Astérisque

ROLF BERNDT

Formes de Jacobi et quelques éléments de la théorie des représentations du groupe de Jacobi

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 265-269

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__265_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 147-148 (1987), p.265-269.

FORMES DE JACOBI ET QUELQUES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE JACOBI

Par Rolf Berndt

Il s'agit de traiter un exemple pour la théorie des formes automorphes pour un groupe non réductif, d'étudier un peu les séries discrètes pour cet exemple et d'indiquer que plusieurs théorèmes de la théorie générale peuvent aussi être prouvés dans ce cadre: c'est à dire le théorème de reductibilité complète, la caractérisation des formes automorphes comme fonctions sur le groupe et un théorème de dualité.

1. Le groupe de Jacobi

Le groupe de Jacobi G^J est le produit semidirect d'un groupe de Heisenberg $H_{\mathbb{R}}$ de dimension trois et de $SL_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} G^J &= H_{\mathbb{R}} \rtimes SL_2(\mathbb{R}) \\ &= \{g = [X;\zeta;M];\ X \in \mathbb{R}^2, \zeta \in S^1,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

avec la loi de composition

$$gg' = [X'+XM';\zeta\zeta' e(\det\begin{pmatrix} X' \\ XM' \end{pmatrix});MM'] (e(z)=\exp 2\pi iz).$$

G^J opère sur $\mathbb{C} \times \mathfrak{H} = \{(v,\omega);\ v,\omega \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\omega > 0\}$ de la façon suivante $(g = [\lambda,\mu;\zeta;M])$

$$(v,\omega) \mapsto g(v,\omega) = \left(\frac{v+\lambda\omega+\mu}{c\omega+d}, \frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)$$

et fait de $\mathbb{C} \times \mathfrak{H}$ <u>un espace homogène non symmétrique</u>

$$\begin{aligned} G^J &\longrightarrow G^J/K^J = \mathbb{C} \times \mathfrak{H} \\ g &\longmapsto g(0,i) = (v,\omega) \end{aligned}$$

avec $v = p\omega+q, \omega = x+iy$, si on prend pour G^J les coordonnées

$$g = (p,q;\zeta|M) = [\lambda,\mu;\zeta;M], \quad (p,q)=(\lambda,\mu)M^{-1}, M=n(x)t(y)r(\vartheta)$$
$$n(x) = \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad t(y)=\begin{pmatrix}y^{1/2} & 0\\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}, \quad r(\vartheta) = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}.$$

2. Le théorème de réductibilité complète

Dans G^J on a les sousgroupes suivants

$$\Gamma^J = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$$
$$N^J = \{(0,q,1\ n(x));\ q,\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$A^J = \{(p,0,1|t(y));\ p \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^*\}$$
$$K^J = S^1 \times SO(2) = \{(0,0,\zeta|r(\vartheta)) = r(\zeta,\vartheta)\}.$$

Avec ces groupes, on a une sorte de <u>décomposition d'Iwasawa</u>

$$G^J = N^J A^J K^J$$

et on distingue dans $L^2(\Gamma^J\backslash G^J)$ le sous-espace $L^2_0(\Gamma^J\backslash G^J)$ des fonctions Φ, qui remplissent une condition cuspidale:

$$\int_{N^J\cap\Gamma^J\backslash N^J} \Phi(g\dot{n})d\dot{n} = 0 \text{ pour } g \in G^J.$$

Si en plus, R désigne la représentation regulière donnée par

$$R(g')\Phi(g) = \Phi(gg') \quad \text{pour} \quad g,g' \in G^J$$

on peut démontrer comme dans la théorie de SL_2 le résultat suivant

<u>Théorème:</u> $L^2_0(\Gamma^J\backslash G^J)$ <u>se décompose en une somme directe dénombrable de sousespaces irréductibles invariants sous la représentation régulière</u> R.

3. Séries discrètes

Pour dire plus des représentations intervenant dans la décomposition de L^2_0, il faut étudier la théorie des représentation de G^J. Elle est en principe bien connue par la méthode de Mackey[5] pour les produits semidirects. Alors on sait qu'on a deux séries discrètes $T^{\pm}_{k,m}(k,m \in \mathbb{Z})$ avec poids minimal respectivement maximal, qui sont caractérisées par des vecteurs f de poids minimal resp. maximal avec

$$T^{\pm}_{k,m}(r(\zeta,\vartheta))f^{\pm} = \zeta^m e^{ik\vartheta} f^{\pm} .$$

Une réalisation d'un tel vecteur comme fonction sur $\mathbb{C} \times \mathfrak{H}$ est donneé en utilisant un résultat de Satake[6] par

$$f^+(v,\omega) = e^{-2\pi i m \frac{v^2}{\omega+i}}(\omega+i)^{-k} .$$

Comme d'habitude, on a aussi des réalisations infinitésimales de $T^{\pm}_{k,m}$ en partant de la structure de l'algèbre de Lie de G^J et son complexifié $\mathfrak{g}$. Il y a deux façons de procéder.

i) Avec la <u>méthode de Mackey</u> en [2] on obtient une représentation de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel

$$V_{k,m} = V^{1/2} \otimes W^{k-1/2} ,$$

où $V_m^{1/2}$ est l'espace d'une représentation de Shale-Weil de $\mathfrak{g}$ et $W^{k-1/2}$ l'espace d'une représentation de poids k-1/2 de $\mathfrak{sl}_2$.

ii) En partant d'un isomorphisme non canonique des algèbres enveloppantes (voir par exemple Borho[3])

$$U(\mathfrak{g})' \simeq U(\mathfrak{n})' \otimes U(\mathfrak{sl}_2)$$

($\mathfrak{n}$ = Lie $H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$,' dénotant une certaine localisation), on a aussi

$$V_{k,m} = U_m \otimes W^{k-1/2}$$

où U_m est l'espace d'une représentation de poids m de $\mathfrak{n}$.

4. <u>Les formes de Jacobi et le théorème de dualité</u>.

Comme dans la théorie de $SL_2(\mathbb{R})$ on peut aussi interpréter la multiplicité $m^+_{k,m}$ de $T^+_{k,m}$ dans la représentation R de G^J sur $L^2_o(\Gamma^J \backslash G^J)$ comme dimension d'un espace de formes modulaires: Pour l'action de G^J sur $\mathbb{C} \times \mathfrak{H}$ on a un facteur d'automorphie canonique, déterminé déjà par Satake[6] mais donné par la formule

$$j_{k,m}(g;(v,\omega)) = \zeta^m(c\omega+d)^{-k}e^m\left(-\frac{c(v+\lambda\omega+\mu)^2}{c\omega+d} + \lambda^2\omega+2\lambda v+\lambda\mu\right)$$

dans Eichler et Zagier [4], où les auteurs suivant les lignes de la théorie classique dévéloppent une théorie extensive des formes correspondants en partant de la

<u>Définition:</u> Une fonction f definie sur $\mathbb{C} \times \mathfrak{H}$ à valeurs complexes est appelée <u>forme de Jacobi de poids</u> k <u>et index</u> m si les conditions suivantes sont remplies

i) $f(\gamma(v,\omega))j_{k,m}(\gamma;(v,\omega)) = f(v,\omega)$ pour tout $\gamma \in \Gamma^J$

ii) f est holomorphe

iii) f possède à l'infini un développement de Fourier de la forme

$$\Sigma\ c(n,r)q^n\varepsilon^r \qquad q = e(\omega),\ \varepsilon = e(v)$$

avec

$$c(n,r) = 0 \text{ pour } 4mn < r^2 .$$

f est dite <u>parabolique</u> si on a en plus

iii') $$c(n,r) = 0 \quad \text{pour } 4\,mn \leq r^2 .$$

Les espaces de ces formes sont nommés $J_{k,m}$ resp. $J_{k,m}^{cusp}$.

Et comme dans la théorie générale, on peut aussi caractériser ces formes comme fonctions sur G^J; plus précisement, les relèvements

$$\varphi_{k,m} : f \mapsto \Phi_f \text{ avec } \Phi_f(g) = f(g(0,i))j_{k,m}(g_i(0,i))$$

donnent isomorphisme entre $J_{k,m}$ resp. $J_{k,m}^{cusp}$ et les espaces $A_{k,m}$ resp. $A_{k,m}^o$ des fonctions complexes sur G^J avec

1.) $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma^J$
$\Phi(gr(\zeta,\vartheta)) = \zeta^m e^{ik\vartheta}\Phi(g)$ pour tout $r(\zeta,\vartheta) \in K^J$,

2.) $\mathcal{L}_{X_-}\Phi = \mathcal{L}_{Y_-}\Phi = 0$, où $\mathcal{L}_{X_-}$ et $\mathcal{L}_{Y_-}$ sont certains opérateurs différentiels, qui s'expliquent par $\mathfrak{g}$, 3.) $|\Phi(g)| \leq M\, y^{k/2} e^{-2\pi m p^2 y}$ pour $y \to \infty$ resp.

3') $\int\limits_{\Gamma^J \cap N^J \setminus N^J} \Phi(g\dot{n})\,d\dot{n} = 0$ pour tout $g \in G^J$.

Alors on a pour la multiplicité $m^+_{k,m}$ le

<u>Théorème de dualité:</u> $m^+_{k,m} = \dim J^{cusp}_{k,m}$.

5. <u>Un modèle projectif de la courbe elliptique universelle de niveau</u> N.

Pour donner une sorte d'application de ce formalisme on indique encore une observation contenue dans la thèse de Bartsch[1].

Les fonctions

$$f_\alpha(v,\omega) = e^{\frac{-N\mu(1,\omega)v^2}{2}}\,\sigma(v,\omega) \prod_{\mu=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\wp(v-\frac{\alpha}{N},\omega)-\wp(\frac{\mu}{N},\omega)}{\wp'(\frac{\mu}{N},\omega)} \cdot \frac{\wp(v,\omega)-\wp(\frac{\mu}{p},\omega)}{\wp(v-\frac{\alpha}{N},\omega)-\wp(\frac{\mu}{N}\omega,\omega)}$$

$\alpha = 1,2,\ldots N$, N premier ≥ 5 ,

qui sont essentiellement celles que Klein a utilisées pour ses "<u>courbes elliptiques normales</u>" peuvent être identifiées commes formes de Jacobi non holomorphes de niveau $-\frac{3N-1}{2}$ et index $\frac{N}{2}$, et donnent un modèle de la courbe elliptique universelle de niveau N, parfois aussi nommée surface de Shioda, c'est à dire le compactifié de

$$\mathbb{Z}^2 \times \Gamma(N) \diagdown \mathbb{C} \times \mathfrak{H}.$$

<u>Références</u>

[1] Bartsch,R.: Meromorphe Funktionen auf der universellen elliptischen Kurve mit Niveau N-Struktur.Dissertation Hamburg 1985

[2] Berndt,R.: Die Jacobigruppe und die Wärmeleitungsgleichung. Math.Z. , 191 (1986), 351-361.

[3] Borho,W.: Primitive und vollprimitive Ideale in der Einhüllenden von $s\ell(5,\mathbb{C})$ J.of Algebra <u>43</u> (1976) 619-654

[4] Eichler,M.,Zagier,D.: The Theory of Jacobi Forms Birkhäuser,Progr.in Math.,vol.55,Basel 1985

[5] Mackey,W.: Unitary representations of group extensions I. Acta Math. <u>99</u> (1958) 265-311

[6] Satake,I.: Fock Representations and Thetafunctions. In:Ann.Math. Studies <u>66</u> (1971) 393-405

Rolf Berndt
Mathematisches Seminar der Universität Hamburg
Bundesstr. 55
D 2000 - HAMBURG 13