F. Diener

Fleuves et variétés centrales

Astérisque, tome 150-151 (1987), p. 59-66
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__150-151__59_0>

Fleuves et variétés centrales

F. DIENER

Les fleuves à l'infini des champs de vecteurs du plan sont des trajectoires non bornées particulières le long desquelles se rassemblent toutes les trajectoires voisines. C'est l'examen des tracés de trajectoires par ordinateur qui a mis en évidence l'existence et l'importance de ces trajectoires. On a montré que, dans le cas des champs de vecteurs polynômiaux, il est possible, par des calculs élémentaires, à partir des seules composantes du champs, de déterminer si le champs présente des fleuves, combien ils sont, où ils coulent et quel est le comportement relatif des trajectoires voisines [2] [3] [4].

On peut se demander(1) comment les propriétés asymptotiques des fleuves à l'infini se traduisent, lorsque l'on examine le champs "depuis l'infini" c'est-à-dire au voisinage d'une singularité à l'infini. Je me propose de montrer ici que les résultats obtenus sur les fleuves conduisent naturellement à une compactification du plan dans laquelle le fleuve est une trajectoire centrale au voisinage d'un point stationnaire du compactifié du champs (théorème 1). Ce lien entre les fleuves et les études locales classiques de champs de vecteurs au voisinage d'une singularité permet d'appliquer à ceux-ci les résultats de sommabilité de Martinet-Ramis (théorème 2) et de poser à nouveau le problème de la "sommation au plus petit terme".

1. RAPPELS DE QUELQUES DÉFINITIONS : FLEUVES, ORDRE D'UN FLEUVE

Pour de plus amples détails sur les définitions suivantes, on pourra se reporter à [3] ou [4].

Définition : Soient $r \in \mathbf{Q}$ et $P(X,Y) = \sum_i \alpha_i X^{n_i} Y^{m_i}$ un polynôme. On appelle r-degré de P, noté $\partial_r°(P)$, le "degré" du polynôme généralisé $P(X,X^r)$, c'est-à-dire la quantité

$\operatorname{Max}_i (n_i+m_i r)$. A tout polynôme P de r-degré d, on associe le polynôme P_r constitué des seuls monômes de P de r-degré exactement égal à d.

(1) Ceci m'a été suggéré par plusieurs collègues, à l'occasion de mon exposé sur les fleuves à ce colloque, parmi lesquels A. Chenciner, F. Dumortier et R. Roussarie que je remercie vivement.

Considérons un champ de vecteurs polynômial

$$(1)\ \begin{cases} X' = P(X,Y) \\ Y' = Q(X,Y), \end{cases}$$

r un élément de $\mathbf{Q}$, k un réel, avec $k \neq 0$ si $r \neq 0$ et P_r et Q_r les polynômes associés à P et Q respectivement, comme indiqué ci-dessus.

Définition : Une demi trajectoire $\big(X(t),Y(t)\big)$ de (1) telle que $\lim_{t\to\infty} X(t) = +\infty$ est appelée un fleuve de type (k,r) en $X = +\infty$ si elle vérifie les conditions suivantes :

1°) $c(r) =: 1 - r + \partial_r{}^\circ(Q) - \partial_r{}^\circ(P) > 0$ et k satisfaisant $Q_r(1,k) = 0$

2°) $\lim_{t\to +\infty} Y(t) \,/\, \big(X(t)\big)^r = k$

3°) $P_r\ (1,k) \neq 0$ et $\frac{\partial}{\partial y}(Q_r)(1,k) \neq 0$

On définit de façon analogue un fleuve de type (k,r) en $X = -\infty$ et, moyennant le fait d'échanger les rôles de X et de Y et la condition $c(r) > 0$ en $c\ (r) < 0$, un fleuve de type (k,r) en $Y = +\infty$ et en $Y = -\infty$. Les théorèmes 1 et 2 ci-dessous se généralisent immédiatement à ces autres fleuves à l'infini.

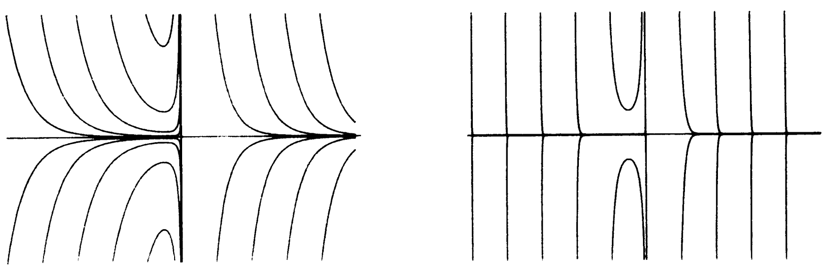

Figure 1 : Trajectoires des champs $\begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y(1+X) \end{cases}$ et $\begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y(1+X^3) \end{cases}$ respectivement. Ces deux champs présentent l'un comme l'autre un fleuve en $X = +\infty$ et un fleuve en $X = -\infty$ de type (0,0). Ce qui différencie nettement ces deux tracés est la valeur de c: pour le premier c=1 et pour le second c=3.

La quantité $c(r)$ qui apparaît dans la définition d'un fleuve est appelée l'ordre du fleuve. Un champ donné peut avoir plusieurs fleuves de même ordre (figure 1) mais aussi plusieurs fleuves d'ordres différents [3]. L'ordre mesure en quelque sorte la rapidité de convergence des autres trajectoires vers le fleuve. Rappelons brièvement ce que l'on peut entendre par là.

Tout d'abord, l'ordre c apparaît dans le modèle lent-rapide du champ : on sait en effet que si $\varepsilon > 0$ est infinitésimal et si l'on examine le champ (1) au travers du r-macroscope

$$(2)\quad \begin{cases} x = \varepsilon X \\ y = \varepsilon^{r} Y \end{cases}$$

on obtient, à un changement de paramétrage près, un champ lent-rapide de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} x' = p(x,y) \\ y' = \dfrac{1}{\varepsilon^{c}} q(x,y) \end{cases}$$

où $p(x,y)$ et $q(x,y)$ sont des polynômes presque standards ayant pour ombres P_r et Q_r respectivement [4].

Une conséquence de cette observation [2] est que l'écart entre un fleuve et une trajectoire voisine du fleuve est une fonction de X à croissance en $\exp(bX^{c})$. Nous verrons au paragraphe 3 une nouvelle propriété de l'ordre c d'un fleuve.

2. LES FLEUVES VUS DE L'INFINI.

Pour examiner le champs depuis l'infini, plusieurs compactifications sont envisageables. La plus élémentaire, qui consiste à compactifier à l'aide d'un seul point, est, dans le cas des fleuves, le plus souvent inadaptée, car tous les fleuves à l'infini viendraient tendre vers cet unique point, qu'il serait alors nécessaire de désingulariser, moyennant une suite d'éclatements. Une compactification projective permettrait seulement de faire l'économie du premier éclatement. Il est plus commode, tirant profit des propriétés géométriques connues des fleuves, de poser directement, comme cela a été fait dans [3] et [4],

si $r \neq 0$

$$(4)\quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} u \cos v \\ y = (\operatorname{tg} u \sin v)^{[r]} \end{cases} \quad \text{où } (w)^{[r]} = |w|^{r}.\ \text{signe}(w)$$

et si $r = 0$

$$(4')\quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} u \\ y = v. \end{cases}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1

Soit $[X(t),Y(t)]$ un fleuve en $X=+\infty$ de type (k,r) de (1), $r\neq 0$ (resp. $r=0$) et soit $v_o=\text{arctg}\,[(k)^{1/r}]$ (resp. $v_o=k$). Alors le champ obtenu à partir de (1) par le changement de variable (4) [resp. (4')], puis par prolongement analytique aux points $u=\pi/2$, est stationnaire en $(\pi/2,\ v_o)$, présente une variété centrale en ce point et le fleuve considéré est contenu dans une telle variété centrale.

Rappelons qu'un champ de vecteurs

$$(5)\qquad \begin{cases} u' = F(u,v) \\ v' = G(u,v) \end{cases}$$

ayant en un point stationnaire (u_o,v_o), une partie linéaire présentant deux valeurs propres réelles dont l'une est nulle et l'autre non, possède une trajectoire $[u(t), v(t)]$ (non nécessairement unique) qui tend vers le point stationnaire quand t tend vers $+\infty$, et telle que $\lim\limits_{t\to+\infty}\ [u'(t),\ v'(t)]$ est un vecteur propre associé à la valeur propre nulle. Ce résultat est un cas particulier pour la dimension 2 du théorème de la variété centrale [5]. Cette trajectoire est dite centrale pour ce point stationnaire.

Preuve du théorème 1

Par hypothèse le champ présente un fleuve de type (k,r) et donc $c(r) > 0$. Ceci montre que, pour compactifier le champ, image de (1) par (4) [ou (4')], il convient de multiplier ses composantes par $(\cos u)^{d-r}$ où $d = \partial_r°(Q)$. Comme $Q_r(1,k) = 0$, le champ s'annule en $(\pi/2,\ v_o)$. La condition 2°) indique précisément que l'image du fleuve tend, quand $t\to\infty$, vers ce point. Il est clair que la "droite à l'infini" $u = \pi/2$ est invariante et l'étude de la partie linéaire du champ au point $(\pi/2,\ v_o)$ indique qu'elle correspond à une valeur propre qui est non nulle en vertu des conditions 3°). L'autre valeur propre est nulle, par contre, grâce à la condition $c(r) > 0$. Comme le fleuve tend vers ce point stationnaire en restant contenu dans $|\ u\ | < \pi/2$, il est nécessairement central.

On rapprochera le résultat précédent du théorème 6 de [1] où est amorcée l'étude des fleuves locaux au voisinage d'un point stationnaire d'un champ de vecteurs.

A titre d'exemple, les images par la compactification (4') des deux champs dont on a présenté les trajectoires sur la figure 1 sont respectivement

$$\begin{cases} u' = \cos^2 u\ \text{tg}\ u \\ v' = -v\ (1+\text{tg}\ u) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u' = \cos^2 u\ \text{tg}\ u \\ v' = -v\ (1+\text{tg}^3\ u) \end{cases}$$

soit, pour les parties linéaires, en $(\pi/2, 0)$, et après multiplication des champs par $\cos u$ et $\cos^3 u$ respectivement

$$\begin{cases} u' = 0 \\ v' = -v \end{cases}$$

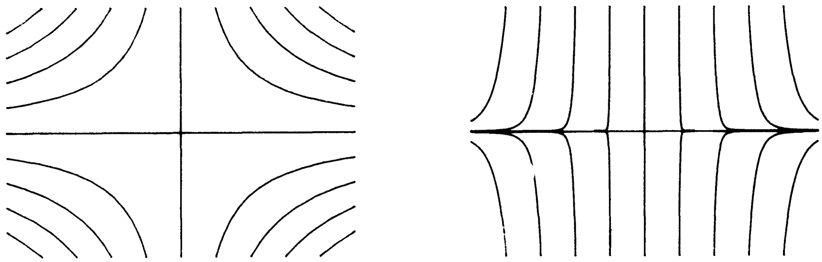

Figure 2 : Trajectoires d'un champ au voisinage d'un point stationnaire dans le cas où la partie linéaire a deux valeurs propres non nulles (pas de variété centrale) et dans le cas où l'une des valeurs propres est nulle, (présence d'une variété centrale). (les deux champs sont $x' = x$, $y' = -y$ et $x' = x^{[2]}$ $y' = -y$, pour $-0{,}01 \leq {x \atop y} \leq 0{,}01$)

3. SOMMABILITÉ DES FLEUVES

Une propriété importante des fleuves à l'infini est qu'ils possèdent un développement asymptotique. Généralement ce développement est divergent et on peut s'intéresser à sa p-sommabilité (au sens de Ramis [6]). Rappelons que si une série formelle $\sum_n \alpha_n X^{-n}$ est p-sommable, la série $\sum_n (\alpha_n/(n!)^{1/p})\, X^{-n}$ est convergente, pour X assez grand.

Théorème 2

Soit $(X(t), Y(t))$ un fleuve de type (k,r) en $X = +\infty$ d'un champ (1) d'ordre $c = c(r)$. Alors son développement asymptotique $Y(X) \sim X^r(k + \sum_{n\geq 1} \alpha_n X^{-n/q})$ est une série cq-sommable, où q est le plus petit entier positif tel que cq soit entier.

Ce théorème met en évidence la relation qui existe entre l'ordre de sommabilité (i.e. cq) du développement asymptotique d'un fleuve et le "type exponentielle" (i.e. $\exp(bX^c)$) de l'écart entre le fleuve et les trajectoires voisines. L'existence d'une telle relation avait été conjecturée par Ramis.

<u>Preuve du théorème 2</u>

C'est une conséquence du résultat suivant de Martinet et Ramis [6] : considérons un champ (5) stationnaire en (u_o,v_o) et possédant en ce point deux valeurs propres, l'une nulle et l'autre non nulle. On sait (Poincaré-Dulac) qu'il existe un difféomorphisme analytique qui transforme ce champ en un champ de la forme

$$\begin{cases} u' = u^{p+1} \\ v' = G(u,v) \quad p \text{ entier, } p>0,\ G(0,v) = \lambda v \end{cases}$$

On peut se ramener ensuite à la "forme normale" suivante [6] :

$$(6) \quad \begin{cases} U' = U^{p+1} \\ V' = V\,(1+\lambda U^p) \qquad p \text{ entier, } p>0,\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

par une transformation de la forme

$$(7) \quad \begin{cases} u = U \\ v = \phi\,(U,V) \end{cases}$$

où ϕ est une série formelle en U à coefficients analytiques en V. Généralement cette série n'est pas convergente mais Martinet et Ramis ont montré qu'elle est toujours p-sommable.

Le théorème en découle facilement : supposons tout d'abord que c est entier (et donc $q=1$). Après compactification du champ (1) en un champ (5), on constate que les dérivées partielles successives de F par rapport à u sont nulles jusqu'à l'ordre c et que la première de ces dérivées partielles non nulle est précisément celle d'ordre $c+1$. On a donc $p=c$. Sous sa forme normale (6), le champ obtenu a pour variété centrale $V=0$. Donc, sous la forme (5), la variété centrale a pour développement $V= \phi\,(U,0)$; or ce développement (formel) est p-sommable.

Plus généralement si c est rationnel, et si q est le plus petit entier positif tel que qc soit entier, on se ramène immédiatement au cas précédent en faisant préalablement le changement d'inconnue $\hat{X} = X^{1/q}$, à ceci près que, pour la forme normale (6) du champ, on a alors $p = qc$.

4. CONCLUSION

Pour finir, rappelons le problème de la "sommation au plus petit terme". Considérons une fonction $Y = Y(X)$ et qui possède un développement asymptotique $\sum_{n\geq 0} a_n X^{-n}$ en $X = +\infty$ et examinons l'erreur $R_N(X)$ commise en remplaçant Y par la somme tronquée des N premiers termes de son développement

$$R_N(X) = \left| Y(X) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n X^{-n} \right|$$

Lorsque le développement asymptotique n'est pas convergent, cette erreur ne tend pas vers zéro quand N tend vers l'infini. Lorsque N augmente, R_N commence généralement par décroître, ce qui signifie que la qualité de l'approximation de Y par son développement augmente chaque fois que l'on ajoute un nouveau terme, puis l'erreur se met à croître. On voit qu'il serait intéressant, en pratique, de savoir calculer un indice N pour lequel cette erreur soit minimale. Poincaré avait suggéré de tronquer la somme, pour chaque X, au premier indice $N_o(X)$ pour lequel la suite des termes successifs

$$a_o \ , \ \frac{a_1}{X} \ , \ \frac{a_2}{X^2} \ , \ \frac{a_3}{X^3} \ , \ \ldots$$

atteint un minimum.

Cette "sommation au plus petit terme" a été étudiée par Van den Berg dans [7]. Il montre que, si elle n'est pas toujours bonne, elle est cependant optimale pour bon nombre de séries, ayant un type Gevrey d'ordre 1. Le théorème 2 indique que le type Gevrey des développements des fleuves est $1+1/qc$. Il est donc toujours strictement supérieur à 1. En fait, les résultats de Van den Berg s'étendent à ces cas-là, et on peut constater que, expérimentalement, la sommation au plus petit terme des fleuves est très satisfaisante. Notons cependant que, la décroissance des termes successifs vers "le plus petit" terme étant si brutale (probablement exponentielle ?), on atteint des termes pratiquement égaux au plus petit pour des indices N bien inférieurs à l'indice du plus petit terme.

RÉFÉRENCES

[1] Artigue (M), Isambert (E), Gautheron (V). "Une notion non standard d'attracteurs les fleuves". Actes des journées Mathématiques finitaires et Analyse Non Standard. A paraître.

[2] Diener (F). "Propriétés asymptotiques des fleuves". Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1985).

[3] Diener (M). "Détermination et existence des fleuves en dimension 2". Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1985).

[4] Diener (M), Reeb (G). "Fleuves : "Sur de nouvelles trajectoires remarquables des champs de vecteurs polynômiaux". A paraître.

[5] Dumortier (F), Roussarie (R). "Etude locale des champs de vecteurs à paramètres" Journées singulières de Dijon. Astérisque 59-60 (1978).

[6] Martinet (J), Ramis (J.P). "Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre". Publ. Math. I.H.E.S. 55 (1982) 63-164.

[7] Van den Berg (I). "Sur la sommation au plus petit terme des séries divergentes". Actes des journées Mathématiques finitaires et Analyse Non Standard. A paraître.

Francine DIENER
Université de Paris X
UER de Sciences Economiques
200, Avenue de la République
92001 NANTERRE Cedex