AHMED EL SOUFI

Immersions minimales sphériques : restrictions sur la courbure et la codimension

Astérisque, tome 154-155 (1987), p. 255-266

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__255_0>

EXPOSÉ n° XIII

IMMERSIONS MINIMALES SPHÉRIQUES : RESTRICTIONS SUR LA COURBURE ET LA CODIMENSION

Ahmed EL SOUFI

INTRODUCTION.

Dans cet exposé, nous nous intéressons aux variétés riemanniennes compactes (M,g) telles qu'il existe une immersion isométrique minimale f de (M,g) dans une sphère canonique S^N (de diamètre π !) pour au moins un N . Pour tout n , nous notons $\mathcal{M}^n$ l'ensemble de ces variétés qui sont de dimension n . L'exposé suivant contient essentiellement deux types de résultats : d'une part, une caractérisation de la sphère S^n parmi les variétés de $\mathcal{M}^n$ utilisant la forme particulière de sa courbure, d'autre part, nous donnons certaines propriétés globales des variétés appartenant à $\mathcal{M}^n$ sous des hypothèses essentiellement locales qui se réduisent très souvent à une minoration de la courbure scalaire et une majoration du diamètre ou du volume.

Dans le I, nous montrons (Théorème 2) que la connaissance d'un minorant s de la courbure scalaire et d'un majorant d du diamètre d'une variété (M,g) permet de calculer un entier $N_0(s,d)$ tel que la variété (M,g) ne peut s'immerger minimalement dans aucune sphère S^N si elle ne s'immerge pas minimalement dans la sphère S^{N_0} de dimension N_0 . L'intérêt de ce théorème est double. D'une part, on peut en déduire que la sphère S^n est isolée dans $\mathcal{M}^n$ par sa courbure scalaire (cf. 3). D'autre part, si l'on note $\mathcal{M}^n(s,d)$ l'ensemble des variétés de $\mathcal{M}^n$ ayant une courbure scalaire minorée par s et un diamètre majoré par d , le Théorème 2 nous dit alors que les variétés de $\mathcal{M}^n(s,d)$ sont toutes immergées minimalement dans la même et unique sphère S^{N_0} . Il est à noter que d'après un travail non encore publié de Bérard, Besson et Gallot, la distance de Hausdorff dans S^{N_0} induite sur $\mathcal{M}^n(s,d)$ ferait de $\mathcal{M}^n(s,d)$ un espace métrique compact.

Nous avons aussi un résultat de finitude pour $\mathcal{M}^n(s,d)$. En effet, il est classique (cf. 1) que $\mathcal{M}^n(s,d)$ est contenu dans l'ensemble des variétés riemanniennes ayant une courbure sectionnelle bornée, un diamètre majoré et un volume minoré (par celui de S^n). Or, cet ensemble ne contient (à difféomorphisme près) qu'un nombre fini de variétés différentiables d'après le théorème de finitude de J. Cheeger. On en déduit en particulier que, pour les variétés minimales, il est possible de trouver des bornes inférieures et supérieures de tous les invariants topologiques qui ne dépendent que d'un minorant de la courbure scalaire et d'un majorant du diamètre.

Tous les résultats sus-cités n'ont malheureusement qu'une portée théorique et nous devrons recourir à d'autres techniques pour avoir des résultats quantitativement significatifs. De tels résultats existent depuis J. Simons pour la caractérisation de S^n dans M^n. Ce dernier obtient en effet dans [11] que S^n est la seule variété de M^n dont la courbure scalaire dépasse $n(n-1)-\frac{n}{2}$ (où $n(n-1)$ est la courbure scalaire de S^n). D'autres résultats du même type, mais concernant la courbure sectionnelle se trouvent dans [8] , [10] , [6] , [1] , etc. Le résultat optimal dans ce sens a été obtenu par T. Itoh ([7]) :

" La sphère S^n est la seule variété de M^n ayant une courbure sectionnelle strictement supérieure à $\frac{n}{2(n+1)}$, où $\frac{n}{2(n+1)}$ est la courbure sectionnelle du projectif réel $(\mathbb{R}P^n, 2(n+1)/n\ \mathrm{can})$ plongé minimalement dans $S^{\frac{1}{2}(n(n+3)-2)}$ ".

Dans le II nous montrons (cf. corollaire 6) que, pour toute variété (M,g) de M^n , si une certaine expression en la courbure est supérieure à la valeur qu'elle prend sur les espaces projectifs réel, complexe, quaternionien ou de Cayley standards alors (M,g) est isométrique à $\mathbb{S}^n$.

Pour ce qui est des résultats globaux, nous les trouverons tout d'abord dans le II sous forme de formules intégrales en la courbure. En dimension 4, ces formules intégrales font apparaître la caractéristique d'Euler et nous montrons alors que la connaissance d'un minorant de la courbure et d'un majorant du volume d'une variété (M,g) de M^4 permet le calcul de deux entiers relatifs N_1 et N_2 tels que la caractéristique d'Euler de M soit comprise entre N_1 et N_2 . Pour donner un sens à ces entiers nous signalons que l'on a $N_1 = \chi(M) = N_2$ lorsque $M = S^4$ ou $\mathbb{C}P^2$) .

Enfin, dans le III , nous montrons que toute variété kählérienne de M^4 a sa courbure scalaire inférieure ou égale à 8 l'égalité(en tout point) n'étant atteinte que pour le projectif complexe $(\mathbb{C}P^2, 3\mathrm{can})$ et la variété produit $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$. Dans le cas général (sans l'hypothèse kählérienne), nous montrons que les deux espaces ci-dessus sont les seules variétés de M^4 dont le second nombre de Betti est non nul et qui possèdent une courbure scalaire supérieure ou égale à 8 .

I. CALCUL D'UNE CODIMENSION "TEST" POUR L'EXISTENCE D'IMMERSIONS ISOMÉTRIQUES MINIMALES.

Les notations suivantes seront valables pour toute la suite de l'exposé.

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n . Nous désignerons resp. par K , Ric et $Scal$ les courbures sectionnelles de Ricci et scalaire de (M,g). Nous noterons K_{min} la plus petite courbure sectionnelle.
Afin d'alléger le texte nous désignerons par M^n l'ensemble de toutes les variétés compactes (M,g) de dimension n telles qu'il existe une immersion isométrique et minimale de (M,g) dans une sphère canonique S^N de rayon 1 et de dimension N pour au moins un entier N .

Les inégalités du lemme suivant interviendront dans toute la suite de l'exposé :

LEMME 1 . - Soit (M,g) une variété de M^n , alors on a en tout point de M

(i) $K_{min} \leqslant 1$, $Ric \leqslant (n-1)g$ et $Scal \leqslant n(n-1)$;

(ii) $K \geqslant 1 - \frac{1}{2}(n(n-1)-Scal)$;

(iii) $Ric \geqslant (Scal - (n-1)^2)g$.

De plus, l'égalité dans l'une au moins des 3 inégalités de (i) entraîne que $(M,g) = (S^n,can)$.

La preuve est simple et se trouve dans [5].

THÉORÈME 2 . - Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n dont la courbure scalaire est minorée par le réel s et dont le diamètre est majoré par le réel positif d . Il existe un entier $N_0(s,d)$ tel que, si la variété (M,g) n'admet pas d'immersions isométriques minimales dans la sphère S^{N_0} de dimension N_0 , alors elle n'en admet dans aucune autre sphère.

Preuve. Supposons qu'il existe une immersion isométrique minimale $f = (f_1,\dots,f_{N+1})$ de (M,g) dans S^N . On suppose de plus, quitte à remplacer N par un entier plus petit, que $f(M)$ n'est contenue dans aucune hypersphère de S^N . Les fonctions composantes $f_1,\dots,f_{N+1}$ sont de ce fait linéairement indépendantes. Il est bien connu aussi, d'après un résultat de Takahashi, que ces fonctions sont propres pour le laplacien de M et correspondent à la valeur propre n . Leur nombre $N+1$ est donc inférieur ou égal à la multiplicité de cette valeur propre. On considère alors la trace du noyau de la chaleur de M , c'est-à-dire la fonction $Z_M(t) = \sum_i m_i e^{-\lambda_i t}$ où λ_i désigne la i-ème valeur propre, m_i la multiplicité de λ_i . La remarque précédente entraîne alors l'inégalité

$$(N + 1)e^{-nt} \leqslant Z_M(t) \ .$$

Un résultat récent de Bérard et Gallot (cf.[2]) permet de comparer $Z_M(t)$ avec $Z_{S^n}(t)$. En effet il est démontré dans [2] qu'il existe une constante $\overline{T}$ qui ne dépend que d'un minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre tel qu'on ait

$$Z_M(t) \leqslant Z_{S^n}\left(\frac{t}{\overline{T}^2}\right) \ .$$

Vue l'inégalité (iii) du lemme précédent, nous posons

$$T(s,d) = \overline{T}(s-(n-1)^2,d)$$

et nous obtenons

$$(N+1)e^{-nt} \leqslant Z_M(t) \leqslant Z_{S^n}\left(\frac{t}{T^2}\right)$$

qui donne enfin

$$N \leqslant \operatorname*{Inf}_t \left(Z_{S^n}\left(\frac{t}{T^2}\right)e^{nt}\right)-1 \ .$$

L'entier N_0 égal à la partie entière du second membre de la dernière inégalité répond bien à l'énoncé du théorème. ■

Conséquence. - On a $T(n(n-1),\pi) = \overline{T}(n-1,\pi) = 1$ (la dernière égalité provient de [2]). Par suite, $N_0(n(n-1),\pi) = n$. Maintenant, si la courbure scalaire est proche de $n(n-1)$ alors, par le lemme 1 , la courbure de Ricci est proche de $n-1$ et donc le diamètre est proche de(π). La continuité de N_0 implique donc que pour ε assez petit, si $\mathrm{Scal} \geqslant n(n-1)-\varepsilon$, alors $N_0 = n$. On en déduit que toute variété vérifiant $\mathrm{Scal} \geqslant n(n-1)-\varepsilon$ ne peut appartenir à $\mathcal{M}^n$ que si elle est isométrique à S^n .

II. FORMULES INTÉGRALES ET APPLICATIONS.

a) Formules intégrales pour la courbure.

Le calcul du laplacien de certains invariants riemanniens au moyen de formules dites de Weitzenböck est une technique souvent utilisée en géométrie. Les formules intégrales qui en découlent permettent souvent de dégager certains résultats globaux. On peut trouver d'innombrables exemples d'application de cette méthode, notamment dans les travaux de S. Bochner, ainsi que dans ceux des autres auteurs cités dans le livre de K. Yano [12] .

Dans le cadre des sous-variétés minimales des sphères, plusieurs travaux sont basés sur ce même principe (voir à titre d'exemple [10], [1], ainsi que le célèbre article de J. Simons [11]). Pour ce qui nous concerne, dans le présent paragraphe, nous nous donnons une variété (M,g) immergée minimalement dans une sphère S^N, nous notons $h = (h_1,\dots,h_{N+1})$ la seconde forme fondamentale de cette variété dans $\mathbb{R}^{N+1}$ et nous nous intéressons à calculer le laplacien de Lichnerowicz des tenseurs h_i (cf [9] pour une définition de ce Laplacien). La formule de Weitzenbock que nous utiliserons pour ce laplacien est la suivante (cf.[3])

$$\Delta = \frac{1}{3} S^* S - 2\delta^*\delta - 2\mathcal{R}$$

où S est le symétrisé de la dérivation covariante D, δ la divergence, S^* et δ^* les adjoints de S et δ pour le produit scalaire intégrale et où

$$\mathcal{R}(\alpha)_{ij} = \sum_k (\mathrm{Ric}_{ik}\alpha_{kj} + \alpha_{ik}\mathrm{Ric}_{kj}) - 2 \sum_{k,\ell} R_{ikj\ell}\alpha_{k\ell} .$$

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> (M,g) <u>appartient à</u> $\mathcal{M}^n$, <u>alors la courbure de</u> (M,g) <u>vérifie l'inégalité</u>

$$(3) \qquad \int_M (n(n-1)-\mathrm{Scal})[4(n+2)K_{min} + 2\,\mathrm{Ric}_{min} - \frac{4}{n}(\frac{1}{n}\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}_{min}) -3n] \leqslant 0 .$$

<u>Preuve</u>. - Soit $f = (f_1,\dots,f_{N+1})$ une immersion isométrique minimale de (M,g) dans $S^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ et soit $h = (h_1,\dots,h_{N+1})$ la seconde forme fondamentale de (M,g) dans $\mathbb{R}^{N+1}$. La formule de Weitzenböck donne sur chaque h_i

$$\Delta h_i = \frac{1}{3} S^*S(h_i) - 2\delta^*\delta(h_i) + 2\mathcal{R}(h_i) .$$

La version intégrale est

$$(*) \qquad \int_M < \Delta h_i, h_i > = \int_M (\frac{1}{3}|Sh_i|^2 - 2|\delta h_i|^2 + 2 < \mathcal{R}(h_i), h_i >).$$

Du fait que l'immersion f est isométrique, on a, pour chaque i, $h_i = D^2 f_i$. La combinaison de cette remarque avec la formule donnant le défaut de commutation de D^2 avec Δ permet de montrer que

$$\sum_i < \Delta D^2 f_i - D^2\Delta f_i \,,\, D^2 f_i > = 0 .$$

Il en découle

$$\sum_i < \Delta h_i, h_i > = n \sum_i |h_i|^2 = n|h|^2 = n(n^2-\mathrm{Scal}).$$

Nous faisons donc la somme en i dans (*) et nous minorons chacun des 3 termes qui composent le membre de droite en fonction de Scal, Ric_{min} et K_{min} .
En effet, les calculs faits dans [5] donnent :

$$\sum_i |Sh_i|^2 \geqslant \frac{3n}{n+2}\,(3n - \frac{2}{n}\,\mathrm{Scal})^2$$

$$\sum_i |\delta h_i|^2 \leqslant (n(n-1)-\mathrm{Scal})(\frac{1}{n}\,\mathrm{Scal}-Ric_{min}) + \frac{1}{n}\,(n^2 - \mathrm{Scal})^2$$

$$\sum_i < R(h_i),h_i > \geqslant 2n\, K_{min}(n(n-1)-\mathrm{Scal}).$$

Le report de ces estimations dans l'équation (*) nous donne alors le résultat annoncé.■

Nous venons de voir comment on peut obtenir pour les variétés minimales une formule intégrale qui contient des fonctions de la courbure. Il est connu que, parmi ces fonctions de la courbure, les fonctions quadratiques jouent un rôle important dans la géométrie globale des variétés de dimension 4 . Il est alors naturel d'essayer de faire apparaître ce type de fonctions dans les formules intégrales que nous pouvons établir. Ainsi, dans le cas des variétés minimales de dimension 4 , (cf. l'application ci-dessous), nous reconnaîtrons dans ces formules la caractéristique d'Euler et nous obtiendrons pour elle un encadrement par deux constantes calculables en fonction d'un majorant du volume et d'un minorant de la courbure scalaire.

LEMME 4 . - Soit (M,g) une variété de dimension n immergée isométriquement et minimalement dans la sphère S^N et soit $h = (h_1,\dots,h_{N+1})$ la seconde forme fondamentale de (M,g) dans $\mathbb{R}^{N+1}$. Alors

(i) $\sum_i < R(h_i),h_i > = 2n\,\mathrm{Scal} - 2|Ric|^2 - |R|^2$,

(ii) $\sum_i < R(h_i),h_i > \geqslant 2nK_{min}(n(n-1)-\mathrm{Scal}).$

La preuve qui est assez technique se trouve dans [5].

THEOREME 5 . - Soit (M,g) une variété de M^n . Alors

$$3n(3 - \frac{4}{n+2})\int_M \mathrm{Scal} + \frac{4}{n(n+2)}\int_M \mathrm{Scal}^2 - 6\int_M |Ric|^2 - 2\int_M |R|^2 \leqslant 3n^3(1-\frac{3}{n+2})V(M)$$

où V(M) est le volume de M .

Pour la preuve, nous reprenons celle de 3 en tenant compte du résultat (i) du lemme précédent.
Une conséquence immédiate du Théorème 3 et du Lemme 1 est le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6. - La sphère S^n est la seule variété de M^n dont la courbure vérifie

(6) $\quad 4(n+2)K_{min}+2(Ric_{min}) - \frac{4}{n}(\frac{1}{n}\,\mathrm{Scal} - Ric_{min}) > 3n$.

Ce corollaire est optimal dans ce sens que l'inégalité qu'il contient est une égalité pour les variétés minimales suivantes : le projectif réel $(\mathbb{R}P^n, \frac{2(n+1)}{n}\mathrm{can})$, complexe $(\mathbb{C}P^m, \frac{2(m+1)}{m}\mathrm{can})$, quaternionien$(\mathbb{H}P^q, \frac{2(q+1)}{q}\mathrm{can})$ et de Cayley $(CaP^2, 3\mathrm{can})$.

6) Application : Estimation de la caractéristique d'Euler des variétés minimales de dimension 4 .

Pour une variété riemannienne (M,g) de dimension 4 , la caractéristique d'Euler est donnée par la formule

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M (|R|^2 - 4|Z|^2)$$

où $Z = \mathrm{Ric} - \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}\; g$.

Si l'on tient compte de cette formule, les résultats 4 et 5 donnent lieu à la proposition suivante dans laquelle $V(M)$ désigne le volume de M .

PROPOSITION 7. – Soit (M,g) une variété de M^4 . Alors

i) $-\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Scal}^2 + 8\int_M (1+K_{min})\mathrm{Scal} - 96\int_M K_{min} - 6\int_M |Z|^2 \geqslant 32\pi^2\chi(M)$

ii) $-\frac{1}{3}\int_M \mathrm{Scal}^2 + 7\int_M \mathrm{Scal} - 24V(M) - \frac{7}{2}\int_M |Z|^2 \leqslant 16\pi^2\chi(M)$.

COROLLAIRE 8 . - Soit (M,g) une variété de M^4 et soient k et r deux réels tels que $\mathrm{Ric} \geqslant rg$ et $K \geqslant k$. Alors

$$A(r)V(M)/V(S^4) \leqslant \chi(M) \leqslant B(K)V(M)/V(S^4)$$

où $A(r) = 2 - \frac{1}{52}(7r-19)^2$, $B(K) = 2 + \frac{8}{3}(K - \frac{1}{2})^2$ et où $V(S^4) = \frac{8}{3}\pi^2$.

Preuve. - L'inégalité (i) du corollaire précédent implique que $\int_M P(u) \geqslant 32\pi^2\chi(M)$ où $P(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8(1+k)a - 96k$. Le polynôme P étant majoré par $P(8(1+k))$, on prend $B(k) = \frac{1}{32\pi^2}P(8(1+k))$.

Pour obtenir la minoration, nous montrons par un calcul élémentaire que $|Z|^2$ est majoré par $(12-\mathrm{Scal})(\frac{\mathrm{Scal}}{4} - r)$. Nous reportons cette dernière quantité dans l'inégalité (ii) de 7, et nous procédons comme précédemment. ■

Les inégalités de 8 sont atteintes pour plusieurs variétés de M^n . En effet, ces inégalités donnent :

- pour S^4 , avec $k = 1$, $r = 3$ et $V = \frac{8}{3}\pi^2$: $2 \leqslant \chi(M) \leqslant 2$;
- pour $(\mathbb{C}P^2, 3\mathrm{can})$ avec $k = \frac{1}{3}$, $r = 2$ et $V = \frac{9}{2}\pi^2$: $3 \leqslant \chi(M) \leqslant 3$;
- pour $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ (où $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ est la sphère de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$) avec $k = 0$, $r = 2$ et $V = 4\pi^2$: $3 \leqslant \chi(M) \leqslant 4$;
- pour toute variété (M,g) de M^4 à courbure positive ou nulle : $\chi(M) \leqslant \frac{V(M)}{\pi^2}$.

COROLLAIRE 9 . - Soit (M,g) une variété de M^4 . On suppose que la courbure scalaire de M est minorée par un réel s et que son volume est majoré par un réel positif v . Alors

$$A(s-1)v_A \leqslant \chi(M) \leqslant B(\frac{s}{2} - 5)v$$

$$\text{où } v_A = \begin{cases} \frac{8}{3}\pi^2 & \text{si } A > 0 \\ v & \text{si } A < 0 \end{cases}$$

(A et B sont les fonctions réelles définies dans l'énoncé 8 ci-dessus).

Preuve. - Le lemme 1 nous dit que, puisque Scal est minoré par s , alors K et Ric sont minorés respectivement par $\frac{s}{2} - 5$ et $s - 9$. De plus, on sait que pour toute variété (M,g) de M^4 , on a $V(M) \geqslant V(S^4) = \frac{8}{3}\pi^2$. Le résultat découle alors immédiatement de 8 ■

III. THÉORÈME D'ANNULATION POUR LE SECOND NOMBRE DE BETTI DES VARIÉTÉS MINIMALES DE DIMENSION 4 .

La comparaison des laplaciens Δ et D^*D sur les 1-formes extérieures fait apparaître la courbure de Ricci. Ceci permet de montrer que les variétés à courbure de Ricci strictement positive ont un premier nombre de Betti nul (théorème de Bochner). Dans le présent paragraphe, nous nous plaçons en dimension 4 et nous nous intéressons à la formule de Weitzenböck suivante (cf.[9])

$$\Delta = D^*D + \mathcal{R}$$

qui donne pour toute 2-forme harmonique α

$$\int_M |D\alpha|^2 = -\int_M < \mathcal{R}(\alpha),\alpha > .$$

Ceci nous permet d'obtenir l'annulation du second nombre de Betti sous l'hypothèse de positivité stricte de l'opérateur $\mathcal{R}$. Nous montrerons que pour les variétés minimales cette dernière hypothèse est vérifiée dès que la courbure scalaire est strictement supérieure à 8 . De plus, nous caractériserons les variétés du cas-limite $\mathrm{Scal} \geqslant 8$.

Notre première affirmation découle en particulier du lemme suivant.

LEMME 10. - <u>Soit</u> (M,g) <u>une variété immergée isométriquement et minimalement dans une sphère</u> S^N . <u>On note</u> B <u>la seconde forme fondamentale de cette immersion</u>. <u>Si</u> α <u>est une</u> 2-<u>forme extérieure sur</u> M , <u>alors</u>, <u>en tout point de</u> M , <u>on a</u>

(i) $< \mathcal{R}(\alpha),\alpha > \geqslant (\mathrm{Scal}-8)|\alpha|^2$;

(ii) <u>dans une base orthonormée</u> (e_i) <u>de</u> T_mM <u>pour laquelle</u>

$\alpha_m = \frac{|\alpha|}{2}(e_1^*\wedge e_2^* + e_3^*\wedge e_4^*)$, <u>on a</u>

$$<\mathcal{R}(\alpha),\alpha > = \frac{|\alpha|^2}{2}\{2(\mathrm{Scal}-8) + |B_{11} + B_{33}|^2 + |B_{11} + B_{44}|^2 + |B_{22} + B_{33}|^2 + |B_{22} + B_{44}|^2 + 2|B_{13}-B_{24}|^2 + 2|B_{14} + B_{23}|^2 + 4|B_{12}|^2 + 4|B_{34}|^2\}.$$

La preuve est assez technique et se trouve dans [5].

Pour caractériser le cas-limite, nous établissons le résultat suivant :

PROPOSITION 11 . - <u>Soit</u> (M,g,J) <u>une variété kählérienne de dimension</u> 4 <u>immergée isométriquement et minimalement dans une sphère</u> S^N <u>et non contenue dans aucune hypersphère</u>. <u>On suppose de plus que la seconde forme fondamentale</u> B <u>de cette immersion vérifie pour tout</u> $X \in TM$ $B(JX,JX) = B(X,X)$.

Alors (M,g,J) est l'une des deux variétés suivantes : $(\mathbb{C}P^2, 3can)$ plongée dans S^7 ou $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ plongée dans S^5.

Notes. On rappelle que les plongements minimaux de $(\mathbb{C}P^2, 3can)$ dans S^7 et de $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$ dans S^5 sont rigides, i.e. uniques à une isométrie de S^N près.

Preuve. - Soit α la forme de Kähler de la variété (M,g,J). En n'importe quel point de M, cette forme s'écrit dans une base adaptée à la structure complexe (i.e. telle que $e_1, e_2 = J(e_1), e_3, e_4 = J(e_3)$) $\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$.

Le lemme précédent (assertion (ii)) nous donne sous l'hypothèse vérifiée par la seconde forme fondamentale

$$< \mathcal{R}(\alpha), \alpha > = 2(\mathrm{Scal}-8).$$

Par ailleurs, la forme α est parallèle et on a donc (par la formule de Weitzenböck)

$$\mathcal{R}(\alpha) = 0 .$$

Il s'ensuit que Scal est égal à 8. D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier par un calcul (relatif à la base $\{e_i\}$) qui utilise les équations de Gauss et les conditions sur B, que la courbure de Ricci est colinéaire à la métrique g au point m. On en déduit que la variété est d'Einstein et que sa courbure de Ricci est égale à 2.

Un résultat classique de S. Kobayashi montre que, étant kählérienne à courbure de Ricci strictement positive, la variété M est simplement connexe. Nous réunissons ainsi toutes les conditions d'applications du théorème de N. Ejiri (cf. [4]) montrant que toute variété de $\mathcal{M}^4$ simplement connexe et à courbure de Ricci supérieure ou égale à 2 est soit (S^4, can) soit $(\mathbb{C}P^2, 3can)$, soit $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$. La sphère S^4 est exclue car (M,g) est supposée kählérienne. ∎

COROLLAIRE 12 . - Soit (M,g) une variété kählérienne appartenant à $\mathcal{M}^4$. Alors :

(i) la courbure scalaire Scal de (M,g) est en tout point inférieure ou égale à 8 ;

(ii) le cas limite (Scal constante et égale à 8) contient exactement les deux variétés suivantes : $(\mathbb{C}P^2, 3can)$ et $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Preuve. - Soit α la forme de Kähler de (M,g). Cette forme vérifie $D\alpha = \Delta\alpha = 0$. Par suite $\mathcal{R}(\alpha) = 0$ et la première affirmation découle alors immédiatement de l'assertion (ii) du Lemme 10. Cette même assertion nous dit aussi que dans le cas où

Scal = 8 , la seconde forme fondamentale B de n'importe quelle immersion minimale de (M,g) dans une sphère S^N vérifie pour tout point m et toute base de réduction de α_m

$$B_{11} = B_{22} = -B_{33} = -B_{44} , B_{12} = B_{34} = 0 ,$$

$$B_{13} = B_{24} , B_{14} = - B_{23} .$$

Ces dernières égalités suffisent en fait pour montrer que B(JX,JX) = B(X,X) pour tout X de TM où J est la structure complexe de M . Nous sommes ainsi ramenés à la proposition précédente. ∎

THÉORÈME 13. - Soit (M,g) une variété de M^4 dont la courbure scalaire est supérieure ou égale à 8 . Alors, ou bien le second nombre de Betti de M est nul, ou bien (M,g) est l'une des deux variétés suivantes : $(\mathbb{C}P^2, 3can)$ ou $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Preuve. - Si le second nombre de Betti est non nul, il existe alors une 2-forme harmonique non nulle de α . L'hypothèse Scal ⩾ 8 implique (d'après le Lemme 10 , assertion (i)) que $D\alpha = 0$. Le théorème découle alors de 12 . ∎

Comme application de la conjecture de Poincaré (démontrée en dimension 4 par Freedman) nous savons que pour une variété simplement connexe de dimension 4 , la nullité du second nombre de Betti implique que la variété est homéomorphe à la sphère S^4 . Nous pouvons donc énoncer le corollaire suivant :

COROLLAIRE 14 . - Soit (M,g) une variété simplement connexe de M^4 dont la courbure scalaire est supérieure ou égale à 8 . Alors, ou bien M est homéomorphe à S^4 , ou bien (M,g) est isométrique à l'une des deux variétés suivantes : $(\mathbb{C}P^2, 3can)$ ou $S^2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \times S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] K. BENKO, M. KOTHE, K.D. SEMMLER, U. SIMON, Eigenvalues of the Laplacien and curvature,Colloquium Math. 42 (1979), 19-31.

[2] P. BERARD, S. GALLOT, Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et applications à l'estimation de quelques invariants géométriques, Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz 1983/84 .

[3] J.P. BOURGUIGNON, Formules de Weitzenböck en dimension 4, in Géométrie riemannienne de dimension 4, Séminaire Arthur Besse 1978/79, Exposé n°XVI, Cedic-Nathan (1981).

[4] N. EJIRI, Compact minimal submanifolds of a sphere with positive Ricci Curvature, J. Math. Soc. Japan 3 (1979), 251-256.

[5] A. EL SOUFI, Quelques obstructions à l'existence d'immersions isométriques minimales d'une variété riemannienne dans les sphères, Thèse de 3ème cycle Institut Fourier (1983).

[6] M. KOZLOWSKI, U. SIMON, Minimal immersions of 2-manifolds into spheres, Math. Z. 186 (1984), 377-382.

[7] T. ITOH, Addendum to my paper "On Veronese manifolds", J. Math. Soc. Japan (1978).

[8] H.B. LAWSON, Local rigidity theorem for minimal hypersurfaces, Ann. Math. 89 (1969), 187-197.

[9] A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, Publication IHES n°10 (1961), 293-344.

[10] U. SIMON, Submanifolds with parallel mean curvature and the curvature of minimal submanifolds of spheres, Arch. Math 29 (1977), 100-104.

[11] J. SIMONS, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. Math. 88 (1968), 62-105.

[12] K. YANO, Integral formulas in Riemannian geometry, ure and applied Math., Marcel Dekker, New-York (1970).

* * * *

Ahmed EL SOUFI
Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, chemin de la Houssinière
44072 NANTES Cedex