BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une surface du cinquième ordre et sa représentation sur le plan

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 40-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__40_0>

MÉLANGES.

SUR UNE SURFACE DU CINQUIÈME ORDRE ET SA REPRÉSENTATION SUR LE PLAN;

Par M. G. DARBOUX.

Je me propose d'étudier dans cette Note une courbe et une surface remarquables, toutes deux du cinquième ordre, qu'on rencontre dans la théorie des surfaces homofocales du second degré. Si d'un point A on mène des plans tangents à une série de surfaces homofocales, ou plus généralement inscrites dans une même développable, le lieu des points de contact est la surface du cinquième ordre, dont nous donnons les principales propriétés. Elle admet cinq séries de coniques et se rapproche par là des surfaces du quatrième ordre à ligne double, auxquelles elle se réduit d'ailleurs dans quelques cas particuliers. Elle a un point triple, le point A, et une courbe double qui a été considérée par M. Chasles dans la Note XXVI de l'*Aperçu historique*, qui a créé la théorie des surfaces homofocales. Cette courbe double est du cinquième ordre, elle est le lieu des pieds des normales abaissées du point A sur toutes les surfaces homofocales. C'est à la surface précédente que j'essaye d'appliquer les méthodes de M. Clebsch, en donnant sa représentation sur un plan. Cette représentation peut s'effectuer soit par l'analyse, soit par des considérations géométriques.

1. *Remarques préliminaires sur les surfaces homofocales.*— Appelons, avec M. *Reye* (1), *axe* d'une surface du second ordre toute droite perpendiculaire à sa polaire. On reconnaît sans difficulté que tout diamètre de la surface, toute droite parallèle à un axe de symétrie, tout axe d'une section plane d'un cône circonscrit, toute perpendiculaire abaissée d'un point sur son plan polaire sont des *axes* de la surface. Ces axes demeurent les mêmes pour toute surface homofocale ou homothétique à la proposée. Si l'on prend, par exemple, un système de surfaces homofocales, l'ensemble des axes est formé de toutes les normales aux différentes surfaces, et, d'après une proposition maintenant bien connue, le lieu des pôles d'un plan P par rapport à

---

(1) Reye, *Geometrie der Lage*. Hannover, Carl Rumpler, 1866, p. 146.

toutes les surfaces est une droite normale au plan P et passant par le point de contact de ce plan et de la surface homofocale qui lui est tangente. L'ensemble de ces droites a été étudié d'abord par M. Chasles (1), puis par MM. Reye, Klein et Lie (2).

On peut définir de la manière suivante l'ensemble ou *complexe* des axes, indépendamment de toute surface du second degré.

Considérons un tétraèdre (qui, dans le cas des surfaces homofocales, est formé des trois plans de symétrie et du plan de l'infini). Toute droite faisant partie du complexe de rayons considéré satisfait aux deux conditions suivantes, dont l'une entraîne l'autre : elle coupe les quatre faces du tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant ; les quatre plans menés par la droite et les quatre sommets du tétraèdre ont un rapport anharmonique constant, dont la valeur est égale à celle du rapport précédent.

Quelle est la nature de la courbe enveloppée par ceux des rayons qui sont situés dans un plan P ? Ces rayons doivent couper les quatre droites, intersections du plan P et du tétraèdre, en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Ils envelopperont, par conséquent, une conique tangente aux quatre faces du tétraèdre. [Dans le cas des surfaces homofocales, cette conique sera une parabole tangente aux trois plans de symétrie (3).]

De même, celles des droites du complexe passant par un point décriront un cône du second degré, contenant les quatre sommets du tétraèdre. (Ce cône, dans le cas des surfaces homofocales, passe par le centre et a trois génératrices parallèles aux axes.)

L'ensemble des droites forme donc ce que Plücker appelle un *complexe du second degré*. Ce complexe se distingue des complexes généraux par cette propriété caractéristique, que toute ligne passant par un des sommets ou située dans une des faces d'un tétraèdre appartient au complexe (4).

Revenons maintenant au système des surfaces homofocales. Dans ce cas on est conduit à adjoindre aux rayons, ou axes, de nouveaux éléments géométriques. Chaque rayon R étant normal à l'une des

(1) *Aperçu historique*, Note XXVI, p. 412 de l'édition allemande.
(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, 6 et 13 juin 1870.
(3) *Aperçu historique*, Note XXVI, § 3.
(4) *Voir* les Notes déjà citées de MM. *Klein* et *Lie*.

surfaces homofocales, le pied r de cette normale et le plan tangent en r doivent être considérés. Le rayon R sera le lieu des pôles du plan P par rapport à toutes les surfaces homofocales. Le point r donne lieu d'ailleurs à un rapport anharmonique constant avec trois quelconques des quatre points d'intersection du rayon et des faces du tétraèdre.

Si un plan P contient l'axe d'un plan P′, réciproquement le plan P′ contiendra l'axe du plan P.

Quand des plans P sont tangents à une surface non développable, les axes correspondants forment un système de rayons rectilignes, ou ce que Plücker appelle une *congruence*, c'est-à-dire qu'il passe un nombre limité de rayons par chaque point de l'espace. Nous avons déjà dit quelques mots, dans un travail précédent [1], de ces systèmes de rayons, ou plutôt de leurs polaires réciproques. Nous n'examinerons ici que les problèmes simples dont la solution nous est indispensable.

Supposons que des plans P soient assujettis à passer par une droite D : quel sera le lieu de leurs axes ? Pour résoudre ce problème, cherchons le lieu des pôles des plans passant par D, par rapport à toutes les surfaces homofocales.

Prenons d'abord une de ces surfaces S et faisons tourner le plan P autour de la droite D, le lieu des pôles sera une droite Δ polaire de D par rapport à S; si l'on prend successivement les différentes surfaces S′, S″,..., on voit que le lieu cherché est une surface réglée, engendrée par les droites Δ', Δ'',..., polaires de D par rapport aux différentes surfaces homofocales.

Supposons, au contraire, qu'on laisse fixe le plan P passant par D : le lieu de ses pôles par rapport aux différentes surfaces homofocales sera une droite, axe du plan P. Le lieu cherché peut donc, d'une seconde manière, être considéré comme une surface réglée, engendrée par les axes des plans passant par la droite D. Puisque la surface admet deux systèmes de génératrices rectilignes, elle est du second degré, et l'on peut énoncer ce théorème de M. Chasles :

Le lieu des axes des plans passant par une droite D *est un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices du second système sont les polaires de la droite* D *par rapport aux différentes surfaces homofocales.*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 348.

Ce paraboloïde est tangent aux trois plans de symétrie.

Les pieds des différents rayons forment une courbe, lieu des points de contact des plans tangents menés par la droite D aux différentes surfaces. Cette courbe, située sur le paraboloïde, lieu des axes, est coupée en un point par ces axes, en deux points par les génératrices de l'autre système. C'est donc une cubique gauche. On voit donc que :

Si par un point d'une droite on mène des plans tangents à toutes les surfaces homofocales, le lieu des points de contact est une cubique gauche coupant en deux points la droite, le cercle de l'infini, les trois focales.

Cette cubique gauche se décompose, dans quelques cas particuliers, en une droite et une conique, ou même en trois droites. Elle devient une courbe plane, dans le cas suivant.

Imaginons que la droite D par laquelle on mène tous les plans P soit un *axe*. Dans ce cas, tous les plans passant par cet axe R ont leurs axes R′ dans le plan P correspondant au rayon R et le coupant en r. Ces axes R′ enveloppent, on l'a vu, une parabole; le lieu cherché est la podaire du point r par rapport à cette parabole. On a donc la proposition suivante (1) :

Quand une droite D *est axe des surfaces, les axes des plans passant par cette droite enveloppent une parabole située dans le plan conjugué à cet axe; les points de contact de ces plans ou les pieds des axes situés dans un plan forment une courbe du troisième ordre podaire de parabole, ayant un point double au point de rencontre du plan et de la droite* D.

Cette courbe du troisième ordre est la *focale à nœud*.

Dans le cas général où la droite D n'est pas axe, la cubique est gauche; mais si la droite D est dans l'un des plans tangents K à toutes les surfaces homofocales, la cubique se décompose. En effet, quand le plan variable P passant par la droite D coïncidera avec le plan K, il y aura une infinité de points de contact sur la génératrice L de contact du plan K et de la développable Π circonscrite à toutes les quadriques. Par suite, la cubique gauche se décomposera en une droite L et en une conique rencontrant cette droite et tangente au plan K. Cette conique devra rencontrer en un point les trois focales, le cercle de l'infini.

(1) Voir *Aperçu historique*, l. c.

Enfin, si la droite D est tangente double de la développable Π : pour deux positions du plan P, on aura deux droites de contact, L, L'; la troisième droite qui complète la cubique sera la droite D elle-même, génératrice rectiligne de l'une des surfaces.

Ces propositions s'appliquent au cas où la cubique est plane. Ainsi lorsqu'un axe est situé dans un plan tangent à la développable Π suivant la droite L, la cubique se décomposera dans la droite L et dans une conique touchant L en un point.

Supposons maintenant que les plans P soient simplement assujettis à passer par un point A. Dans ce cas, à chaque plan correspond un axe dépendant des deux variables qui fixent la direction du plan. On a donc un système de rayons rectilignes. Nous allons montrer que ces rayons sont les tangentes doubles d'une développable du quatrième ordre formée par les plans osculateurs d'une cubique gauche.

En effet, considérons le cône C des axes passant par A. A toute génératrice du cône correspond le plan dont elle est un axe. Ce plan peut être considéré comme le plan polaire du point A par rapport à l'une des surfaces homofocales. Les plans correspondant aux axes passant par A sont donc les plans polaires du point A par rapport à toutes les surfaces homofocales. Soit Ψ la développable qu'ils enveloppent.

Soit maintenant un plan P passant par A, il coupe le cône des normales suivant deux droites R, R_1, et son axe est l'intersection des plans correspondants à ces axes R, R_1. Donc :

Les axes correspondants à tous les plans passant par un point sont les intersections de deux plans tangents à la développable Ψ, c'est-à-dire ce sont les tangentes doubles et les génératrices de cette surface.

Ce théorème, sans proposition nouvelle, va nous permettre de reconnaître la nature de la développable Ψ. Nous avons vu que les axes des plans P, passant par une droite, engendrent une surface du second degré. Donc, avec les tangentes doubles de la développable Ψ, on peut former une infinité de surfaces du second degré. Cette développable Ψ, étant formée par les plans tangents communs à une série de surfaces du second degré dépendant de deux paramètres, ne peut être qu'une développable formée des plans osculateurs d'une cubique gauche. On a donc le théorème suivant [1] :

[1] Voir *Aperçu historique*, l. c.

Les axes correspondants à tous les plans P *passant par un point* A *sont les tangentes doubles d'une surface développable* Ψ, *enveloppe des plans polaires de* A *par rapport à toutes les surfaces homofocales. Les génératrices de cette surface sont les axes des plans tangents au cône des normales menées par* A. *Cette surface développable est formée par les plans osculateurs d'une cubique gauche. Elle est tangente aux quatre faces du tétraèdre conjugué commun aux trois plans tangents aux quadriques homofocales passant en* A, *et elle est coupée par les plans tangents suivant les paraboles enveloppes des axes dans ce plan.*

2. Nous avons déjà trouvé le lieu des pieds des axes situés dans un plan; cherchons maintenant le lieu des pieds des normales menées par un point. Cette courbe est sur le cône des normales, et elle peut être aussi définie comme le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les plans polaires de A. C'est donc ce qu'on peut appeler une *podaire de cubique gauche,* et, par conséquent, la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une autre cubique gauche, polaire réciproque de la première par rapport à une sphère ayant son centre en A. La première cubique gauche ayant un plan tangent à l'infini, la seconde passera au point A, et sa transformée par rayons vecteurs réciproques sera du cinquième ordre. Cette transformée passe aussi au point A et y a un point triple, les trois branches étant normales respectivement aux trois surfaces homofocales passant en A.

Cette courbe, d'après sa construction, appartient à la classe de celles dont les points se déterminent individuellement. C'est ce que confirme le calcul suivant.

Soient :

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}+\frac{t^2}{d-\lambda}=0 \tag{1}$$

l'équation en coordonnées homogènes des surfaces homofocales; x', y', z', t' les coordonnées du point A. Le plan polaire de ce point par rapport à l'une des surfaces aura pour équation

$$\frac{xx'}{a-\lambda}+\frac{yy'}{b-\lambda}+\frac{zz'}{c-\lambda}+\frac{tt'}{d-\lambda}=0. \tag{2}$$

Les coordonnées d'un point de la perpendiculaire menée par le point A s'expriment par les formules

$$(3)\qquad kx = x' - \frac{ux'}{a-\lambda}, \quad ky = y' - \frac{uy'}{b-\lambda}, \ldots,$$

k étant un facteur de proportionnalité et u étant une arbitraire dépendant de la position du point sur la droite, et que nous allons déterminer en exprimant que le point se trouve dans le plan polaire. Posons, pour abréger,

$$(4)\qquad \frac{x'^2}{a-\lambda} + \frac{y'^2}{b-\lambda} + \frac{z'^2}{c-\lambda} + \frac{t'^2}{d-\lambda} = \mathrm{L};$$

l'équation qui détermine u peut s'écrire

$$(5)\qquad \mathrm{L} - u\frac{d\mathrm{L}}{d\lambda} = 0,$$

et, par suite, on aura, pour l'expression de l'une quelconque des coordonnées,

$$(6)\qquad k_1\frac{x}{x'} = \frac{\frac{d\mathrm{L}}{d\lambda}}{\mathrm{L}} + \frac{1}{\lambda - a} = \frac{d}{d\lambda}\log \mathrm{L}(\lambda - a), \ldots.$$

Transformons la valeur du polynôme L, en introduisant à la place des constantes x', y', z', t' les paramètres α, β, γ des surfaces homofocales passant en A. On peut poser

$$(7)\qquad x'^2 = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad y'^2 = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \ldots,$$

où

$$(8)\qquad \begin{cases} f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d), \\ \varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma); \end{cases}$$

alors, d'après un théorème de la théorie des fractions rationnelles, L prendra la forme

$$(9)\qquad \mathrm{L} = -\frac{\varphi(\lambda)}{f'(\lambda)},$$

et les formules qui donnent les coordonnées pourront s'écrire définitivement

$$(10)\quad k\frac{x}{x'} = \left(\frac{1}{\lambda-\alpha} + \frac{1}{\lambda-\beta} + \frac{1}{\lambda-\gamma} - \frac{1}{\lambda-b} - \frac{1}{\lambda-c} - \frac{1}{\lambda-d}\right) f(\lambda)\varphi(\lambda), \ldots,$$

qui sont bien, comme on le voit, du cinquième ordre en λ.

Cette courbe peut encore être définie comme le lieu des pieds des normales abaissées de A sur toutes les coniques, intersections de chaque surface par le plan polaire de A par rapport à cette surface.

3. *De la surface Σ, lieu des points de contact des plans tangents menés par un point.*

Si d'un point A on mène des plans tangents aux surfaces homofocales, le lieu des points de contact constitue une surface qu'on peut engendrer de la manière suivante.

Soit S une des surfaces du second degré. Le lieu des points de contact pour cette surface est une conique. L'ensemble de ces coniques forme la surface Σ, qui peut être considérée comme formée de trois nappes, correspondant aux trois séries de focales et se réunissant l'une à l'autre aux deux focales réelles.

La surface Σ contient les trois focales, le cercle de l'infini, les six génératrices des surfaces passant en A et situées deux à deux dans les trois plans tangents aux surfaces passant en A. On sait que ces six génératrices sont les focales des cônes circonscrits à toutes les surfaces homofocales et ayant le point A pour sommet. Elles sont les six arêtes de l'angle tétraèdre formé par les quatre plans tangents communs à toutes les surfaces menées par le point A. Ces plans sont aussi les plans menés par A tangentiellement à la développable Π circonscrite à toutes les surfaces homofocales; ils touchent cette développable suivant quatre génératrices qui appartiennent encore à la surface Σ. *Cette surface contient donc au moins dix droites.*

La surface Σ a évidemment une ligne double, qui est le lieu des pieds des normales menées de A. Considérons, en effet, un point M de cette courbe; la droite AM étant normale à une quadrique sera tangente à la ligne d'intersection des deux autres surfaces passant en M. Les coniques correspondantes à ces surfaces passeront au point M et s'y couperont à angle droit. La tangente à la courbe lieu des pieds des normales déterminera, avec les tangentes aux deux coniques, les deux plans tangents aux deux nappes passant en M.

Le degré de Σ peut se déterminer de la manière suivante. Considérons une droite quelconque passant par A. Cette droite coupe, au point A, les trois nappes de la surface; d'ailleurs elle est tangente à deux surfaces homofocales en deux points qui appartiennent aussi à Σ. La surface est donc coupée par toute droite passant par A en cinq points; elle est du cinquième ordre.

Cette conclusion se confirme par l'étude d'une série de sections planes. Soit P le plan polaire de A par rapport à une des quadriques S. Ce plan contient une conique K, intersection de S et de P. Cherchons les autres points de la surface Σ contenus dans P. Soit m un de ces points. Le plan tangent à une des trois quadriques passant par m devra aller passer en A. Ce plan a pour axe la perpendiculaire qui lui est menée en m; cet axe doit, d'ailleurs, passer par le pôle du plan par rapport à S, pôle qui est dans le plan P. L'axe du plan doit donc être tout entier dans le plan P, et l'on a à chercher le lieu des pieds des axes situés dans ce plan. Ce lieu est une courbe du troisième ordre F, déjà considérée. La section complète de la surface se compose donc d'une conique et d'une courbe du troisième ordre, la focale à nœud de Quetelet.

Dans le plan P se trouvent plusieurs courbes remarquables déjà considérées : 1° la parabole Q enveloppe des axes; 2° la conique K, section de la quadrique S par P; 3° la focale à nœud F, podaire du pied p de l'axe de P, par rapport à la parabole P; 4° la section I, hyperbole équilatère du cône des normales par le plan P. Ces différentes courbes donnent lieu à des relations géométriques; signalons les plus importantes : 1° le point p se trouve sur la directrice de la parabole Q; 2° cette directrice est le lieu des centres des sections faites dans les quadriques par le plan P; 3° la parabole Q et l'hyperbole équilatère I sont polaires réciproques par rapport à la conique K; 4° la focale à nœud est le lieu des pieds des normales ou des points de contact des tangentes menées de p à la conique K et à toutes les courbes homofocales; 5° en chaque point de la focale F, deux des coniques, sections de quadriques qui passent en ce point, sont tangentes entre elles et perpendiculaires à la troisième; 6° en ce qui concerne la surface Σ, les pieds des normales abaissées de p sur la conique K sont des points de la courbe double; le plan P est plan tangent double de la surface, et ses points de contact sont ceux des tangentes menées de p à la conique K; 7° la polaire du point p par rapport à la conique K est la génératrice de Ψ située dans le plan P.

4. *Application de la surface sur un plan.* — Nous avons vu que, si par le point A on mène un plan P, l'axe de ce plan est une tangente double d'une développable de troisième classe Ψ. Cet axe coupe le plan en un point de la surface Σ. *Les points de cette surface se déterminent donc individuellement.* Si l'on considère un plan quel-

conque U, à toute droite de ce plan correspondra un plan passant par A et par cette droite et le point de la surface déterminé par ce point. *La surface est donc représentée sur le plan.*

Considérons l'axe d'un plan P passant par A; cet axe R coupe le plan en un point M de la surface. Il importe d'expliquer comment le point M se distingue des quatre autres points d'intersection de la droite et de Σ. C'est que par l'axe R on peut mener deux plans tangents à la surface Ψ. Ces plans contiennent deux coniques de Σ coupant R en quatre points distincts. Le point M se distingue donc des précédents par une propriété géométrique qui permet de le déterminer individuellement.

Au moyen de la représentation précédente de la surface, on peut étudier sans difficulté la nature des courbes tracées sur cette surface et reconnaître l'existence de plusieurs séries de coniques et de cubiques gauches ou planes. Prenons, par exemple, tous les plans passant par une droite D menée par A. A tous ces plans correspondront une série de points de la surface situés sur une cubique gauche. Il y a donc sur la surface une première série de cubiques. On peut faire passer une de ces courbes par deux points quelconques de la surface MM'. En effet, les plans passant par A et donnant ces deux points M, M' se couperont suivant une droite; tous les plans passant par cette droite donneront une cubique passant par les deux points M, M'.

Ces cubiques deviennent planes toutes les fois que la droite D fait partie du cône des normales, elles sont alors les sections de la surface déjà considérée par les plans polaires de A.

A toutes les droites D situées dans un plan correspond sur la surface un faisceau de cubiques gauches, déterminées par un point et passant par un point fixe. Parmi les plans passant par A se trouvent quatre plans remarquables : Q, Q_1, Q_2, Q_3. Ce sont ceux qui sont tangents à toutes les surfaces et à leur développable circonscrite Π. Ils contiennent leur axe, qui est la génératrice de contact du plan et de la développable Π. Pour toutes les droites passant par le point A et situées dans l'un de ces plans Q, par exemple, la cubique gauche se décompose en : 1° la droite δ, génératrice de contact du plan Q et de Π; 2° une conique rencontrant la droite δ et tangente au point de rencontre avec cette droite au plan Q [1]. On obtient donc *quatre*

[1] *Voir* plus haut, 3.

séries nouvelles de sections coniques, correspondant aux droites des plans Q, Q_1, Q_2, Q_3. Étudions la disposition de l'une quelconque de ces séries, celle qui correspond aux droites situées dans le plan Q et passant par A.

Ce plan Q coupe la surface : 1° suivant trois droites α, α', α'', qui sont trois génératrices des surfaces quadriques passant en A; 2° il est tangent en tous les points de la droite δ, génératrice de contact du plan Q et de Π. Les trois autres génératrices β, β', β'' des trois quadriques sont les intersections des autres plans Q_1, Q_2, Q_3 et forment un trièdre. Par toute droite D passant par A dans le plan Q, on pourra faire passer trois plans contenant β, β', β''. Ces trois plans seront tangents aux surfaces qui admettent ces droites pour génératrices en un point de ces génératrices, et il est évident que, lorsque la droite D variera dans le plan, les trois plans tangents, et par conséquent leurs points de contact, formeront trois séries homographiques. On a donc la proposition suivante :

Les plans des coniques correspondantes aux droites du plan Q enveloppent une développable de troisième classe, tangente aux trois faces du trièdre $Q_1Q_2Q_3$. Les coniques coupent la droite δ et sont tangentes au plan Q, à leur point de rencontre avec cette droite δ (1).

Deux coniques appartenant à la même série n'ont aucun point commun (si ce n'est sur la courbe double); deux coniques appartenant à des séries différentes se coupent toujours en un point.

Les plans tangents doubles enveloppent cinq cubiques gauches. Parmi les droites D situées dans le plan Q, s'en trouvent deux remarquables : ce sont les axes situés dans ce plan D_1, D_2, coupant la droite δ en deux points a_1, a_2, qui sont des points de la courbe double pour lesquels les plans tangents aux deux nappes se confondent. A chacune de ces droites correspondent deux plans passant par δ et coupant la surface suivant δ, et deux coniques appartenant à deux séries différentes et tangentes en a_1, a_2 à la droite δ. Nous bornerons là ce que nous avons à dire, pour ne développer que la méthode analytique.

(1) Il y a une proposition analogue pour les cubiques gauches correspondantes aux droites situées dans un plan : elles coupent les six droites passant par A en six séries de points homographiques.

5. *Étude analytique de la surface* Σ.

Soit

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}+\frac{t^2}{d-\lambda}=0 \tag{11}$$

l'équation générale des surfaces inscrites dans une même développable Π, et désignons par x', y', z', t' les coordonnées du point A. Les formules (7) donnent les valeurs de ces coordonnées en fonction des paramètres α, β, γ des trois surfaces du système passant en A. Le plan polaire du point A par rapport à la surface (λ) aura pour équation

$$\frac{xx'}{a-\lambda}+\frac{yy'}{b-\lambda}+\frac{zz'}{c-\lambda}+\frac{tt'}{d-\lambda}=0; \tag{12}$$

son équation étant du troisième degré en λ, on voit que ce plan polaire enveloppe une développable Ψ du troisième ordre et de la troisième classe. D'ailleurs, pour les valeurs de λ,

$$\lambda=a,\quad \lambda=b,\quad \lambda=c,\quad \lambda=d,$$

on obtient les quatre plans

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad t=0.$$

Cette développable Ψ sera donc tangente aux quatre faces du tétraèdre conjugué à toutes les surfaces, ce qui confirme les résultats que nous avons déjà obtenus.

L'équation de la surface Σ s'obtiendra en éléminant λ entre les deux équations (11), (12). On obtiendra ainsi une équation du neuvième ordre, qui se réduira au cinquième après la suppression du facteur $xyzt$. On peut écrire cette équation sous la forme d'un déterminant du sixième ordre, qui est

$$\begin{vmatrix} x & ax & a^2x & x' & ax' & a^2x' \\ y & by & b^2y & y' & by' & b^2y' \\ z & cz & c^2z & z' & cz' & c^2z' \\ t & dt & d^2t & t' & dt' & d^2t' \\ \sum\frac{x^2}{a} & 0 & 0 & \sum\frac{xx'}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma x^2 & 0 & 0 & \Sigma xx' \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Cette équation montre que la surface se réduira au quatrième ordre si

$x' = 0$, c'est-à-dire si le point A se trouve sur une des faces du tétraèdre, et au troisième ordre si $x' = y' = 0$, c'est-à-dire si le point se trouve sur une des arêtes du tétraèdre. Nous ne considérons que le cas général, celui où le point A n'est dans aucune des faces du tétraèdre conjugué.

Au lieu de faire l'élimination, on peut chercher à exprimer les coordonnées d'un point de la surface Σ en fonction de deux variables indépendantes. C'est ce qu'il est possible d'effectuer à l'aide du procédé suivant.

Imaginons que, dans l'équation (12), on regarde x, y, z, t comme connus. Cette équation fournira pour λ trois valeurs, qui seront les paramètres des plans tangents à la développable Ψ et passant par le point considéré. On obtient ainsi un nouveau système de coordonnées, dans lequel on détermine un point de l'espace par les paramètres des plans tangents à la développable Ψ et passant par ce point. Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des trois plans passant par un point (x, y, z, t). Ces trois paramètres seront racines de l'équation (12), et l'on pourra, d'après la théorie des fractions rationnelles, exprimer, à un facteur constant près, dont la valeur est indifférente, x, y, z, t en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. On a ainsi

$$(14)\qquad \begin{cases} kxx' = \dfrac{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{f'(a)}, \\ kyy' = \dfrac{(b-\rho)(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{f'(b)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c(x-d) \text{ [1]}.$$

Pour obtenir l'équation de la surface Σ, il faudra exprimer qu'une racine de l'équation (12), ρ par exemple, satisfait à l'équation (11), c'est-à-dire que l'on a

$$(15)\qquad \sum \frac{x^2}{a-\rho} = 0.$$

Si nous remplaçons x, y, z, t par leurs valeurs tirées des for-

---

(1) *Voir* la formule (8) : nous conservons les mêmes notations.

mules (14), nous obtenons la condition

$$(16)\quad \sum \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)^2(a-\rho_2)^2}{x'^2 f'^2(a)} = 0 = -\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)^2(\alpha-\rho_2)^2}{f(\alpha)\varphi'(\alpha)},$$

qui peut être considérée comme l'équation de la surface dans le système de coordonnées (ρ, ρ_1, ρ_2). Cette équation étant du premier degré en ρ, si l'on en déduit la valeur ρ et qu'on substitue cette valeur dans les équations (14), on a les expressions de x, y, z, t en fonction de deux paramètres ρ_1, ρ_2. Ces deux paramètres sont les deux racines de l'équation (12) qui ne sont pas communes à l'équation (11). Chacun de ces paramètres déterminant un plan, leur ensemble déterminera une droite tangente double de la développable Ψ, en sorte que la représentation de la surface revient à celle que nous avons déjà donnée § 4.

Posons, pour abréger,

$$(17)\qquad A = \frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{x'f'(a)}, \quad B = \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{y'f'(b)}, \ldots;$$

$$(18)\quad E = \frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)}{x_0\varphi'(\alpha)}, \quad F = \frac{(\beta-\rho)(\beta-\rho_1)}{y_0\varphi'(\beta)}, \quad G = \frac{(\gamma-\rho)(\gamma-\rho_1)}{z_0\varphi'(\gamma)},$$

en introduisant les notations

$$(19)\qquad x_0 = \sqrt{\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}}, \quad y_0 = \sqrt{\frac{f(\beta)}{\varphi'(\beta)}}, \quad z_0 = \sqrt{\frac{f(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}};$$

soit encore

$$(20)\quad \begin{cases} S = a.A^2 + b.B^2 + c.C^2 + d.D^2 = -\alpha.E^2 - \beta.F^2 - \gamma.G^2, \\ T = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = -E^2 - F^2 - G^2, \end{cases}$$

on aura

$$(21)\qquad \rho = \frac{S}{T},$$

et les coordonnées d'un point de la surface seront données par les formules

$$(22)\qquad \begin{cases} NX = A(S - aT), \\ NY = B(S - bT), \\ NZ = C(S - cT), \\ NT_1 = D(S - dT), \end{cases}$$

où N désigne un facteur indéterminé dont l'introduction provient de ce que les coordonnées x, y, z, t sont homogènes. On déduit facilement, des formules précédentes, la suivante, où entre une arbitraire n et qui les contient toutes :

$$(23) \qquad N\sum \frac{Xx'}{a-u} = \frac{(\rho-u)(\rho_1-u)}{f(u)}(-S+uT).$$

Les formules qui précèdent ont un inconvénient assez grave. Pour un système de valeurs de ρ_1 et de ρ_2, les coordonnées du point de la surface sont bien déterminées, mais la réciproque n'est pas vraie. A un point de la surface correspondront deux systèmes de valeurs pour ρ_1, ρ_2, à cause de la symétrie des formules qui ne changent pas quand on y change ρ_1 en ρ_2; mais, si l'on effectue la transformation

$$(24) \qquad y = \rho_1 + \rho_2, \quad x = \rho_1\rho_2,$$

les fonctions A,..., E,... prennent la forme

$$(25) \qquad A = a^2 - ay + x, \ldots.$$

Si l'on considère y et x comme les coordonnées d'un point dans un plan, ces fonctions A,..., E,..., égalées à zéro, représentent des droites tangentes à la parabole

$$(26) \qquad y^2 - 4x = 0.$$

Les fonctions A,..., E,... étant linéaires, les formules (21) sont du troisième ordre en y et x; elles donnent *une* des représentations les plus simples dont la surface soit susceptible.

Les sept fonctions A, B, C,... et toute autre fonction linéaire peuvent être exprimées en fonction de trois d'entre elles. On a, par exemple,

$$(27) \qquad \frac{x'f'(a)}{\varphi(a)}A = \frac{x_0E}{a-\alpha} + \frac{y_0F}{a-\beta} + \frac{z_0G}{a-\gamma}.$$

Plus généralement, l'équation

$$(28) \qquad u^2 - uy + x = (\rho-u)(\rho_1-u) = 0,$$

qui représente une tangente quelconque à la parabole (26), peut être écrite

$$(29) \qquad \frac{(\rho-u)(\rho_1-u)}{\varphi(u)} = \frac{x_0E}{u-\alpha} + \frac{y_0F}{u-\beta} + \frac{z_0G}{u-\gamma} = 0.$$

L'équation de la parabole (26), en fonction de E, F, G, serait

$$(30)\quad (\beta-\gamma)\sqrt{\mathrm{E}x_0\varphi'(\alpha)}+(\gamma-\alpha)\sqrt{\mathrm{F}y_0\varphi'(\beta)}+(\alpha-\beta)\sqrt{\mathrm{G}z_0\varphi'(\gamma)}=0.$$

Dans la suite, nous emploierons tantôt les variables E, F, G, tantôt ρ_1 et ρ_2, dont la signification géométrique nous est connue, et dont l'emploi permet de simplifier les calculs et de dédoubler certaines équations.

Si l'on prend les coordonnées x, y, ou E, F, G, les équations

$$\mathrm{S}=0,\quad \mathrm{T}=0$$

représentent deux coniques très-importantes que nous appellerons S, T, et qui sont conjuguées aux triangles E, F, G. Les côtés de ce triangle, ainsi que les droites A, B, C, D, sont tangents à la parabole ou conique (30). Les coniques S et T se coupent en quatre points, définis par les équations

$$(31)\qquad \frac{\pm\mathrm{E}}{\sqrt{\beta-\gamma}}=\frac{\pm\mathrm{F}}{\sqrt{\gamma-\alpha}}=\frac{\pm\mathrm{G}}{\sqrt{\alpha-\beta}}.$$

6. *De la correspondance entre les points du plan et ceux de la surface* Σ.

A toute courbe de la surface correspondra sur le plan une certaine courbe; aux sections planes définies par l'équation

$$m\mathrm{X}+n\mathrm{Y}+p\mathrm{Z}+q\mathrm{T}_1=0,$$

correspondront sur le plan les courbes du troisième ordre dont l'équation est

$$(32)\quad m\mathrm{A}(\mathrm{S}-a\mathrm{T})+n\mathrm{B}(\mathrm{S}-b\mathrm{T})+p\mathrm{C}(\mathrm{S}-c\mathrm{T})+q\mathrm{D}(\mathrm{S}-d\mathrm{T})=0.$$

Ces courbes passent par quatre points fixes déjà déterminés, les quatre points d'intersection des coniques S et T. Mais ces quatre points ne suffisent pas évidemment à définir le réseau des courbes du troisième ordre. On sait, en effet, que les courbes passant par quatre points peuvent encore être assujetties à cinq conditions distinctes, ce qui donne des courbes du troisième ordre beaucoup plus générales que celles qui sont représentées par l'équation (32). Nous donnerons plus loin les propriétés caractéristiques du réseau (32).

Les quatre points d'intersection des coniques S, T, et que nous appellerons points *fondamentaux,* sont ceux auxquels correspondent sur la surface tous les points d'une ligne droite. En effet, pour un de ces points S, T sont nuls, les valeurs de X, Y, Z, T fournies par les équations (22) sont indéterminées. Soient A_0, B_0,... les valeurs que prennent A, B,... pour un de ces points, la droite qui leur correspond sera évidemment déterminée par les équations

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= A_0(\lambda - a\lambda'),\\ Y_1 &= B_0(\lambda - b\lambda'),\\ Z_1 &= C_0(\lambda - c\lambda'),\\ T_1 &= D_0(\lambda - d\lambda'); \end{aligned}\right.$$

en éliminant λ, λ' entre ces équations, on aurait les équations de la droite. A chacun des quatre points d'intersection correspondront quatre droites δ, δ', δ'', δ'''. D'ailleurs, pour ces points fondamentaux, les valeurs de ρ_1, ρ_2 sont parfaitement déterminées; c'est la valeur de ρ donnée par l'équation (16) qui est indéterminée. En d'autres termes, ces droites sont des tangentes doubles de la développable Ψ. Ce sont les axes des plans menés par le point A de l'espace et qui sont tangents à toutes les surfaces homofocales.

Les plans tangents menés par la droite δ à la développable Ψ sont donnés par l'équation

$$\sum \frac{Xx'}{a-u} = 0,$$

où il faut remplacer u successivement par les deux racines de l'équation

$$(34)\qquad \frac{x_0\sqrt{\beta-\gamma}}{u-\alpha} + \frac{y_0\sqrt{\gamma-\alpha}}{u-\beta} + \frac{z_0\sqrt{\alpha-\beta}}{u-\gamma} = 0.$$

En laissant de côté les quatre points fondamentaux auxquels correspondent des droites de la surface, à tout point du plan correspondra par les formules (22) un seul point de la surface. Réciproquement, si l'on considère un point M de la surface, les valeurs correspondantes de ρ, ρ_1, ρ_2 seront données par l'équation (12). La racine ρ se distinguera des deux autres, parce qu'elle satisfait aussi à l'équation de la surface (11). En la supprimant, on aura une équation du second degré, donnant ρ_1, ρ_2. Les valeurs de x, y, coordonnées du point m du plan, seront données par les formules

$$x = \rho_1\rho_2, \quad y = \rho_1 + \rho_2,$$

qui sont rationnelles. Donc, en général, à un point de la surface correspond un seul point du plan.

Cette conclusion sera en défaut dans un cas seulement. C'est celui où les équations (11) de la surface et celles (12) du plan polaire ont plus d'une racine commune.

Elles ont, par exemple, trois racines communes pour le point A :

$$X = x', \quad Y = y', \ldots,$$

et ces racines sont α, β, γ. Pour ce point A, on ne saura pas distinguer les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 les unes des autres. On aura donc trois points du plan correspondants au point A :

1° $\quad y = \alpha + \beta, \quad x = \alpha\beta, \quad E = F = 0;$

2° $\quad y = \alpha + \gamma, \quad x = \alpha\gamma, \quad E = G = 0;$

3° $\quad y = \beta + \gamma, \quad x = \beta\gamma, \quad F = G = 0.$

Ce sont les trois sommets du triangle conjugué EFG. Ce fait indique l'existence de trois nappes de la surface se coupant au point A. Suivant que ce point sera considéré comme appartenant à l'une des trois nappes, il aura pour correspondant l'un ou l'autre des trois points.

Un deuxième cas d'exception se présente quand les équations de la surface et du plan polaire (11), (12) ont deux racines communes. Dans ce cas, soient ρ, ρ_1 ces deux racines que rien ne distingue l'une de l'autre; on pourra prendre :

soit

$$y = \rho_1 + \rho_2, \quad x = \rho_1\rho_2;$$

soit

$$y = \rho + \rho_2, \quad x = \rho\rho_2.$$

A tout point de la surface pour lequel ce fait de deux racines communes se présente, correspondent deux points du plan. Les points de cette nature forment la ligne double de la surface, et nous allons en premier lieu chercher la nature de cette courbe double et de sa représentation sur le plan.

De la courbe double. — Reprenons l'équation (16) de la surface, qu'on peut écrire, en vertu d'un théorème relatif aux fractions rationnelles,

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)^2(\alpha-\rho_2)^2}{f(\alpha)\varphi'(\alpha)} + \frac{(\beta-\rho)(\beta-\rho_1)^2(\beta-\rho_2)^2}{f(\beta)\varphi'(\beta)} \\ &\qquad + \frac{(\gamma-\rho)(\gamma-\rho_1)^2(\gamma-\rho_2)^2}{f(\gamma)\varphi'(\gamma)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour tous les points de la courbe double, ρ, ρ_1 étant les deux racines communes aux équations (11), (12), on peut les permuter, ce qui donne une nouvelle équation qui, avec l'équation (35), définit la courbe double. En retranchant ces deux équations, on trouve

$$(36)\qquad \frac{(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)^2}{f(\alpha)\varphi'(\alpha)}+\ldots=0,$$

ou

$$(37)\qquad \frac{(S-\alpha T)E^2}{\alpha-\rho_1}+\frac{(S-\beta T)F^2}{\beta-\rho_1}+\frac{(S-\gamma T)G^2}{\gamma-\rho_1}=0.$$

Remplaçons S et T par leurs valeurs en E, F, G, et nous trouverons, après quelques réductions,

$$(38)\quad \frac{x_0^2}{(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)^2}+\frac{y_0^2}{(\beta-\rho_1)(\beta-\rho_2)^2}+\frac{z_0^2}{(\gamma-\rho_1)(\gamma-\rho_2)^2}=0.$$

Il y a plusieurs remarques à faire sur cette dernière équation, qui donne la relation entre ρ_1 et ρ_2, convenant à tous les points de la courbe double.

D'abord, elle est du second degré en ρ_1. Les deux racines sont les valeurs de ρ_1 et de ρ correspondantes à ρ_2; car tout est symétrique par rapport à ρ et ρ_1. On peut donc déduire les expressions de ρ, ρ_1, et par conséquent de celles de y, x ou de E, F, G en fonction de ρ_2, et ces expressions ne contiendront qu'un radical carré du huitième degré, ce qui prouve, conformément à la théorie générale, que la courbe plane représentative de la courbe double est du *genre* 3. La quantité Ω, sous le radical, se décompose en quatre facteurs du second degré; on peut l'écrire

$$(39)\qquad \Omega=\Pi\left(\pm\frac{x_0\sqrt{\beta-\gamma}}{\alpha-\rho_2}\pm\frac{y_0\sqrt{\gamma-\alpha}}{\beta-\rho_2}\pm\frac{z_0\sqrt{\alpha-\beta}}{\gamma-\rho_2}\right).$$

Ainsi, pour huit points de la courbe double, les deux points du plan qui représentent en général le point de cette courbe viennent se réunir. Les huit points sont, nous le verrons, situés deux à deux sur les quatre droites δ.

En second lieu, on peut déduire de l'équation (38) un mode de génération de la courbe plane, image de la courbe double.

Soit, en effet,

$$\rho_2^2-\rho_2 y+x=0$$

l'équation d'une tangente à la parabole (26) au paramètre ρ_2. Cette équation peut encore s'écrire, en vertu de l'équation (29),

$$(40) \qquad \frac{x_0 E}{\rho_2 - \alpha} + \frac{y_0 F}{\rho_2 - \beta} + \frac{z_0 G}{\rho_2 - \gamma} = 0;$$

soit en outre

$$(41) \quad S - \rho_1 T = 0 = (\alpha - \rho_1)E^2 + (\beta - \rho_1)F^2 + (\gamma - \rho_1)G^2 = 0$$

l'équation d'une conique au paramètre ρ_1, passant par les points fondamentaux. L'équation (28) est la condition de contact de la conique (41) et de la droite (40). Donc :

Si l'on mène une tangente quelconque à la parabole (26), *et que, par les quatre points fondamentaux, on fasse passer les deux coniques tangentes à la droite, les deux points de contact de ces coniques sont les deux points qui correspondent à un même point de la surface.*

Il résulte de ce mode de génération que :

La courbe plane correspondante à la courbe double sera du sixième ordre ; elle aura pour points doubles les quatre points fondamentaux, et, pour tangentes en ces points, les tangentes menées de ces points à la parabole ; elle aura, en outre, pour points doubles, les points E, F, G, *et pour tangentes en ces points les côtés du triangle* EFG.

Les deux points de contact d'une conique et de la droite ne se réuniront que lorsque la droite tangente à la parabole viendra passer en un des points fondamentaux, ce qui montre que les points de la surface correspondants seront deux à deux sur les quatre droites, correspondant aux quatre points fondamentaux. On vérifie en même temps que la courbe est bien du genre 3.

Il reste à trouver l'équation de la courbe. Pour cela, il faudra remplacer, dans l'équation (38), ρ_1, ρ_2 par leurs valeurs tirées des équations

$$\rho_1 + \rho_2 = y, \quad \rho_1\rho_2 = x;$$

seulement, l'équation (40), n'étant pas symétrique en ρ_1, ρ_2, contiendrait le radical $\sqrt{y^2 - 4x}$. Pour éviter ce radical, permutons-y ρ_1 et ρ_2, et faisons le produit des deux équations, ce qui donnera l'équation rationnelle de la courbe double [1]. On obtient ainsi

[1] Des faits de même genre se présentent toutes les fois qu'on change de coordon-

l'équation

$$(42) \qquad \frac{x_0(\beta-\gamma)}{E(S-\alpha T)}+\frac{y_0(\gamma-\alpha)}{F(S-\beta T)}+\frac{z_0(\alpha-\beta)}{G(S-\gamma T)}=0,$$

qui représente une courbe du sixième ordre ayant les propriétés que nous venons de signaler. Ainsi se trouve résolue la question de la correspondance entre les points de la surface et ceux du plan. La théorie générale permet maintenant de faire l'étude complète des courbes tracées sur la surface Σ.

On peut facilement, au moyen de l'équation précédente, prouver que la courbe double est l'intersection complète de la surface Σ et du cône des normales.

Car, si l'on désigne par P, P_1, P_2 les plans tangents aux trois surfaces homofocales passant en A, on aura

$$P=\sum\frac{xx'}{\alpha-a}=\frac{x_0\varphi'(\alpha)}{f(\alpha)}(\alpha T-S)E,$$

et des équations semblables pour P_1, P_2. L'équation (42) pourra donc s'écrire

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{P}+\frac{\varphi'(\beta)}{P_1}+\frac{\varphi'(\gamma)}{P_2}=0.$$

Sous cette forme, on voit facilement qu'elle représente le cône des normales ayant son sommet en A.

7. *Étude des courbes tracées sur la surface* Σ.

Nous avons déjà vu qu'à toute section plane de la surface correspond une courbe du troisième ordre, dont l'équation est

$$(43) \quad m(S-aT)A+nB(S-bT)+pC(S-cT)+qD(S-dT)=0.$$

Ces courbes se distinguent de toutes les autres courbes du troisième ordre, par la propriété suivante : elles coupent la courbe double en dix points, disposés par paires, correspondantes aux cinq points doubles de la section plane.

Les courbes passant par l'intersection de deux d'entre elles correspondent à une section plane passant par une droite. Comme on sait que, dans tout faisceau de courbes du troisième ordre, il y en a

---

nées. Par exemple, une équation en coordonnées rectilignes peut se décomposer quand on passe aux coordonnées polaires.

douze ayant un point double, on peut conclure que *la surface* Σ *est de la douzième classe*, comme la surface générale du troisième ordre.

Parmi les sections planes, on rencontre plusieurs séries remarquables, déjà étudiées en partie par la géométrie. Cherchons la section par l'un des plans polaires du point A,

$$\sum \frac{Xx'}{a-u} = 0.$$

En vertu de l'équation (23), cette section est représentée par la courbe

$$(\rho - u)(\rho_1 - u)(S - uT) = 0,$$

qui se compose : 1° d'une droite

$$(\rho - u)(\rho_1 - u) = 0, \tag{44}$$

à laquelle correspond dans la surface une courbe à point double du troisième ordre, la focale à nœud F; 2° d'une conique

$$S - uT = 0, \tag{45}$$

à laquelle correspond la conique, section d'une surface du second ordre par le plan polaire.

Si l'on dispose des coefficients m, n, p, q de telle manière que la courbe du troisième ordre ait un point double en l'un des points fondamentaux, le plan de section passera par la droite correspondante de la surface. Nous avons déjà vu que, par chaque droite, passent deux plans tangents de la développable Ψ, ou deux plans polaires de A :

$$\sum \frac{Xx'}{a-h} = 0, \quad \sum \frac{Xx'}{a-h'} = 0,$$

où h et h' sont racines de l'équation (34). L'équation générale des plans passant par la droite sera

$$\sum \frac{Xx'}{a-h} + \lambda \sum \frac{Xx'}{a-h'} = 0,$$

et les sections auront pour représentation

$$(h-\rho_1)(h-\rho_2)(S-hT) + \lambda(h'-\rho_1)(h'-\rho_2)(S-h'T) = 0. \tag{46}$$

On reconnaît sans peine que la courbe du troisième ordre ayant pour point double le point fondamental a, y est tangente aux deux branches de la courbe du sixième ordre. Par suite, les sections seront des courbes du quatrième ordre, à trois points doubles, tangentes à la droite δ, aux deux points a_1, a_2, où celle-ci est coupée par la courbe double. On doit remarquer les valeurs $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, pour lesquelles la courbe du quatrième ordre se décompose en deux coniques. Ainsi: *Les huit plans tangents à la développable* Ψ *passant par les droites* δ *coupent la surface suivant deux coniques et la droite correspondante.*

Soient a, a_1, a_2, a_3 les quatre points fondamentaux. Pour une valeur particulière de λ, la courbe du troisième ordre (46) acquiert un point triple, et se décompose en trois droites, aa_1, aa_2, aa_3. Dans ce cas, la section passe par le point a et la droite δ. Elle se compose: 1° de la droite δ, prise deux fois; 2° des trois focales des cônes circonscrits situées dans ce plan.

Des droites. — A toute courbe d'ordre m, tracée sur le plan, correspond une courbe d'ordre $3m - \alpha$ sur la surface, α désignant le nombre de fois que la première courbe passe par les points fondamentaux. Il en résulte que, si l'on désigne par a, a_1, a_2, a_3 les quatre points fondamentaux, les quatre côtés et les diagonales du quadrilatère donneront six droites nouvelles de la surface. Les six droites du plan passant par un des sommets du triangle conjugué, les droites correspondantes passeront par le point triple A de la surface. Ce sont les six focales déjà trouvées. Il n'y a pas d'autre droite sur Σ.

Des coniques. — Toutes les coniques de la surface correspondent soit aux coniques passant par les quatre points fondamentaux, soit aux droites passant par l'un des points. Deux coniques appartenant à des séries différentes se coupent en un point; deux coniques de la même série ne se rencontrent pas. Les plans de ces coniques sont des plans tangents doubles, distribués en cinq séries et enveloppant cinq développables de troisième classe. Il y a deux plans tangents communs aux quatre séries représentées par des droites et à la série représentée par des coniques, etc.

Des cubiques gauches. — Il y a aussi cinq séries de cubiques gauches correspondant: 1° aux droites quelconques du plan; 2° aux coniques quelconques passant par trois des points fondamentaux. Ces cubiques peuvent devenir planes, et elles complètent alors les sections de la surface par les plans des coniques. Deux cubiques appartenant à des séries différentes se coupent en deux points.

Des courbes du quatrième ordre. — Les courbes du quatrième ordre correspondent : 1° aux coniques passant par deux des points fondamentaux ; 2° aux courbes du troisième ordre ayant un point double en un des points fondamentaux : ce qui fait en tout dix séries de courbes du quatrième ordre. Ces courbes, étant rationnelles, ne se trouvent sur plusieurs surfaces du second ordre que si elles ont un point double, ce qui arrivera toutes les fois que la courbe qui les représente sur le plan passe par un couple de points conjugués de la courbe double.

De l'intersection de la surface avec une surface donnée. — Il est inutile de développer cette théorie, conséquence immédiate des travaux de M. Clebsch. Nous ferons cependant remarquer qu'il y a une série de surfaces du troisième ordre passant par la courbe double et coupant la surface suivant une courbe du cinquième ordre. Cette courbe du cinquième ordre est représentée par toute courbe du troisième ordre passant par les quatre points fondamentaux.

Considerons enfin l'intersection de Σ avec quelques surfaces remarquables :

1° Avec la développable Ψ :

Cette développable est définie par les équations

$$\rho = \rho_1 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho_2 \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \rho_2.$$

Les équations $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ donnent, en remplaçant ρ par $\frac{S}{T}$, l'équation

$$(47) \qquad (S - \rho_1 T)(S - \rho_2 T) = 0,$$

ou

$$(48) \qquad S^2 - yTS + T^2 x = 0,$$

qui représente une courbe du cinquième ordre ayant pour points doubles les quatre points fondamentaux. Cette courbe correspond, sur la surface, à la courbe lieu des points de contact des plans tangents doubles, plans polaires de A par rapport à toutes les surfaces homofocales. En tous ses points, Σ et Ψ sont tangentes, et elle est du septième ordre.

La courbe

$$\rho_1 = \rho_2$$

est la parabole

$$y^2 - 4x = 0,$$

qui correspond à une courbe du sixième ordre, tracée sur la surface.

2° Intersection de Σ avec la développable Π, circonscrite à toutes les surfaces homofocales.

Cette intersection se compose : 1° des quatre droites δ, suivant lesquelles les deux surfaces sont tangentes; 2° des trois focales et du ercle de l'infini, qui sont lignes doubles de la surface Π; 3° d'une courbe qu'on peut définir ainsi : c'est le lieu des points de contact des plans tangents menés par A à chaque surface, et contenant une des génératrices de la surface, qui vont rencontrer le cercle de l'infini. La représentation de cette courbe s'obtient sans difficulté; elle a pour équation

$$\frac{A}{x'}\sqrt{\frac{b-c}{(b-d)(c-d)}}\sqrt{S-aT}+\frac{B}{y'}\sqrt{\frac{c-a}{(c-d)(a-d)}}\sqrt{S-bT}$$
$$+\frac{C}{z'}\sqrt{\frac{a-b}{(c-d)(b-d)}}\sqrt{S-cT}=0.$$

Elle est du huitième ordre, et appartient à la classe des courbes appelées *polyzomales* par M. Cayley (¹). Elle a pour points doubles les quatre points fondamentaux, et correspond à une courbe du seizième ordre tracée sur la surface Σ. Cette courbe du seizième ordre complète, avec les quatre droites et les quatre coniques comptées chacune pour deux, la courbe du quarantième ordre, intersection de Σ et de Π.

La méthode précédente s'applique sans difficulté à la surface générale du cinquième ordre ayant une ligne double de même ordre, dont les sections planes sont représentées par des courbes du troisième ordre. Les résultats obtenus ne subissent pas de modification essentielle.

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 159.