Re}(\lambda) \gg 0$

$$\int_X |f|^{2\lambda} = \frac{1}{b(\lambda)\cdot b(\lambda+1)\ \ldots\ b(\lambda+N-1)} \int_X |f|^{2\lambda} f^N Q_N\left(z, \frac{\partial}{\partial z}, \lambda\right) [\varphi]$$

où Q_N désigne l'adjoint de P_N ; le membre de droite est une fonction méromorphe pour $\mathrm{Re}(2\lambda+N) > 0$, ce qui donne le prolongement désiré. On remarquera que cette manière de faire le prolongement méromorphe est meilleure que celle de [1] qui fait apparaître en dénominateur des produits de translatés de $b(\lambda)^2$.

On constate facilement que cette méthode permet tout de suite d'enfermer les pôles éventuels de $F_\varphi(\lambda)$ dans l'ensemble des translatés par $-\mathbb{N}$ des zéros de b , l'ordre d'un pôle étant borné par la somme des multiplicités des racines de b qui lui sont égales modulo 1. Comme la fonction holomorphe

$$\int_X |f|^{2\lambda} f^N Q_N\left(z, \frac{\partial}{\partial z}, \lambda\right) [\varphi]$$

peut s'annuler, et comme, en général, on ne sait pas préciser même une relation du type (1), cette méthode ne permet pas, en général, de dire si une racine du polynôme de Bernstein-Sato b produit effectivement un pôle (en un translaté par $-\mathbb{N}$) dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ (on s'autorise donc à choisir un φ convenable !).

Nous allons exposer des résultats qui eux, précisent que, sous des hypothèses convenables sur la monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor de f , certains pôles apparaissent effectivement dans le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$. En utilisant les travaux de B. Malgrange sur le lien entre polynôme de Bernstein-Sato et monodromie, on pourra en déduire en particulier que toute racine de b produit effectivement un pôle (pour un translaté assez loin) dans le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$.

<u>Théorème 1</u> (th. 1 de [2])

<u>Soit</u> T <u>la monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor de</u> f , <u>et supposons que</u> $\exp(-2i\pi u)$ <u>soit valeur propre de</u> T <u>avec multiplicité</u> $k \geqslant 1$ (<u>où</u> $u \in \mathbb{C}$ <u>est donné</u>). <u>Alors le prolongement méromorphe de la distribution</u> $|f|^{2\lambda}$

admet un pôle d'ordre au moins égal à k en un point congru à $-u$ modulo $\mathbb{Z}$.

On remarquera que l'on n'a pas supposé u rationnel ni $k \leqslant n+1$ dans l'énoncé du théorème 1 ; la raison en est que l'on peut utiliser le théorème 1 pour donner une preuve du théorème de monodromie dans le cas analytique local.

Nous donnerons une esquisse de preuve de ce théorème 1 (pour $k = 1$) à la fin de cette conférence.

Pour la valeur propre 1 de la monodromie, le théorème ci-dessus ne semble pas satisfaisant. En effet si la monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor de f en degré $p \geqslant 1$ admet la valeur propre 1, on obtient seulement l'existence d'un pôle simple aux entiers négatifs assez grands (en valeur absolue) pour le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$. Cette conclusion n'est pas satisfaisante car le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ admet toujours des pôles simples aux entiers strictement négatifs, même quand la fonction f n'a pas de valeur critique dans X. L'interprétation que je propose pour ce fait est la suivante : la monodromie agissant sur la cohomologie en degré 0 de la fibre de Milnor de f admet toujours 1 comme valeur propre (même si f est submersive). Ceci conduit au résultat suivant de contribution "sur-effective" pour la valeur propre 1 de la monodromie :

Théorème 2 (corollaire 1 du th. 1 de [3])

Si, dans la situation du théorème 1 ci-dessus, la monodromie T agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor de f en degré strictement positif, admet la valeur propre 1 avec multiplicité $k \geqslant 1$, alors le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ admet aux entiers négatifs assez grands (en valeur absolue) un pôle d'ordre au moins égal à $k+1$.

Ce théorème admet le corollaire suivant, qui généralise un résultat obtenu par J.H.M. Steenbrink pour une fonction à singularité isolée (voir [S]).

Corollaire (corollaire 2 du th. 1 de [3])

Pour un germe de fonction holomorphe non constante $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ la multiplicité de la valeur propre 1 de la monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor de f est au plus égale à n (pour $n \geqslant 1$) .

En fait, le résultat du théorème 2 peut s'interpréter comme une intéraction non triviale (via le cup-produit) entre le bloc de Jordan pour la valeur propre 1 de la monodromie agissant en degré strictement positif et le vecteur propre pour la valeur propre 1 de la monodromie agissant en degré 0 , comme le montre le résultat suivant :

Théorème 3 (th. 1 de [3])

Dans la situation du théorème 1 , supposons que la monodromie T admette un bloc de Jordan $e_1, \dots, e_k$ dans la cohomologie de la fibre de Milnor de f en degré p , et un bloc de Jordan $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$ dans la cohomologie de la fibre de Milnor de f en degré q , pour une même valeur propre $\exp(-2i\pi u)$. Supposons de plus que l'on ait $p+q \geqslant 1$, et que le cup-produit $e_1 \cup \bar{\varepsilon}_1$ soit non nul (dans la cohomologie en degré $p+q$ de la fibre de Milnor de f) .

Alors le prolongement méromorphe de la distribution $|f|^{2\lambda}$ admet un pôle d'ordre au moins $k+\ell$ en un translaté de $-u$ par un entier négatif.

On remarquera que le théorème 3 contient le théorème 2 comme le cas particulier suivant : $\exp(-2i\pi u) = 1$, $q = 0$, $\ell = 1$ et $\varepsilon_1 = 1$ dans la cohomologie en degré 0 de la fibre de Milnor de f (pour $n \geqslant 1$ elle est connexe). La condition $e_1 \cup \bar{1} \neq 0$ est toujours satisfaite puisque, par hypothèse, e_1 est non nul dans la cohomologie en degré p de la fibre de Milnor de f .

On remarquera enfin que la valeur propre 1 joue encore un rôle dans le théorème 3 (même si $\exp(-2i\pi u) \neq 1$) , car l'hypothèse implique que la monodromie agissant en degré $p+q$ admet la valeur propre 1 avec une multiplicité au moins égale à $\mathrm{Sup}(k, \ell)$.

Donnons maintenant une esquisse de preuve du théorème 1 dans le cas d'une valeur propre simple de la monodromie $(k = 1)$.

Supposons donc l'existence de $e(s_0) \in H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ $e(s_0) \neq 0$ vérifiant $T\ e(s_0) = \exp(-2i\pi u) \cdot e(s_0)$ (on a noté par $X(s_0)$ la fibre de Milnor de $f : X \to D$; s_0 est donc un point base dans $D - \{0\}$).

Alors on peut trouver une forme holomorphe ω sur X de degré p et vérifiant

$$d\omega = (m+u)\,\frac{df}{f} \wedge \omega \quad \text{sur} \quad X$$

et induisant $e(s_0)$ dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ (la condition $d\omega = (m+u)\,\frac{df}{f} \wedge \omega$ implique la fermeture de $\omega|_{f=s_0}$, donc ω induit une classe de De Rham holomorphe sur la variété de Stein $X(s_0) = \{f = s_0\}$) . Ceci se montre en considérant la section horizontale multiforme e du fibré de Gauss-Manin $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ sur $D - \{0\}$, qui vaut $e(s_0)$ en s_0 et en remarquant que $s^u\, e(s)$ est une section holomorphe uniforme de ce fibré sur le disque pointé, à croissance modérée par rapport à la base horizontale. Alors la régularité de la connexion de Gauss-Manin permet de montrer que $s^u\, e(s)$ est la restriction à $D - \{0\}$ d'une section méromorphe de la cohomologie de De Rham relative de f $f_*(\Omega^p_{X/D})/d(f_*\, \Omega^{p-1}_{X/D})$ ce qui permet de conclure (voir le lemme A de [2]).

Considérons maintenant les courants $(T_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sur X qui sont définis comme suit :

pour $\psi \in C^\infty_c(X)$ forme différentielle de type $(n-p+1,\, n+1)$ posons

$$< T_j, \psi > = Pf(z = -m-u\,,\ \int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge \psi)$$

où $Pf(z = \alpha\,,\, F(z))$ pour F méromorphe dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ désigne le terme constant du développement de Laurent de F en $z = \alpha$. On montre aisément que les T_j sont des courants sur X de type $(p, 0)$ vérifiant $\bar{f}\, T_{j+1} = T_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. De plus sur $X - \{f = 0\}$ le courant T_j coïncide avec la forme différentielle C^∞ $\dfrac{\omega}{|f|^{2(m+u)}\, \bar{f}^j}$.

Lemme B1

Sous l'hypothèse que pour toute ψ comme ci-dessus et tout $j \in \mathbb{Z}$ le prolongement méromorphe de

$$z \to \int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge \psi$$

n'ait jamais de pôle au point $z = -m-u-1$ on a les relations suivantes entre courants sur X :

$$dT_j = -(j+m+u)\, d\bar{f} \wedge T_{j+1} \qquad j \in \mathbb{Z} \quad .$$

On remarquera que, vu les types, cette relation donne $d'T_j = 0$ et $d''T_j = -(j+m+u)\, d\bar{f} \wedge T_{j+1}$. Donnons rapidement la preuve de la relation $d'T_j = 0$. Par définition de l'opérateur d' sur les courants, pour $\varphi \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p,\ n+1)$ on a

$$< d'T_j, \varphi > = (-1)^p < T_j, d'\varphi > \quad .$$

Considérons pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ la fonction holomorphe $z \to \int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge d'\varphi$. Comme on a $d(|f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge \varphi) = d'(|f|^{2z}\, \bar{f}^{-j} \wedge \omega \wedge \varphi)$ vus les types, et $d'(|f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge \varphi) = (z+m+u)\, |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \frac{df}{f} \wedge \omega \wedge \varphi + (-1)^p\, |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j} \wedge \omega \wedge d'\varphi$.

La formule de Stokes (pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ tout est suffisamment différentiable) donne

$$(-1)^{p-1} \int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge d'\varphi = (z+m+u) \int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \frac{df}{f} \wedge \omega \wedge \varphi \quad .$$

Par prolongement analytique on obtient alors que

$\mathrm{Pf}(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \omega \wedge d'\varphi) = 0$ puisque l'hypothèse implique que le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z}\, \bar{f}^{-j}\, \frac{df}{f} \wedge \omega \wedge \varphi$ n'a pas de pôle en $z=-m-u$.

Ce type de démonstration est une des clefs permettant d'exploiter l'absence de pôle en un point donné pour le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$.

Il faudra ensuite "affiner" l'objet mathématique dont le lemme B1 assure l'existence (*i.e* les courants $(T_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifiant les relations ci-dessus). C'est l'objet des lemmes C1 et C2 suivants qui sont essentiellement des "diagram chasing", le lemme de Dolbeault-Grothendieck permettant de "revenir" à des formes holomorphes.

Lemme C1

Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *des courants de type* $(p,0)$ *sur* X *et supposons qu'il existe des nombres complexes* $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant* $dT_j = u_j\, d\bar{f}\wedge T_{j+1}$ $\forall\, j\in\mathbb{Z}$.
Alors il existe des p-formes holomorphes $(S_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *et des courants* $(U_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *de degré* $p-1$ *sur* X *vérifiant*

$$T_j = (-1)^p\, \bar{S}_j + dU_j - u_j\, d\bar{f}\wedge U_{j+1} \qquad \forall\, j\in\mathbb{Z}$$

et

$$dS_j = \bar{u}_j\, df\wedge S_{j+1} \qquad \forall\, j\in\mathbb{Z} \quad .$$

Lemme C2

Dans la situation du lemme C1, si on a de plus les relations

$$\bar{f}\, T_{j+1} = T_j \quad \text{pour} \quad j\leqslant j_0+p-1$$

et

$$u_{j+1} = u_j - 1 \quad \text{pour} \quad j\leqslant j_0+p-1$$

alors dans la conclusion du lemme 2 on peut choisir les p-formes holomorphes S_j *de manière à satisfaire la relation*

$$f\ S_{j+1} = S_j \qquad \text{pour}\ \ j\leqslant j_0 \quad .$$

Il n'est alors pas bien difficile de montrer que pour j_0 assez grand la p-forme holomorphe S_{j_0} (qui est relativement fermée) définit la section nulle sur $D-\{0\}$ dans le fibré de Gauss-Manin $s\to H^p(X(s),\mathbb{C})$ (voir le lemme E de [2]) . La contradiction finale (on raisonne par l'absurde en supposant vérifiées les hypothèses du lemme B1 !) tient à la relation

$$T_{j_0} = (-1)^p\, \bar{S}_{j_0} + d\, U_{j_0} - u_{j_0}\, d\bar{f}\wedge U_{j_0+1}$$

compte-tenu du fait que T_{j_0} coïncide avec $\dfrac{\omega}{|f|^{2(m+u)}\,\bar{f}^{j_0}}$ sur $X-\{f=0\}$ et donc induit une classe non nulle dans $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$, à savoir $e(s_0)$, que $\bar{S}_{j_0}$

induit 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ et que les deux autres termes ne devraient pas compter : si U_{j_0} et U_{j_0+1} étaient des formes C^∞ ce serait clair que ces deux derniers termes induisent 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$. Comme ce sont des courants cela nécessite un petit travail (voir lemme D de [2]) .

En fait la ligne de preuve esquissée ici n'est pas tout-à-fait celle de [2] qui est un peu plus compliquée mais permet d'avoir un renseignement quantitatif sur le décalage vers la gauche du pôle désiré (évaluation de j_0) .

Références

[1] D. Barlet, Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans les fibres - Inv. Math. 68, p. 129-174, 1982.

[2] D. Barlet, Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques - Preprint Nancy, Inst. E. Cartan (Janvier 1983) à paraître aux Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.

[3] D. Barlet, Contribution effective du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$ - Preprint Nancy Inst. E. Cartan (Sept. 1983).

[S] J.H.M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology Real and complex singularities - Oslo 1976, Sijthoff et Noordhoff.

D. BARLET
E.R.A. n° 839 - C.N.R.S.
Université de NANCY I
Institut Elie Cartan
B.P. 239
54506 VANDOEUVRE les NANCY Cedex