Annales de l’université de Grenoble

Marcel Brelot

Sur la formule de Taylor

Annales de l’université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 91-93
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__91_0>

SUR LA FORMULE DE TAYLOR

par M. BRELOT.

La formule de Taylor pour une fonction réelle d'une variable réelle est généralement démontrée dans les cours par une sorte de vérification. On sait qu'une intégration par parties répétée conduit très simplement à la formule avec une expression « exacte » du reste, mais cela demande aussi plus d'hypothèses qu'il n'en faut si l'on veut seulement un développement limité à l'ordre n. Il convient donc de donner, dans la seule théorie des dérivées[1], une introduction rapide et « naturelle » et fournissant le développement limité avec les hypothèses minima. Sans prétendre à beaucoup d'originalité sur une pareille question, je vais indiquer un exposé que j'enseigne depuis quelques années.

On s'appuiera sur la formule de Cauchy étendant celle des accroissements finis et qui se démontre comme cette dernière : soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ finies continues dans $(a \leqslant x \leqslant b)$, dérivables à l'intérieur ; si $\psi(a) \neq \psi(b)$ et si φ' et ψ' ne s'annulent pas ensemble,

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \qquad a<\xi<b.$$

Soit alors $f(x)$ finie continue dans $(a \leqslant x < b)$. L'existence d'une dérivée (à droite) en a se traduit par $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a) \xrightarrow[(h\to 0)]{} 0$ (avec $h>0$) et signifie que $f(a+h)$ admet un développement limité au 1^{er} ordre pour $h>0$ au voisinage de 0 :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\varepsilon h \qquad (\varepsilon \to 0 \text{ avec } h).$$

Pour chercher s'il peut y avoir un développement au 2^e ordre, on étudiera

$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2} \qquad (0<h<b-a,\ h \text{ tendant vers } 0).$$

Si f' existe dans $(a<x<b)$, l'expression vaut, d'après la formule de Cauchy

$$\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{2(\theta h)} \qquad (0<\theta<1).$$

(1) Toute dérivée sera supposée finie par définition.

Si f'' existe en a, ce rapport tend vers $\frac{f''(a)}{2}$ pour $h \to 0$.

Ainsi
$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2} \to \frac{f''(a)}{2}$$

ou
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\varepsilon_2 h^2 \qquad (\varepsilon_2 \to 0).$$

Pour chercher un développement au 3^e ordre, on étudiera
$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{2}f''(a)}{h^3},$$

qui vaut
$$\frac{f'(a+\theta_1 h)-f'(a)-\theta_1 hf''(a)}{3(\theta_1 h)^2}.$$

Si f'' existe dans $(a<x<b)$ et si f''' existe en a, on a pour f', d'après ce qui précède
$$f'(a+k)=f'(a)+kf''(a)+\frac{k^2}{2}f'''(a)+\eta k^2 \qquad (\eta \to 0 \text{ avec } k),$$

d'où résulte
$$\frac{f'(a+\theta_1 h)-f'(a)-\theta_1 hf''(a)}{3(\theta_1 h)^2}=\frac{\frac{(\theta_1 h)^2}{2}f'''(a)+\eta(\theta_1 h)^2}{3(\theta_1 h)^2} \to \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(a),$$

et par suite
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{2 \cdot 3}f'''(a)+\varepsilon_3 h^3, \qquad (\varepsilon_3 \to 0).$$

On fera aisément le raisonnement général par récurrence, justifiant la formule valable pour $0 \leqslant h < b-a$:
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\varepsilon_n h^n, \qquad \varepsilon_n \to 0 \text{ avec } h,$$

sous les hypothèses : f, $f' \ldots f^{(n-1)}$ existant dans $(a \leqslant x < b)$, $f^{(n)}$ existant en a.

2. Si l'on veut, pour d'autres usages que ceux des développements limités, une expression du reste, on fera des hypothèses supplémentaires. Par exemple, et en raisonnant de proche en proche comme plus haut :

Reprenons f finie continue dans $(a \leqslant x < b)$. Si f' existe dans cet intervalle,
$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{2\theta h} \qquad \begin{pmatrix} 0<h<b-a \\ 0<\theta<1 \end{pmatrix}$$

ce qui vaut, si f'' existe dans $(a < x < b)$, par la formule des accroissements finis,

$$\frac{f''(a+\theta_2 h)}{2} \qquad (0 < \theta_2 < 1);$$

donc

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta_2 h) \qquad \begin{pmatrix} 0 < h < b-a \\ 0 < \theta_2 < 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que f'' existe dans $(a \leqslant x < b)$ et passons à

$$\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2} f''(a)}{h^3}$$

qui vaut
$$\frac{f'(a+\theta' h) - f'(a) - \theta' h f''(a)}{3(\theta' h)^2}.$$

Si f''' existe dans $(a < x < b)$, il vient pour f' d'après ce qui précède

$$f'(a+k) = f'(a) + kf''(a) + \frac{k^2}{2} f'''(a+\lambda k)$$

$$[0 < \lambda < 1, \qquad 0 < k < b-a],$$

d'où
$$\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2} f''(a)}{h^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(a+\theta_3 h)$$

$$\begin{pmatrix} 0 < h < b-a \\ 0 < \theta_3 < 1 \end{pmatrix},$$

et ainsi de suite.

On arrive ainsi à la formule classique

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$(0 < \theta < 1),$$

valable pour $0 \leqslant h < b-a$, sous les hypothèses suivantes :

$f, f' \dots f^{(n)}$ existant dans $(a \leqslant x < b)$,
$f^{(n+1)}$ existant dans $(a < x < b)$.

Si f est de plus donnée finie continue en b, on voit en reprenant le raisonnement que la formule est valable encore pour $h = b - a$.