J. JACOD

La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi

Astérisque, tome 236 (1996), p. 155-161

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__155_0>

La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondi

J. Jacod

Résumé. — Nous étudions le comportement asymptotique (quand $n \to \infty$) de la variation quadratique au pas n, $\sum_{i=1}^{[nt]}(X_{i/n} - X_{(i-1)/n})^2$, lorsque X est un brownien linéaire, et lorsqu'on remplace dans la formule ci-dessus $X_{i/n}$ par une valeur arrondie, avec une précision α_n pouvant dépendre de n. On verra apparaitre des comportements inattendus, dépendant de la limite α de la suite α_n, et de sa vitesse de convergence si $\alpha = 0$.

1 Introduction et résultats

Dans ce qui suit, X désigne un brownien linéaire de variance unitaire σ^2. Nous nous proposons d'étudier le comportement de la variation quadratique en présence d'erreurs d'arrondi.

Plus précisément, on sait que le processus variation quadratique "au pas n" $V_t^n = \sum_{i/n}^{[nt]} \left(X_{i/n} - X_{(i-1)/n}\right)^2$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $t\sigma^2$. Que devient ce résultat banal si on remplace les $X_{i/n}$ par des valeurs "arrondies" à un certain niveau de précision $\alpha_n > 0$ (pouvant dépendre de n)? De manière plus précise, on remplace chaque $X_{i/n}$ par $X_{i/n}^{(\alpha_n)} = \alpha_n[X_{i/n}/\alpha_n]$ ($[x]$ désignant la partie entière du réel x) et donc le processus V^n par

$$V(n,\alpha_n)_t = \sum_{i=1}^{[nt]}(X_{i/n}^{(\alpha_n)} - X_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)})^2. \tag{1}$$

L'intérêt de l'étude du comportement de $V(n,\alpha_n)$ est évident, par exemple, lors de l'estimation statistique de σ^2 à partir d'observations "discrétisées" $X_{i/n}$ pour $i \leq n$: on sait que le "meilleur" estimateur (en tous les sens du terme) est alors V_1^n; dans la pratique, on remplace évidemment V_1^n par $V(n,\alpha_n)_1$, et il est naturel de se demander si $V(n,\alpha_n)_1$ converge encore vers σ^2.

Si α_n tend "assez vite" vers 0, la différence $V_t^n - V(n,\alpha_n)_t$ va évidemment tendre vers 0. Au contraire si $\alpha_n = \alpha > 0$, pour n assez grand les accroissements du membre de droite de (1) sont pour la plupart nuls, et le reste du temps de taille α^2 lorsque X oscille autour d'une des valeurs $k\alpha$ pour $k \in \mathbb{Z}$: donc le comportement limite de $V(n, \alpha_n)$ doit s'exprimer en termes des temps locaux de X aux niveaux $k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Une réponse complète à la question posée est donnée par le :

THEOREME : *Soit $\beta_n = \alpha_n\sqrt{n}$. On a les convergences suivantes :*

a) *Si $\beta_n \to 0$, alors $V(n, \alpha_n)_t \to t\sigma^2$ dans $\mathbb{L}^2$.*

b) *Si $\beta_n \to \beta \in]0, \infty[$, alors $V(n, \alpha_n)_t \to t\Gamma(\beta, \sigma)$ dans $\mathbb{L}^2$, où Γ est la fonction suivante, avec h densité de la loi normale standard $N(0,1)$:*

$$\Gamma(\beta, \sigma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k-1)\beta/\sigma}^{k\beta/\sigma} h(u)(2k\beta\sigma u + k(1-k)\beta^2)du. \qquad (2)$$

c) *Si $\beta_n \to \infty$ et $\alpha_n \to 0$, alors $\frac{1}{\beta_n} V(n, \alpha_n)_t \to t\sigma\sqrt{2/\pi}$ dans $\mathbb{L}^2$.*

d) *Si $\alpha_n \to \alpha \in]0, \infty[$, alors $\frac{1}{\sqrt{n}} V(n, \alpha_n)_t \to \frac{1}{\sigma}\Lambda(\alpha)_t$ en probabilité, où L^a est le temps local* (au sens des semimartingales) *de X au niveau a, et*

$$\Lambda(\alpha) = \sqrt{2/\pi}\, \alpha^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} L^{k\alpha}. \qquad (3)$$

Les résultats les plus importants nous semblent être (b) et(c) : ils montrent que $V(n, \alpha_n)$ ne converge pas vers $\sigma^2 t$, ou peut même tendre vers l'infini, si α_n ne tend pas assez vite vers 0. La partie (d) est, nous le verrons, un corollaire simple des résultats d'Azaïs [1].

Bien entendu, ces résultats sont susceptibles de généralisations aux diffusions, ou peut-être à des semimartingales continues plus générales. Un autre problème intéressant, mais plus difficile, concerne les vitesses de convergence (du type théorème central limite) dans (a,b,c) : ces résultats seront développés ailleurs.

REMARQUE : Les résultats ci-dessus sont "compatibles" au sens suivant :

1) On vérifie aisément que $\Gamma(\beta, \sigma) \to \sigma^2$ si $\beta \to 0$ (Il est vraisemblable, mais nous n'avons pas su le démontrer, que $\beta \to \Gamma(\beta, \sigma)$ est croissante; les résultats de simulations étayent cette conjecture).

2) De même, on démontre que $\Gamma(\beta, \sigma)/\beta \to \sigma\sqrt{2/\pi}$ si $\beta \to \infty$.

3) Si $\alpha \to 0$, alors $\Lambda(\alpha)_t \to \sqrt{2/\pi}\frac{1}{\sigma} \int L_t^a dt = \sigma t\sqrt{2/\pi}$ (formule du temps d'occupation pour les temps locaux de semimartingale). □

On note $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par X, et on pose

$$\xi_i^n = X_{i/n} - X_{(i-1)/n}, \qquad \chi_i^n = (X_{i/n}^{(\alpha_n)} - X_{(i-1)/n}^{(\alpha_n)})^2.$$

Soit aussi $p_t(x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} h((y-x)/\sigma\sqrt{t})$ la famille des densités de transition de X. Finalement, C désigne une constante (dépendant parfois de σ^2) changeant de ligne en ligne.

2 Preuve de (a)

Comme $0 \le x - \alpha[x/\alpha] < \alpha$, on a $|\chi_i^n - (\xi_i^n)^2| \le 4\alpha_n^2 + 4\alpha_n|\xi_i^n|$ et donc

$$|V(n,\alpha_n)_t - V_t^n| \;\le\; 4\alpha_n^2[nt] + 4\alpha_n \sum_{i=1}^{[nt]} |\xi_i^n|.$$

Par ailleurs $E(|\xi_i^n\xi_j^n|) = 2\sigma^2/n\pi$ si $i \neq j$ et $E((\xi_i^n)^2) = \sigma^2/n$, donc $E(|V(n,\alpha_n)_t - V_t^n|^2) \le C(\alpha_n^4 n^2 + \alpha_n^2 n) \to 0$.

3 Preuve de (b)

On suppose ici que $\beta_n \to \beta \in]0,\infty[$ et on pose $\eta_i^n = \chi_i^n - \Gamma(\beta,\sigma)/n$. Il faut montrer que $\sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i^n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. Pour cela il suffit d'avoir les deux propriétés :

$$\sum_{i=1}^{[nt]} E((\eta_i^n)^2) \to 0. \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{[nt]-2} \sum_{j=i+2}^{[nt]} E(\eta_i^n \eta_j^n) \to 0. \tag{5}$$

Comme $|\eta_i^n| \le 2(\xi_i^n)^2 + 8\alpha_n^2 + \Gamma(\beta,\sigma)/n$ et $E((\xi_i^n)^4) = 3\sigma^4/n^2$, on a (4). Pour (5) nous opérons en deux étapes.

ETAPE 1. Soit $s > 0$. La variable $E((X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2|\mathcal{F}_t)$ se met sous la forme $\gamma_n(X_t, s)$, où

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x,s) &= \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} k^2\alpha_n^2 \iint p_s(x,y)p_{1/n}(y,z)1_{\{j\alpha_n \le y < (j+1)\alpha_n,\,(k+j)\alpha_n \le z < (k+j+1)\alpha_n\}}\,dy\,dz \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\alpha_n^2 [\int_0^{\beta_n/\sigma} h(u + (k-1)\beta_n/\sigma)\,du \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v)\,dv \\
&\quad + \int_0^{\beta_n/\sigma} h(u + k\beta_n/\sigma)\,du \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v)\,dv].
\end{aligned} \tag{6}$$

Soit $g(v,y,w) = (\frac{w}{y} - 1)v1_{[0,w]}(v) + w(\frac{v}{y} - 1)1_{]w,y]}(v)$. Si $z \in \mathbb{R}$, $0 \le w \le y$ et $y > 0$, une intégration par parties

$$\int_z^{z+w} h(v)\,dv - \frac{w}{y}\int_z^{z+y} h(v)\,dv = \int_z^{z+y} h'(v)g(z+v,y,w)\,dv.$$

Mais $|g(v,y,w)| \leq w$ et h' est intégrable, donc si $z \in \mathbb{R}$, $y > 0$ et $0 \leq w \leq y$:

$$|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{jy+z}^{jy+z+w} h(v)\, dv - \frac{w}{y}| \leq Cw \leq Cy. \tag{7}$$

Soit $0 \leq u \leq \beta_n/\sqrt{s}$. Si on applique (7) à $y = \alpha_n/\sigma\sqrt{s}$, et d'abord à $w = u/\sqrt{ns}$ et $z = (\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}$, puis à $w = \alpha_n/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns} = (\beta_n/\sigma - u)/\sqrt{ns}$ et $z = -x/\sigma\sqrt{s}$, on obtient :

$$|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v)\, dv - \frac{u\sigma}{\beta_n}| \leq C\frac{u}{\sqrt{ns}} \leq C\frac{\alpha_n}{\sigma\sqrt{s}} \tag{8}$$

$$|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v)\, dv - 1 + \frac{u\sigma}{\beta_n}| \leq C(\frac{\beta_n}{\sigma} - u)\frac{1}{\sqrt{ns}} \leq C\frac{\alpha_n}{\sigma\sqrt{s}} \tag{9}$$

Si alors $f_n(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta_n/\sigma)u\sigma\beta_n + h(u + k\beta_n/\sigma)(\beta_n^2 - u\sigma\beta_n))$ et $g_n(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta_n/\sigma) + h(u + k\beta_n/\sigma))$, on déduit de (6), (8) et (9) que

$$|\gamma_n(x,s) - \frac{1}{n}\int_0^{\beta_n/\sigma} f_n(u)\, du| \leq C\alpha_n^3 s^{-1/2} \int_0^{\beta_n/\sigma} g_n(u)\, du.$$

Mais $\beta_n \to \beta \in]0,\infty[$, donc les fonctions f_n et g_n convergent vers les fonctions $f(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta/\sigma)u\sigma\beta + h(u + k\beta/\sigma)(\beta^2 - u\sigma\beta))$ et $g(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2(h(u + (k-1)\beta/\sigma) + h(u + k\beta/\sigma))$, et $sup_{u\in[0,\beta_n/\sigma]}(|f_n(u)| + |g_n(u)|) < \infty$. De plus $\int_0^{\beta/\sigma} f(u)\, du = \Gamma(\beta,\sigma)$. Comme $\alpha_n = O(\sqrt{n})$, on a finalement :

$$|\gamma_n(x,s) - \frac{1}{n}\Gamma(\beta,\sigma)| \leq \frac{C}{n\sqrt{ns}} + o(1/n). \tag{10}$$

ETAPE 2. On a $E(\eta_j^n|\mathcal{F}_{i/n}) = \gamma_n(X_{i/n}, (j-i-1)/n) - \Gamma(\beta,\sigma)/n$ si $j \geq i+2$. Comme $|\eta_i^n| \leq 2(\xi_i^n)^2 + 8\alpha_n^2 + \Gamma(\beta,\sigma)/n$ on a aussi $E(|\eta_i^n|) \leq C/n$. Donc (10) implique pour $j \geq i+2$:

$$\begin{aligned}|E(\eta_i^n\eta_j^n)| &= |E(\eta_i^n(\gamma_n(X_{i/n}, \frac{j-i-1}{n}) - \frac{\Gamma(\beta,\sigma)}{n}))| \\ &\leq (C/n\sqrt{j-i-1} + o(1/n))|E(\eta_i^n)| \leq C/n^2\sqrt{j-i-1} + o(1/n^2).\end{aligned}$$

Comme $\lim_n n^{-1/2}\sum_{k=2}^{[nt]}(k-1)^{-1/2} = \int_0^t s^{-1/2}\, ds < \infty$, on en déduit (5).

4 Preuve de (c)

On suppose maintenant que $\beta_n \to \infty$ et que $\alpha_n \to 0$. Posons $R_n = \{(x,y) : |[y/\alpha_n] - [x/\alpha_n]| = 1\}$ et $S_n = \mathbb{R}^2 \setminus R_n$.

ETAPE 1. Soit

$$\delta_i^n = \frac{1}{\beta_n}\chi_i^n 1_{S_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}), \qquad W_n = \sum_{i=1}^{[nt]} \delta_i^n.$$

Si $(x,y) \in S_n$ on a ou bien $[y/\alpha_n] = [x/\alpha_n]$, ou bien $|x-y| \geq \alpha_n$, donc toujours $|\alpha_n[y/\alpha_n] - \alpha_n[x/\alpha_n]| \leq 2|y-x|$. Donc $(\delta_i^n)^2 \leq 16\beta_n^{-2}(\xi_i^n)^4$. Comme $E((\xi_i^n)^4) = 3\sigma^4/n^2$ et $W_n^2 \leq [nt]\sum_{i=1}^{[nt]}(\delta_i^n)^2$, on déduit de $\beta_n \to \infty$ que $W_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. Il reste donc à prouver que si

$$\eta_i^n = \frac{1}{\beta_n}\chi_i^n 1_{R_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}) - \frac{1}{n}\sigma\sqrt{2/\pi}, \quad W_n' = \sum_{i=1}^{[nt]} \eta_i^n, \tag{11}$$

alors $W_n' \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$.

ETAPE 2. Si $(X_{t+s}, X_{t+s+1/n}) \in R_n$ on a $(X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 = \alpha_n^2$. Par suite $E(\frac{1}{\beta_n}(X_{t+s+1/n}^{(\alpha_n)} - X_{t+s}^{(\alpha_n)})^2 1_{R_n}(X_{t+s}, X_{t+s+1/n})|\mathcal{F}_t)$ est de la forme $\gamma_n'(X_t, s)$, où

$$\begin{aligned}\gamma_n'(x,s) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int p_s(x,y)p_{1/n}(y,z)[&1_{\{j\alpha_n \leq y < (j+1)\alpha_n \leq z < (j+2)\alpha_n\}} \\ &+ 1_{\{(j-1)\alpha_n \leq z < j\alpha_n \leq y < (j+1)\alpha_n\}}]\,dy\,dz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\Big[\int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u) + h(u - 2\beta_n/\sigma))\,du \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}} h(v)\,dv \\ &+ \int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u+\beta_n/\sigma) + h(u - \beta_n/\sigma))\,du \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{(j\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s}}^{((j+1)\alpha_n - x)/\sigma\sqrt{s} - u/\sqrt{ns}} h(v)\,dv\Big].\end{aligned}$$

Soit $\varphi_n = \exp -\beta_n^2/4\sigma^2$. On a $\int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u - 2\beta_n/\sigma) + h(u+\beta_n/\sigma))\,du \leq C\varphi_n$, donc d'après (8) et (9) :

$$|\gamma_n'(x,s) - \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u)\frac{u\sigma}{\beta_n} + h(u-\beta_n/\sigma))(1 - \frac{u\sigma}{\beta_n})\,du| \leq C\frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{ns}}).$$

De plus

$$\int_0^{\beta_n/\sigma} h(u)\frac{u\sigma}{\beta_n}\,du = \int_0^{\beta_n/\sigma}(h(u-\beta_n/\sigma)(1 - \frac{u\sigma}{\beta_n})\,du = \int_0^\infty h(u)\frac{u\sigma}{\beta_n}\,du + O(\varphi_n).$$

On a donc

$$|\gamma_n'(x,s) - \frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}| \leq C\frac{\beta_n}{n}(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{ns}}). \tag{13}$$

ETAPE 3. Vu (11), il suffit de prouver (4) et (5) (avec η_i^n comme dans (11)) pour obtenir $W_n' \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. D'abord $|\eta_i^n| \leq C(1/n + \alpha_n/\sqrt{n} + |\xi_i^n|/\sqrt{n})$, donc $E((\eta_i^n)^2) \leq C\alpha_n^2/n$, et comme $\alpha_n \to 0$ on obtient (4).

Ensuite $E(\eta_i^n|\mathcal{F}_{i/n}) = \gamma_n'(X_{i/n}, \frac{j-i-1}{n}) - \frac{\sigma}{n}\sqrt{2/\pi}$ si $j \geq i+2$. On déduit alors de (12) que $|E(\eta_j^n|\mathcal{F}_{i/n})| \leq C\frac{\beta_n}{n}(\varphi_n + 1/\sqrt{j-i-1})$ si $j \geq i+2$. On a aussi $E(|\eta_i^n|) \leq C\beta_n/n$ (cf. ci-dessus), et d'après (12) encore il vient $E(|\eta_i^n|) \leq E(\gamma_n'(0, \frac{i-1}{n}) + \frac{\sigma}{n}\sqrt{2/\pi})) \leq C(1/n + \beta_n\varphi_n/n + \beta_n n\sqrt{i-1})$ si $i \geq 2$. En rassemblant tout ceci on arrive à :

$$|E(\eta_1^n\eta_{1+j}^n)| \leq \frac{C}{n^2}\beta_n^2(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{j-1}})$$

$$|E(\eta_i^n\eta_{i+j}^n)| \leq \frac{C}{n^2}\beta_n^2(\varphi_n + \frac{1}{\sqrt{j-1}})(\varphi_n + \frac{1}{\beta_n} + \frac{1}{\sqrt{i-1}})$$

(pour $i \geq 2$, $j \geq 2$). Comme $sup_n\ n^{-1/2}\sum_{j=1}^{[nt]} j^{-1/2} < \infty$, le premier membre de (5) est majoré par $C\beta_n^2(n\varphi_n + 1)(n\varphi_n + 1 + n/\beta_n)/n^2$. (5) découle alors de ce que $\beta_n^2\varphi_n \to 0$ et $\beta_n/n \to 0$. La preuve est donc terminée.

5 Preuve de (d)

On suppose maintenant que $\alpha_n \to \alpha \in]0, \infty[$. On utilise les notations R_n, S_n, W_n du paragraphe précédent. Comme $\beta_n \to \infty$, on a encore $W_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$. Comme $\alpha_n \to \alpha > 0$, on a $P(|\xi_i^n| > \alpha_n) \leq e^{-Cn}$ et on a aussi la convergence suivante dans $\mathbb{L}^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\{|\xi_i^n|>\alpha_n\}} \to 0. \tag{13}$$

Rappelons que $(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}) \in R_n$ implique $\chi_i^n = \alpha_n^2$, donc si on pose

$$\hat{W}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{R_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}),$$

il vient $V(n, \alpha_n)_t/\sqrt{n} = \alpha_n^2\hat{W}_n + \alpha_n W_n$. Comme $\alpha_n \to \alpha$ et $W_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^2$, il reste à prouver que $\hat{W}_n \to \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$ en probabilité.

Posons $T(a) = \{(x,y) : x < a \leq y \text{ ou } y < a \leq x\}$ et $T_n = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} T(j\alpha_n)$. On a $R_n \subset T_n$, et $|x-y| \geq \alpha_n$ lorsque $(x,y) \in T_n \setminus R_n$. Par (13) on voit qu'il suffit de prouver que $\hat{W}_n' \to \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$ en probabilité, où

$$\hat{W}_n' = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} 1_{T_n}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n}).$$

D'après Azaïs [1], on sait que pour chaque $a \in \mathbb{R}$ la suite

$$U(n,a) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{T(a)}(X_{(i-1)/n}, X_{i/n})$$

converge vers $\sqrt{2/\pi}\ L_t^a/\sigma$ dans $\mathbb{L}^2$, et une modification triviale de la preuve de [1] (utilisant une version continue de $a \mapsto L_t^a$; noter que le temps local utilisé ici, qui est celui des semimartingales, égale le temps local de Azaïs multiplié par σ^2) montre qu'on a aussi $U(n,a_n) \to \sqrt{2/\pi}\ L_t^a/\sigma$ dans $\mathbb{L}^2$ quand $a_n \to a$.

Maintenant, sur l'ensemble $A_k = \{sup_{s\leq t}|X_s| \leq k/2\}$ on a d'une part $\Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2 = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma} \sum_{j\in\mathbf{Z},|j|\leq k} U(n, j\alpha_n)$ dès que $\alpha_n \leq 2\alpha$. Donc ce qui précède entraîne $\hat{W}_n' \to \Lambda(\alpha)_t/\sigma\alpha^2$ dans L^2 sur A_k, et comme $A_k \to \Omega$ lorsque $k \to \infty$ on obtient le résultat.

6 Bibliographie

[1] AZAIS J.M. (1989) : Approximation des trajectoires et temps local des diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré,* **25**, 175–194.

Laboratoire de Probabilités
(URA 224 du CNRS)
Université Pierre et Marie Curie
Tour 56
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05