DAVID HARARI

Groupe de Brauer de certaines hypersurfaces

Astérisque, tome 209 (1992), p. 203-214

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__203_0>

GROUPE DE BRAUER DE CERTAINES HYPERSURFACES

David HARARI

1. Rappels et notations

Dans toute la suite, k désignera un corps de nombres, Ω_k l'ensemble de ses places, $\bar{k}$ une clôture algébrique fixée de k, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit X une k-variété algébrique lisse. On dit que X vérifie le principe de Hasse si la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$. On dit que X vérifie l'approximation faible si la condition $X(k) \neq \emptyset$ implique que $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$, muni de sa topologie produit, pour tout ensemble fini S inclus dans Ω_k.

Nous considérerons ici les hypersurfaces V de $\mathbf{A}_k^n$ d'équation:

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2}) \tag{1}$$

avec $n \geq 3$, $a \in k^* - k^{*2}$ et P polynôme non nul de degré total au plus 4. On se pose deux types de problèmes pour ces variétés:

- problème arithmétique: Quand les modèles projectifs lisses X de V vérifient-ils le principe de Hasse et l'approximation faible (cette propriété ne dépend en fait pas du modèle lisse X choisi [1], c'est une propriété qui ne dépend que du corps des fonctions $k(V)$ de la variété V) ?
- problème algébrique: Calculer le groupe de Brauer $\mathrm{Br}\, X$ d'un modèle projectif lisse X de V.

Les deux problèmes sont liés par le fait suivant [2]:

[1] voir appendice 1

[2] voir appendice 2

Proposition 1. *Soit X une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre, qui a des points dans tous les complétés de k. Alors, la condition:*

$$(\forall (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)) \quad (\exists A \in \operatorname{Br} X) \quad (\sum_{v\in\Omega_k} \operatorname{inv}_v A(P_v) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

$$(\text{resp. } (\exists A \in \operatorname{Br} X) \quad (\exists (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)) \quad (\sum_{v\in\Omega_k} \operatorname{inv}_v A(P_v) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$

est une obstruction, dite obstruction de Brauer-Manin, au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X.

La conjecture principale que nous faisons pour les modèles projectifs lisses X des variétés V d'équation (1) est que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule. Il s'agit d'une conjecture standard pour beaucoup de classes de variétés rationnelles (c'est à dire dont le corps des fonctions devient transcendant pur sur la clôture algébrique). Dans le cas que nous considérons ici, notons que Colliot-Thélène, Sansuc, et Swinnerton-Dyer ont montré que la réponse est affirmative quand le polynôme P qui intervient dans l'équation (1) est irréductible ou bien produit d'un facteur irréductible de degré 3 et d'un facteur linéaire, ou bien quand $n = 3$ (cf. [3]).

Nous considérerons dans la suite le cas où $n \geq 4$ et $P = fg$ avec f, g, irréductibles sur $k(\sqrt{a})$, de degré 2, premiers entre eux [3]. Si φ, ψ sont les formes quadratiques obtenues en homogénéisant f, g, nous supposerons toujours que l'intersection de leurs noyaux est réduite à 0, ce qui traduit qu'on ne peut pas, par changement de variables, se ramener à n plus faible.

2. Cas simples

Théorème 1. *Soit $V : y^2 - az^2 = f(x_1, \ldots, x_{n-2})g(x_1, \ldots, x_{n-2})$ une hypersurface du type (1). On garde les hypothèses et notations de la fin du paragraphe précédent. Alors, un modèle projectif lisse X de V satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible dans les cas suivants:*

- $n \geq 6$
- *$n = 5$ et toute forme du pinceau $\lambda\varphi + \mu\psi, (\lambda, \mu) \in \bar{k}^2 - (0,0)$ est de rang au moins 3.*

[3]Pour les autres cas, qui découlent assez simplement des résultats de [8], voir [5]

PREUVE: La variété V est k-birationnelle à:

$$Y : (y^2 - az^2)f(x_1, \ldots, x_{n-2}) = g(x_1, \ldots, x_{n-2})$$

Or, Y peut se voir comme fibrée en quadriques, via (y, z), au-dessus de $\mathbf{A}_k^2$.

- Pour $n \geq 6$, il y a deux cas:
  - Si le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ n'est pas identiquement nul, la fibre générique est lisse et les fibres sont des quadriques de dimension ≥ 3. On conclut alors avec le lemme suivant, que l'on trouve dans [3]:

    Lemme 1. *Soient Y, Z, deux k-variétés et $p : Y \to Z$ un fibré en quadriques de dimension relative $d \geq 3$. On suppose la fibre générique lisse. Alors, si Z_{lisse} vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible, il en est de même de Y_{lisse}.*

    PREUVE DU LEMME 1: La preuve de ce lemme est assez simple; soit $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ une famille de points locaux lisses de Y, S un ensemble fini de places de k. Quitte à élargir S, on peut supposer qu'il contient toutes les places archimédiennes. Soit $M_v = p(P_v)$. On peut supposer que les M_v sont des points locaux lisses de Z (quitte à bouger légèrement les P_v, grâce au théorème des fonctions implicites v-adiques). Comme Z_{lisse} satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible, on peut trouver un point dans $Z_{\text{lisse}}(k)$, qui est en plus arbitrairement proche des M_v pour $v \in S$. Par le théorème des fonctions implicites, pour M assez proche des M_v pour $v \in S$, la fibre en M (qu'on note Y_M) aura des points dans tous les k_v tels que $v \in S$. Comme la fibre générique est lisse, on peut de plus supposer que Y_M est lisse. Maintenant, Y_M a des points dans tous les k_v pour $v \notin S$ car Y_M est une quadrique définie par l'annulation d'une forme quadratique de rang ≥ 5 et une telle forme quadratique a un zéro non trivial dans tout k_v pour v non archimédienne. Il ne reste plus alors qu'à appliquer principe de Hasse et approximation faible pour la quadrique Y_M pour démontrer le lemme.
  - Si maintenant le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ est identiquement nul, φ et ψ ont un point k-rationnel M commun (lemme 1.14 de [3]). Maintenant, la fibre générique admet M comme point rationnel non conique (à cause de l'hypothèse $N(\varphi) \cap N(\psi) = 0$), elle est donc birationnelle à $\mathbf{P}^{n-3}$ et Y est k-birationnelle à $\mathbf{P}_k^{n-3} \times \mathbf{A}_k^2$ (la projection sur $\mathbf{A}_k^2$ admettant une section via M). D'où le résultat.

- Dans le cas $n = 5$, il faut utiliser le lemme suivant, dont la preuve, que l'on peut trouver dans [9], est plus difficile:

  Lemme 2. *Soit Y une k-variété géométriquement intègre, $f : Y \to Z$ un morphisme projectif, surjectif dont les fibres sont géométriquement intègres, avec Z ouvert de $\mathbf{A}_k^r$ dont le complémentaire est de dimension au plus $r - 2$. On fait de plus l'hypothèse géométrique (*) que sur $\bar{k}$, $Y_{\eta,\mathrm{lisse}}(\eta) \neq \emptyset$ pour un ouvert de Zariski non vide de la variété des droites affines de $\mathbf{A}^r$, $\eta \subset \mathbf{A}^r$ étant le plongement du point générique de $\mathbf{A}^1$ associé . Alors, si les fibres de f sur un ouvert de Z vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible, il en va de même de Y.*

  On applique alors ce lemme, quand le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ n' est pas identiquement nul, avec $Z = \mathbf{A}_k^2$. L'hypothèse (*) est automatiquement vérifiée d'après [9] car les fibres, sur un ouvert de Zariski non vide de Z, sont des quadriques lisses et toutes les fibres sont géométriquement intègres à cause de l'hypothèse que toute forme du pinceau $\lambda\varphi + \mu\psi, (\lambda, \mu) \in \bar{k}^2 - (0,0)$ est de rang au moins 3. Quand le discriminant de la forme $\lambda\varphi + \mu\psi$ est identiquement nul, le même argument de k-rationalité de Y que dans le cas $n \geq 6$ fonctionne encore.

REMARQUE: Pour les cas simples que recouvre le théorème 1, on n'a donc pas besoin de faire intervenir le groupe de Brauer de X: une méthode de fibration permet de résoudre directement le problème arithmétique.

3. Cas plus difficiles

Quand on n'est pas dans les cas favorables examinés dans la section précédente, on peut espérer traiter le problème arithmétique en utilisant des méthodes de descente, selon la théorie développée par Colliot-Thélène et Sansuc dans [4]. Il faut pour cela d'abord résoudre le problème algébrique du calcul de $\mathrm{Br}\, X$. C'est l'objet du théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $V : y^2 - az^2 = f(x_1, \dots, x_{n-2})g(x_1, \dots, x_{n-2})$ une hypersurface du type* (1)*. On garde les hypothèses et notations de la fin du paragraphe* 1*. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors:*

- *Pour $n = 5$, $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k = \mathbf{Z}/2$ s'il existe une forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$ du type (T), avec $(\lambda, \mu) \in k^2 - (0,0)$, telle que les restrictions de φ, ψ au noyau de Q soient encore du type (T). Sinon, $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k = 0$.*

- *Pour $n = 4$, on fait de plus l'hypothèse que les coniques projectives associées à φ, ψ sont lisses et en position transverse* [4] *. Soient R_1, R_2, R_3, R_4 leurs quatre points d'intersection. Alors, $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = \mathbf{Z}/2$ si les R_i sont conjugués et tels que l'extension de degré quatre associée contienne $k(\sqrt{a})$, ou bien si les R_i forment deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{a})$. Sinon, $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$.*

(On dira qu'une k-forme quadratique de rang 2 est du type (T) si elle est isomorphe sur k à une forme proportionnelle à $\langle 1, -a\rangle$).

IDÉES DE LA PREUVE: La méthode est différente selon que $n = 5$ ou $n = 4$.

- Pour $n = 5$, on remarque que la variété V est K-rationnelle ($K = k(\sqrt{a})$). On utilise alors le lemme fondamental suivant (cf. [1]) qui permet de relier le groupe de Brauer de X aux fonctions dont les diviseurs sont des normes pour l'extension K/k:

  Lemme 3. *Soit $\mathbf{F}/k$ une extension finie cyclique de corps de nombres, de groupe $\mathcal{G}$. Soit X une k-variété géométriquement intègre, propre et lisse, $\mathbf{F}$-rationnelle (c'est-à-dire que $\mathbf{F}(X)$ est transcendant pur sur $\mathbf{F}$), qui a des points dans tous les complétés de k. Alors, $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est égal au noyau de la flèche $\phi : k(X)^*/k^* N\mathbf{F}(X)^* \to \operatorname{Div} X/N\operatorname{Div} X_{\mathbf{F}}$. Si I est un système de générateurs de ce groupe et $\{f_i\}_{i\in I}$ un système de représentants de I dans $k(X)^*$, il y a obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X si et seulement si:*

  $$(\forall (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)) \quad (\exists i \in I) \quad (\sum_{v\in\Omega_k} j_v(f_i(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

  $$(\text{resp. } (\exists (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)) \quad (\exists i \in I) \quad (\sum_{v\in\Omega_k} j_v(f_i(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\ )$$

  (Où j_v désigne le plongement: $k_v^*/N\mathbf{F}_v^* \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par la théorie du corps de classe local. On note $\mathbf{F}_v^* = k_v^* \otimes_k \mathbf{F}$).

  Le grand intérêt de ce résultat est qu'il permet de calculer $\operatorname{Br} X$ sans avoir à construire explicitement un modèle lisse X de V puisque seul intervient le corps des fonctions de X (qui est le même que celui de V). Notons encore $Y \subset \mathbf{A}_k^n$ le modèle de V d'équation $(y^2 - az^2)f(x_1, \ldots, x_{n-2}) = g(x_1, \ldots, x_{n-2})$ et $K = k(\sqrt{a})$. D'abord, $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est inclus dans le sous-groupe de $k(X)^*/k^* NK(X)^*$ engendré par la classe de f: il résulte

[4] les autres cas se traitent simplement, cf. [5]

en effet facilement du fait que Y est fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{A}_k^{n-2}$ par $x_1, \ldots, x_{n-2}$ que si F est une fonction sur Y dont le diviseur est une norme de l'extension K/k, F est égale modulo $k^* NK(Y)^*$ à une fonction constante en tant que fonction sur le corps $k(x_1, \ldots, x_{n-2})$, c'est à dire à une fonction $h(x_1, \ldots, x_{n-2})$ ne dépendant plus de (y, z). Si r est un facteur irréductible sur K de h, $r = f$ ou $r = g$ sinon en considérant le diviseur intègre (au niveau $k(\sqrt{a})$) sur Y défini par $r = 0$, on voit que le diviseur de $h(x_1, \ldots, x_{n-2})$ ne peut etre une norme. Ainsi, comme fg est une norme, F est égale modulo $k^* NK(Y)^*$ à f. Ceci nous donne déjà que $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ s'injecte dans $\mathbf{Z}/2$.

Reste à voir à quelle condition le diviseur de f est une norme. Il faut considérer les différentes possibilités pour la décomposition du cycle $[\overline{W}]$, où W est l'intersection dans $\mathbf{P}_k^3$ des quadriques définies par φ et ψ. La condition nécessaire s'obtient alors en utilisant notamment les lemmes du chapitre 1 de [3], et en faisant intervenir des anneaux de valuation discrète A, avec $k \subset A \subset k(X) = \mathrm{Frac}\, A$, qui restent de valuation discrète au niveau K (le diviseur de f étant une norme si et seulement si sa valuation par rapport à tous les anneaux de ce type est paire). On montre que la condition trouvée est suffisante en écrivant explicitement la forme que doivent avoir f et g pour qu'elle soit vérifiée, ce qui permet de prouver que la valuation de f par rapport à tous les anneaux A comme ci-dessus est paire.

- Dans le cas $n = 4$, la méthode précédente ne fournit qu'un résultat partiel; on a donc intérêt ici à calculer $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ via $H^1(G, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ (ces deux groupes sont isomorphes car X est une k-variété rationnelle et k est un corps de nombres, cf. [4]). Pour cela, on construit d'abord un modèle projectif lisse X de Z, où Z est la k-variété fibrée en produit de deux coniques au-dessus de $\mathbf{P}_k^1$ définie par:

$$y^2 - az^2 = \lambda, \qquad f(x_1, x_2) = \lambda g(x_1, x_2)$$

(Z est k-birationnelle à V). Ensuite, on calcule $H^1(G, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ en utilisant une suite exacte du type:

$$0 \to A \to B \to \mathrm{Pic}\, \overline{X} \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}_{\bar{k}(\eta)} \to 0$$

où A, B sont des G-modules de permutation (la suite exacte est similaire à celle qui intervient pour les fibrés en coniques, cf. [4]).

Pour les détails de la preuve du théorème 2, cf. [5].

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat arithmétique:

Théorème 3. *Avec les hypothèses et notations du théorème précédent, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour X est la seule dans les cas suivants:*

- $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k = \mathbf{Z}/2$.
- $n = 5$.
- $n = 4$ *et les R_i forment deux paires de points conjugués.*

PREUVE: On utilise des méthodes de descente. Nous ne traiterons ici en détail que le premier cas qui est le plus simple. Puis, nous indiquerons brièvement par quelle méthode on traite les deux autres (pour les détails de ces deux derniers cas, cf. [5]).
Si $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k = \mathbf{Z}/2$, f/g étant une norme, les diviseurs de f et g sont par hypothèse des normes de l'extension K/k. Soit $(M_v)_{v\in\Omega}$ une famille de points locaux. S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible on a, d'après le lemme fondamental 3, en notant $m = n-2$ et $M_v = (x_1^v, \dots, x_m^v, y^v, z^v)$:

$$\sum_v j_v(f(M_v)) = \sum_v j_v(g(M_v)) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{Z}/2$$

Or, on a la suite exacte, issue de la théorie du corps de classes global (cf. [6]):

$$0 \longrightarrow k^*/NK^* \longrightarrow \coprod_v k_v^*/NK_v^* \xrightarrow{\sum j_v} \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0$$

Où l'on note j_v le plongement donné par la théorie du corps de classe local et $K_v = k_v \otimes_k K$. Ainsi, il existe c_1 et c_2 dans k^* vérifiant $c_1 = f(x_1^v, \dots, x_m^v)$ et $c_2 = g(x_1^v, \dots, x_m^v)$ dans k_v^*/NK_v^*. Considérons alors la variété de descente T suivante:

$$\begin{array}{rll} f(x_1,\dots,x_m) & = c_1(u_1^2 - av_1^2) & \neq 0 \\ g(x_1,\dots,x_m) & = c_2(u_2^2 - av_2^2) & \neq 0 \\ y^2 - az^2 & = f(x_1,\dots,x_m)g(x_1,\dots,x_m) & \neq 0 \end{array}$$

D'après le choix de c_1, c_2, il existe $(P_v)_{v\in\Omega}$, famille de points locaux de T, dont la projection $p(P_v)$ est M_v, c'est-à-dire que

$$P_v = (x_1^v, \dots, x_m^v, y^v, z^v, u_1^v, u_2^v, v_1^v, v_2^v).$$

Il nous suffit donc pour conclure de montrer que T satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.

Effectuons le changement de variables:

$$\begin{cases} u_3 + \sqrt{a}v_3 = (y + \sqrt{a}z)/(u_1 + \sqrt{a}v_1)(u_2 + \sqrt{a}v_2) \\ u_3 - \sqrt{a}v_3 = (y - \sqrt{a}z)/(u_1 - \sqrt{a}v_1)(u_2 - \sqrt{a}v_2) \end{cases}$$

On est ramené à la variété T_1:

$$\begin{aligned} u_3^2 - av_3^2 \quad &= c_1c_2 & \neq 0 \\ f(x_1, \ldots, x_m) \quad &= c_1(u_1^2 - av_1^2) & \neq 0 \\ g(x_1, \ldots, x_m) \quad &= c_2(u_2^2 - av_2^2) & \neq 0 \end{aligned}$$

Soit Z la k-variété de $\mathbf{P}_k^r$ $(r = n + 2)$ d'équation:

$$\begin{cases} \varphi(x_1, \ldots, x_m, t) = c_1(u_1^2 - av_1^2) \\ \psi(x_1, \ldots, x_m, t) = c_2(u_2^2 - av_2^2) \end{cases}$$

C'est l'intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^r$, avec $r \geq 6$, qui n'est pas un cône (toujours parce que l'intersection des noyaux des formes quadratiques φ et ψ est réduite à 0) et qui contient une paire de droites gauches conjuguées, soit $(x_1 = \ldots = x_m = t = 0,\ u_1 = \varepsilon\sqrt{a}v_1,\ u_2 = \varepsilon\sqrt{a}v_2)$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. D'après le théorème 13.2 de [3], un modèle projectif lisse de Z vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible. Il en va donc de même de T_1 (qui est k-birationnelle au produit de Z et d'une conique). D'où le résultat.

Les deux autres cas utilisent la théorie générale de la descente qui est développée dans [4]: à partir d'une résolution de $\operatorname{Pic} \overline{X}$ par des G-modules de permutation, on obtient des équations de variétés de descente. Dans le cas $n = 4$, le fait que l'on suppose les R_i deux à deux conjugués permet encore de se ramener à une intersection de deux quadriques pour laquelle on sait conclure avec les résultats de [3]. Dans le cas $n = 5$, on sait montrer le principe de Hasse et l'approximation faible pour les variétés de descente par un théorème de fibration voisin du lemme 2. Pour plus de détails, nous renvoyons à [5].

CONCLUSION: La conjecture énoncée au paragraphe 1 admet donc une réponse affirmative quand le groupe de Brauer de X est non trivial, quand $n \geq 5$, quand $n = 3$, et dans certains cas pour $n = 4$. Le cas a priori encore ouvert est celui où $n = 4$ et où les deux coniques définies par φ et ψ se coupent suivant quatre points conjugués, avec $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$. La méthode qui fonctionne quand leur intersection consiste en deux paires de points conjugués conduit à des variétés de descente qui sont des intersections non plus de deux, mais de trois quadriques, pour lesquelles on ne dispose guère de résultats.
Toutefois, il se trouve qu'une hypersurface cubique (géométriquement intègre, non conique) de $\mathbf{P}_k^n$ qui possède un ensemble globalement rationnel de deux

points singuliers conjugués est k-birationnelle à une hypersurface V de $\mathbf{A}_k^n$ dont l'équation est du type (1) ([3], proposition 9.8.). Dans ce cas particulier, on sait encore (sans hypothèse supplémentaire) démontrer que la conjecture est vraie pour V ([5]) : la preuve combine méthode de fibrations et méthode de descente, elle utilise les calculs de groupe de Brauer de cet article, ainsi que des résultats analytiques de la théorie du corps de classes.

4. Contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible

Nous présentons ici trois exemples où l'on a obstruction de Brauer-Manin. Nous nous contenterons détudier en détail le premier exemple, les autres s'analysant de la même manière.

Proposition 2. *Soit X la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^4$ d'équation:*

$$y^2 + z^2 = (28(x_1^2+1) + 79(x_2^2+1))(95(x_1^2+1) + 268(x_2^2+1))$$

Alors X ne vérifie pas le principe de Hasse

Posons $\alpha = 28$, $\beta = 79$, $\gamma = 95$, $\delta = 268$. On a $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ et $\alpha = 4(4k-1)$, $\beta = 4l-1$, $\gamma = 4k'-1$, $\delta = 4(4l'-1)$ avec $(k,l,k',l') \in \mathbf{N}$ (ces deux propriétés sont en fait essentiellement les seules dont on va se servir dans la preuve). On notera encore $f(x_1,x_2) = (\alpha(x_1^2+1) + \beta(x_2^2+1))$ et $g(x_1,x_2) = (\gamma(x_1^2+1) + \delta(x_2^2+1))$ et U l'ouvert de X défini par $y^2+z^2 = f(x_1,x_2)g(x_1,x_2) \neq 0$. Nous utiliserons deux lemmes :

Lemme 4. *Soit $M_p \in U(\mathbf{Q}_p)$ un point local avec p premier, $p \notin \{2,\infty\}$. Alors l'image $\varphi_p(M_p)$ de $f(M_p)$ dans $\mathbf{Q}_p^*/NK_p^*$ est triviale (où $K_p = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(i)$).*

Preuve du lemme 4: Soit p premier inerte dans l'extension $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$ (si p n'est pas inerte, $\mathbf{Q}_p^*/NK_p^*$ est trivial), c'est-à-dire p tel que -1 n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}_p^*$, ou encore $p \equiv -1$ [4]. Supposons $v_p(f(x_1,x_2)) = 2r+1$ avec $(y,z,x_1,x_2) \in U(Q_p)$. Alors, $v_p(g(x_1,x_2)) = 2s+1$ avec par exemple $s \geq r$. De $v_p(\alpha g(x_1,x_2) - \gamma f(x_1,x_2)) \geq 2r+1$, on tire $v_p(x_2^2+1) \geq 2r+1$ et de même, de $v_p(\beta g(x_1,x_2) - \delta f(x_1,x_2)) \geq 2r+1$, on tire $v_p(x_1^2+1) \geq 2r+1$. Comme la valuation p-adique d'une norme est paire, on en déduit $v_p(x_1^2+1) \geq 2r+2$ et $v_p(x_2^2+1) \geq 2r+2$ ce qui contredit $v_p(f(x_1,x_2)) = 2r+1$. Ainsi, pour tout p inerte, $v_p(f(x_1,x_2))$ est paire et on a le résultat voulu (cf. [7]).

Lemme 5. *Soit $M_2 \in U(\mathbf{Q}_2)$ un point local 2-adique. Alors $f(M_2)$ est non trivial dans $\mathbf{Q}_2^*/NK_2^*$.*

Preuve du lemme 5: Posons $M_2 = (y, z, x_1, x_2) \in \mathbf{Q}_2^4$. Comme $(x_1^2 + 1)$ et $(x_2^2 + 1)$ sont des normes, on peut (cf. [7]) écrire $(x_1^2 + 1) = 2^u(4r + 1)$ et $(x_2^2 + 1) = 2^v(4s + 1)$ avec u, v dans $\mathbf{Z}$ et r, s dans $\mathbf{Z}_2$. Si $u \geq v$, $\alpha(x_1^2+1) + \beta(x_2^2+1) = 2^v(\alpha 2^{(u-v)}(4r+1) + \beta(4s+1))$. Comme $\alpha = 4(4k-1)$ et $\beta = 4l - 1$, $(\alpha 2^{(u-v)}(4r + 1) + \beta(4s + 1))$ est un élément de $\mathbf{Z}_2$ de la forme $4t - 1$ avec $t \in \mathbf{Z}_2$ donc $f(x_1, x_2)$ n'est pas une norme 2-adique (cf. [7]). De même, si $v \geq u$, c'est $g(x_1, x_2)$ qui ne peut être une norme 2-adique, d'où le résultat.

Preuve de la proposition 2: Pour tout point réel M_∞, on a trivialement $f(M_\infty)$ positif. Ainsi, d'après les deux lemmes précédents, pour toute famille de points locaux (M_p) $(M_p \in U(\mathbf{Q}_p))$, $\sum_p j_p(\varphi_p(M_p))$ n'est pas trivial dans $\mathbf{Z}/2$; il suffit donc (cf. lemme fondamental 3) pour conclure de montrer que X a des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$. Or en faisant $x_1 = x_2 = 0$, on obtient un point 2-adique puisque $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 107.3.11^2$ est une norme 2-adique. De même, en faisant $x_1 = x_2 = 0$, on obtient un point p-adique pour $p \notin \{3, 11, 107\}$ et en faisant $x_1 = 1/p, x_2 = 0$, on obtient un point p-adique pour $p \in \{3, 11, 107\}$. Ceci achève la preuve.

Les deux contre-exemples à l'approximation faible suivants (pour lesquels le principe de Hasse est vérifié) se traitent de façon analogue (cf. [5]) : pour toute famille de points locaux M_p, $\varphi_p(M_p)$ est trivial dans $\mathbf{Z}/2$, sauf pour $p = 2$ où $\varphi_2(M_2)$ peut etre trivial ou non trivial (selon le point M_2).

Proposition 3. *Soit X la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^4$ d'équation:*

$$y^2 + z^2 = ((x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 3)((x_1 + 2)^2 + x_2^2 - 3)$$

Alors X ne vérifie pas l'approximation faible.

Proposition 4. *Soit X la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^5$ d'équation:*

$$y^2 + z^2 = f(x_1, x_2, x_3)g(x_1, x_2, x_3)$$

avec $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 1) + (x_2^2 + x_3^2 + 3)$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 + 3$. Alors X ne vérifie pas l'approximation faible.

Appendice 1 : invariance birationnelle du principe de Hasse et de l'approximation faible

Rappelons d'abord un lemme classique (cf. [1]), dû à Nishimura et Lang :

LEMME. *Soit X une k-variété intègre lisse, Y une k-variété propre, $\varphi\colon X \to Y$ une application rationnelle. Alors, si $X(k) \neq \varnothing$, on a : $Y(k) \neq \varnothing$.*

Maintenant, une application immédiate de ce lemme, combiné avec le théorème des fonctions implicites v-adiques, permet de déduire la proposition suivante, annoncée dans l'introduction :

PROPOSITION. *Soit V une k-variété. Si un modèle propre lisse X de V vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible), il en est de même de tout modèle propre lisse de V. Ainsi, ces propriétés ne dépendent que du corps des fonctions $k(V)$ de la variété V. Il suffit de les vérifier pour le lieu lisse V_{lisse} de V.*

Appendice 2 : obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible

Soit X une k-variété algébrique, géométriquement intègre, propre et lisse, qui a des points dans tous les k_v. Alors, pour tout A dans $\operatorname{Br} X$, on a le diagramme commutatif suivant (cf. [4]) :

$$\begin{tikzcd} X(k) \arrow[r] \arrow[d, "A"'] & X(A_k) \arrow[d, "A"'] \arrow[dr, "i_A"] & \\ \operatorname{Br} k \arrow[r] & \bigoplus_v \operatorname{Br} k_v \arrow[r, "\sum_v \mathrm{inv}_v"] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

où $X(A_k) = \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$. Maintenant, ce diagramme montre que pour un point global P dans $X(k)$ dont l'image dans k_v est P_v, on a :

$$\sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v\, A(P_v) = 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Si $X(k) \neq \varnothing$, il existe donc des point locaux (P_v) avec $\sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v\, A(P_v)$ nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et si $X(k)$ est dense dans $\prod_{v\in S} X(k_v)$, l'égalité précédente est vraie pour tout élément de $X(A_k)$ qui est l'image d'un point de $X(k)$, donc par densité pour tout élément de $X(A_k)$. Ainsi, les conditions de la proposition 1 du paragraphe 1 sont bien des obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible.

Bibliographie

[1] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, J.-J. Sansuc: Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, J. reine angew. Math. 320 (1980) 150-191.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, P. Salberger: Arithmetic on singular cubic hypersurfaces, Proc. London Math. Soc. (3) 58 (1989), 519-549.

[3] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir P. Swinnerton-Dyer : Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces, J. reine angew. Math. 373 (1987), 307-107; 374 (1987), 72-168

[4] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc: La descente sur les variétés rationnelles II, Duke Math. J. 54 (1987), 375-492.

[5] D. Harari: Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces, preprint 1992

[6] S. Lang: Algebraic number theory, Springer Verlag 1986

[7] J.-P. Serre: Cours d'arithmétique, PUF 1970

[8] A.-N. Skorobogatov: Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension 2, J. reine angew. Math. 407 (1990), 57-74.

[9] A.-N. Skorobogatov: On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, 205-219.

David HARARI
E. N. S., Département de
mathématiques et informatique
45 rue d'Ulm
75005 Paris, France