BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 106-114
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__106_0>

Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace;

par M. A. MANNHEIM.

(Séance du 19 février 1873)

On s'est surtout occupé jusqu'à présent d'étudier le déplacement d'une droite sur un plan; on sait que, dans ce cas, à un instant quelconque du déplacement, les tangentes aux trajectoires de tous les points de la droite enveloppent une parabole, et que les centres de courbure de ces trajectoires appartiennent à une conique. On sait aussi qu'il existe, en général, deux points de la droite qui sont des points d'inflexion sur leurs trajectoires.

Je me propose maintenant d'étudier ce qui est relatif au déplacement d'une droite dans l'espace.

Les propriétés des trajectoires des points d'une droite mobile sont les propriétés d'une certaine série de courbes tracées sur la surface engendrée par cette droite. Ces courbes sont telles, que deux quelconques d'entre elles interceptent des segments égaux sur toutes les génératrices de cette surface. Elles peuvent être généralisées en considérant les courbes tracées sur une surface réglée, et qui déterminent des divisions homographiques sur toutes les génératrices de cette surface. Quelques-unes des propriétés des trajectoires des points d'une droite s'étendent immédiatement à ces courbes plus générales.

Désignons par D la droite mobile, et par (D) la surface réglée engendrée par cette droite. La génératrice D peut être amenée, d'une infinité de manières, à coïncider avec la génératrice D_1, qui lui est infiniment voisine; car un point a marqué sur D peut être assujetti à décrire sur (D), à partir de la position qu'il occupe, une infinité de courbes. A chacune des directions qu'on peut ainsi faire suivre à a correspond pour la droite D un axe instantané Δ qui est une droite conjuguée de D; excepté lorsque la trajectoire du point a est normale à D.

Considérons en particulier une trajectoire de a qui ne soit pas normale à D. A chaque instant du déplacement de D, nous aurons une droite telle que Δ. Ces droites appartiennent à une surface (Δ). Les droites entraînées en même temps que D, et qui deviennent successivement des axes instantanés, c'est-à-dire des génératrices de (Δ), appartiennent à une autre surface gauche. Il est facile de voir que cette dernière surface roule sur (Δ) pendant le déplacement continu de D, et qu'à chaque instant elle se raccorde avec (Δ).

A chacune des trajectoires de a correspond une autre surface telle que (Δ). Nous avons donc ce théorème connu :

THÉORÈME I. — *Une surface réglée peut être engendrée d'une infinité de* *manières par une de ses génératrices entraînée pendant le roulement d'une surface réglée sur une autre surface réglée. A chaque instant, ces deux dernières surfaces se raccordent suivant un axe instantané.*

Puisque a, pour un déplacement infiniment petit, tourne autour de Δ, la tangente à la trajectoire de ce point est perpendiculaire au plan (a, Δ). Cette tangente rencontre D et la génératrice D_1 infiniment voisine de D; elle rencontre donc deux droites et est parallèle à un plan perpendiculaire à Δ. Il en est de même des tangentes aux trajectoires de tous les points de D. Ces droites appartiennent donc à un paraboloïde hyperbolique. On voit donc que :

Théorème II. — *Les tangentes aux trajectoires de tous les points d'une droite* D *appartiennent à un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est perpendiculaire à la droite* Δ, *conjuguée de* D (*).

Après un premier déplacement infiniment petit de D, le point a est venu en a_1 sur D_1, et la droite aa_1 est une génératrice de ce paraboloïde. Après un nouveau déplacement infiniment petit, a_1 vient en a_2 sur D_2, et la droite $a_1 a_2$ est la génératrice d'un autre paraboloïde. Ces deux paraboloïdes ont en commun la droite D_1. Le plan (a, a_1, a_2), qui contient les droites aa_1, a_1a_2, est tangent à chacun de ces paraboloïdes. Ce plan n'est autre que le plan osculateur en a à la trajectoire de ce point. Les plans osculateurs des autres points de D étant tangents aux mêmes paraboloïdes, leur enveloppe est la surface développable circonscrite à deux paraboloïdes ayant une génératrice commune, c'est-à-dire une développable du quatrième ordre et de la troisième classe. Ainsi :

Théorème III. — *A un instant quelconque du déplacement d'une droite* D, *les plans osculateurs des trajectoires des points de cette droite enveloppent une surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe.*

Ce théorème est un cas particulier de celui qu'on obtient en prenant le corrélatif du théorème suivant :

Quand, autour de trois droites données dans l'espace, on fait tourner trois plans formant trois faisceaux homographiques, le point d'intersection de ces trois plans décrit une courbe gauche du troisième ordre (**).

Mais il est essentiel de remarquer que, dans le cas du déplacement d'une droite D, le plan osculateur, correspondant à la trajectoire du point qui est à l'infini sur cette droite, est lui-même à l'infini.

Nous avons déjà dit que la tangente aa_1 à la trajectoire de a est perpendiculaire au plan (a, Δ). Il en est de même pour tous les points de D, c'est-à-

(*) Voir, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, séance du 26 juin 1843, le mémoire de M. Chasles *Sur les propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.*

(**) Voir, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, séance du 10 août 1857, le mémoire de M. Chasles *Sur les propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre.*

dire que les plans normaux aux trajectoires des points de cette droite passent par Δ. Les plans passant par les points de D et par la droite Δ', qui doit devenir l'axe instantané, sont les plans qui, après un déplacement infiniment petit, seront normaux aux trajectoires des points de D. Nous avons ainsi deux faisceaux de plans dont les arêtes sont Δ et Δ'. Les plans de ces faisceaux passant respectivement par les mêmes points de D sont homographiques. Lorsque la droite Δ' viendra en Δ_1 en entraînant le faisceau dont elle est l'arête, les plans de ce faisceau, après ce déplacement, couperont alors les plans du faisceau dont Δ est l'arête, suivant les axes de courbure des trajectoires des points de D. Ces axes de courbure, résultant de l'intersection des plans de deux faisceaux homographiques, appartiennent à une surface du second ordre qui contient Δ et o_1, c'est-à-dire qui se raccorde avec la surface (o). De là ce théorème :

Théorème IV. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite, les axes de courbure des trajectoires de tous les points de cette droite appartiennent à une surface du second ordre* (*).

Je dis que cette surface du second ordre est un hyperboloïde. Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'en général il n'y a pas de point sur D pour lequel l'axe de courbure de sa trajectoire soit à l'infini; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point de D qui soit un point d'inflexion sur sa trajectoire. Démontrons d'abord cette propriété.

Si un point a de D était un point d'inflexion sur sa trajectoire, les deux positions successives et infiniment voisines de a, c'est-à-dire a_1 et a_2, appartiendraient avec a à une même droite. Nous avons dit que aa_1 était parallèle à un plan perpendiculaire à Δ, et que a_1a_2 était parallèle à un plan perpendiculaire à Δ_1 : la droite aa_1a_2, si elle existait, devrait donc être parallèle à l'intersection de ces deux plans; mais le plan mené par la droite commune à nos deux paraboloïdes, parallèlement à cette droite d'intersection de leurs plans directeurs, ne touche pas nécessairement ces deux paraboloïdes au même point a. Cela devrait être pour avoir en ligne droite les points a, a_1, a_2. Donc il n'existe pas de point a qui soit un point d'inflexion sur sa trajectoire. Ainsi :

Théorème V. — *En général, il n'y a pas sur une droite mobile un point qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire.*

Le raisonnement que nous venons d'employer n'est plus applicable lorsqu'il s'agit du déplacement d'une droite sur un plan.

Le théorème V peut encore se démontrer de la manière suivante : s'il existe un point a sur D qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire, ce point doit se déplacer dans la direction de l'asymptote de l'indicatrice de (D) en a. La tangente à la trajectoire de ce point est donc nécessairement parallèle

(*) Voir, dans le *Bulletin de la Société philomathique*, séance du 25 juin 1870, une note de M. Haag.

à l'une des génératrices du cône directeur de l'hyperboloïde osculateur de (D) suivant D. Nous venons de dire que la tangente à la trajectoire d'un point qui est point d'inflexion sur sa trajectoire est parallèle à l'intersection de deux certains plans. Comme nous pouvons disposer de ces plans de façon que leur droite d'intersection ne soit pas parallèle à l'une des génératrices du cône dont je viens de parler, nous voyons bien qu'alors il n'y aura pas de point sur D qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire.

Et si nous revenons à la surface du deuxième ordre, lieu des axes de courbure des trajectoires des points de D, nous pouvons dire que, ces axes étant à distance finie, *cette surface est un hyperboloïde.*

Cet hyperboloïde a pour cône directeur un cône du second ordre, dont les génératrices sont respectivement parallèles à ces axes de courbure et, par suite, perpendiculaires aux plans osculateurs des trajectoires des points de D. Il résulte de là que :

Théorème VI. — *Si, d'un point de l'espace, on mène des plans parallèles aux plans osculateurs des trajectoires de tous les points d'une droite, ces plans enveloppent un cône du second ordre;* ou, en d'autres termes, *la développable du quatrième ordre, qui est l'enveloppe des plans osculateurs des trajectoires de tous les points d'une droite, a un cône directeur qui est du second ordre.*

Examinons le cas particulier où un point de D est un point d'inflexion sur sa trajectoire.

L'axe de courbure correspondant à ce point est alors à l'infini, et l'hyperboloïde des axes de courbure des points de D devient un paraboloïde. Les axes de courbure appartenant maintenant à un paraboloïde sont parallèles à un même plan. Les plans osculateurs des trajectoires des points de D étant respectivement perpendiculaires à ces axes de courbure sont parallèles à une même droite ; ils enveloppent alors une surface cylindique. Ainsi :

Théorème VII. — *Si, à un instant quelconque du déplacement d'une droite, un point de cette droite est un point d'inflexion sur sa trajectoire, les plans osculateurs des trajectoires de tous les points de la droite mobile enveloppent une surface cylindrique.*

Cette circonstance se présente constamment si l'on assujettit un point d'une droite mobile à parcourir une ligne droite.

Lorsque deux points de la droite mobile sont points d'inflexion sur leurs trajectoires, il résulte de ce que nous venons de dire que les plans osculateurs des trajectoires de tous les points de la droite mobile sont parallèles entre eux. C'est ce qui arrive constamment lorsque deux points d'une droite décrivent deux droites données.

Il est facile de voir que, s'il y a sur la droite D plus de deux points qui soient points d'inflexion sur leurs trajectoires, tous les points de la droite D jouissent de la même propriété.

Occupons-nous maintenant des normales principales des trajectoires des points de D. Construisons la normale principale en a à la trajectoire de ce point Cette droite est dans le plan (a, Δ) qui est normal en a à cette trajectoire. Ce plan normal coupe l'hyperboloïde des axes de courbure suivant l'axe de courbure relatif à cette trajectoire ; la normale principale est donc la perpendiculaire abaissée du point a sur cette droite.

L'hyperboloïde des axes de courbure, comme nous l'avons fait remarquer, contient Δ. Il sera donc défini en supposant données deux droites du même système que Δ. Appelons G et H ces deux droites. Pour construire une normale principale, on opère alors ainsi : par Δ on mène un plan quelconque ; ce plan coupe D au point a, G au point g et H au point h ; du point a on abaisse la perpendiculaire ac sur gh : la droite ac est la normale principale en a, et le pied de cette perpendiculaire est le centre de courbure de la trajectoire de ce point. Lorsque le plan que nous venons de mener par Δ tourne autour de cette droite, la droite ac engendre la surface des normales principales des trajectoires des points de D, et le point c décrit la courbe lieu des centres de courbure de ces trajectoires.

Occupons-nous d'abord de la surface formée par les normales principales. Je dis que le cône directeur de cette surface est du troisième ordre.

Prenons un point quelconque l sur Δ, et construisons le cône directeur de l'hyperboloïde des axes de courbure de façon qu'il ait son sommet en l. Ce cône, qui est du second ordre, contient Δ, et tout plan mené par cette droite le coupe suivant une seule génératrice. La perpendiculaire à cette génératrice, située dans ce plan sécant et menée du point l, est parallèle à l'une des normales principales. Le lieu des perpendiculaires ainsi construites constitue le cône directeur de la surface des normales principales.

On voit déjà que tout plan mené par Δ coupe ce cône suivant une droite; mais Δ, étant perpendiculaire à deux génératrices de l'hyperboloïde des axes de courbure, est une génératrice double sur ce cône directeur. Le plan sécant mené par Δ renferme une droite et la ligne double Δ ; donc le cône directeur est du troisième ordre. Ainsi :

Théorème VIII. — *Le cône directeur de la surface des normales principales des trajectoires de tous les points d'une droite est un cône du troisième ordre qui a une génératrice double.*

Menons le plan (l, D), ce plan coupe ce cône directeur suivant trois droites. Ces trois droites sont les normales principales que l'on peut construire à partir du point l. Puisqu'à partir d'un point quelconque de Δ on peut construire trois normales principales, la droite Δ est une droite triple de la surface des normales principales. Tout plan mené par Δ coupant, en outre, cette surface suivant une droite, on voit alors qu'elle est du quatrième ordre. Ainsi :

Théorème IX. — *La surface formée par les normales principales des trajectoires de tous les points d'une droite est une surface du quatrième ordre qui possède une droite triple.*

L'intersection de cette surface avec l'hyperboloïde des axes de courbure est la courbe des centres de courbure. On voit ainsi immédiatement que cette courbe est du cinquième ordre.

Nous allons arriver autrement à ce résultat. Considérons le point c comme sommet d'un angle droit dont l'un des côtés s'appuie sur D et Δ, l'autre côté sur G et H. Le point c appartient alors à une surface du quatrième ordre, qui contient les quatre droites D, Δ, G, H ; car sur le côté gh de l'angle droit il y a deux points tels que c, et les points g, h font partie du lieu. Cette surface est donc du quatrième ordre, et, comme elle contient les trois droites Δ, G, H de l'hyperboloïde des axes de courbure, elle coupe cette surface suivant une courbe du cinquième ordre. Ainsi :

Théorème X. — *Le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite est une courbe du cinquième ordre.*

Cette courbe rencontre le plan de l'infini en cinq points, dont un, toujours réel, est le centre de courbure de la trajectoire du point qui est à l'infini sur D. Les quatre points restants sur le plan de l'infini doivent être imaginaires, puisque nous avons vu qu'en général il n'y a pas, sur une droite, de point qui soit point d'inflexion sur sa trajectoire. Ainsi, sur une droite quelconque, il y a quatre points imaginaires dont les trajectoires ont leurs centres de courbure à l'infini, et, par suite, dans un corps quelconque que l'on déplace, les points qui sont points d'inflexion sur leurs trajectoires appartiennent à une surface imaginaire du quatrième ordre. Si parmi ces points il y en a de réels, ils ne peuvent être que sur une ligne double de cette surface. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Théorème XI. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, les points de cette figure qui sont points d'inflexion sur leurs trajectoires appartiennent à une surface imaginaire du quatrième ordre, et, s'il existe des points réels de cette nature, ils sont sur une ligne double de cette surface.*

Remarquons que, s'il s'agit du mouvement d'un corps solide, les points dont nous nous occupons sont ceux pour lesquels l'accélération normale est nulle (*).

Reprenons notre droite mobile D et sa conjuguée Δ. Appelons toujours Δ' la droite qui, après un déplacement infiniment petit autour de Δ, deviendra le nouvel axe instantané Δ_1. Désignons par Δ'' la droite qui deviendra ensuite l'axe instantané Δ_2. Les plans passant par les points de D et par Δ', ainsi que les plans passant par les mêmes points de D et par Δ'' de-

(*) Voir, dans le 37e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, le mémoire de M. Resal *Sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide.*

viendront des plans normaux aux trajectoires de ces points lorsque Δ' et Δ'' seront venus en Δ_1 et Δ_2. Nous avons maintenant trois faisceaux dont les arêtes sont Δ, Δ', Δ'', et dont les plans passent par les points de D; ces faisceaux sont donc homographiques et ne cesseront pas d'être homographiques lorsque Δ' sera venu en Δ_1 et Δ'' en Δ_2. Nous aurons alors trois faisceaux homographiques dont les arêtes sont trois génératrices infiniment voisines de (Δ). Les plans correspondants se coupent en des points qui appartiennent à une cubique gauche.

Ces points, intersections de trois plans normaux infiniment voisins, sont les centres des sphères osculatrices des trajectoires des points de D. Nous pouvons donc dire :

Théorème XII. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite, les centres des sphères osculatrices des trajectoires de tous les points de cette droite sont sur une cubique gauche.*

On peut arriver à ce théorème en considérant les hyperboloïdes des axes de courbure des trajectoires des points de D pour deux instants infiniment rapprochés. Ces hyperboloïdes se coupent suivant Δ et la partie restante de leur intersection est la cubique gauche que nous venons de trouver.

Lorsque le centre de la sphère osculatrice d'une courbe est à l'infini, cette sphère se réduit à un plan qui n'est autre qu'un plan osculateur stationnaire. La cubique gauche dont nous venons de parler, rencontrant le plan de l'infini en trois points, on voit qu'il y a sur une droite trois points pour lesquels les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires. Nous énoncerons ainsi ce résultat :

Théorème XIII. — *Parmi les points d'une droite mobile, il y en a trois pour lesquels les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires.*

Il résulte de là que :

Théorème XIV. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, les points pour lesquels les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires sont sur une surface du troisième ordre.*

Ou, en employant le langage de la cinématique : *Dans un corps solide en mouvement, les points, pour lesquels la suraccélération binormale est nulle, sont sur une surface du troisième ordre.*

Les droites situées sur cette surface du troisième ordre sont telles, que les plans osculateurs des trajectoires de tous leurs points sont stationnaires, et comme il y a toujours une droite réelle sur une surface du troisième ordre, nous voyons que :

Théorème XV. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, il existe toujours une droite telle, que les plans osculateurs des trajectoires de tous ses points sont stationnaires.*

On peut remarquer aussi qu'une droite mobile sur laquelle il y a quatre points tels, que les plans osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires, est tout entière sur la surface du troisième ordre dont je viens de parler et, par suite, que les trajectoires de tous ses points possèdent aussi des plans osculateurs stationnaires.

On obtient immédiatement une pareille droite D en assujettissant quatre points de cette droite à rester sur quatre plans donnés. A un instant quelconque du déplacement de D, la trajectoire d'un point arbitraire pris sur cette droite aura un plan osculateur stationnaire, et, par suite, cette trajectoire sera plane.

Je dis de plus que cette courbe est une conique; pour le faire voir, supprimons l'un des plans sur lequel doit rester l'un des points de D. Cette droite D est alors telle, que trois de ses points restent sur trois plans donnés. Dans ces conditions, un point quelconque de la droite décrit une surface du second ordre (*).

Par suite, si la trajectoire de ce point est plane, elle est une section conique. Nous voyons donc que :

Théorème XVI. — *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une conique* (**).

Nous sommes arrivé à la cubique gauche, lieu des centres des sphères osculatrices, en prenant deux hyperboloïdes des axes de courbure.

Considérons un troisième hyperboloïde de même nature que ceux-ci et qui en est infiniment voisin. Les points de rencontre de cette surface avec la cubique gauche sont les centres des sphères osculatrices stationnaires. On a ainsi six points de rencontre : deux sur Δ et quatre autres. Les deux points sur Δ sont ceux pour lesquels l'hyperboloïde des axes de courbure est osculateur de la surface (Δ). Ils se distinguent donc des quatre autres et ils correspondent sur D à deux points qui se distinguent aussi parmi les six points de D pour lesquels on a des sphères osculatrices stationnaires. De là résultent les théorèmes suivants :

Théorème XVII. — *A chaque instant du déplacement continu d'une droite, il y a six points sur cette droite pour lesquels les sphères osculatrices de leurs trajectoires sont stationnaires.*

Théorème XVIII. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une figure de forme invariable, les points pour lesquels les sphères osculatrices de leurs trajectoires sont stationnaires appartiennent à un lieu qui se compose d'une surface du second ordre et d'une surface du quatrième ordre.*

Lorsque la droite mobile se déplace sur un plan, il n'y a plus à cher-

(*) Voir les *Développements de géométrie* de Ch. Dupin, et, dans le 14e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, un mémoire du même auteur.

(**) La droite mobile engendre une surface du quatrième ordre dont le cône directeur est de révolution.

cher de plans osculateurs stationnaires ou des sphères osculatrices stationnaires.

Mais on peut se demander combien il y a de points sur la droite pour lesquels les cercles osculateurs des trajectoires de ces points sont stationnaires, c'est-à-dire des points qui sont des sommets sur leurs trajectoires.

On arrive immédiatement à la solution de cette question, en faisant usage de cette propriété déjà énoncée précédemment : *Les centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite qui se déplace sur un plan sont sur une conique.*

En prenant deux coniques de la nature de celle-ci et infiniment voisines l'une de l'autre, on trouve que :

Théorème XIX. — *A un instant quelconque du déplacement continu d'une droite sur un plan, il y a quatre points de cette droite pour lesquels les cercles osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires;* ou, en d'autres termes, *qui sont des sommets sur leurs trajectoires.*

L'un de ces points se distingue des autres. C'est celui dont la trajectoire a pour centre de courbure le centre instantané de rotation qui est l'un des points de rencontre des deux coniques. Il résulte de là que :

Théorème XX. — *A un instant quelconque du déplacement d'une figure plane sur son plan, les points pour lesquels les cercles osculateurs de leurs trajectoires sont stationnaires appartiennent à un lieu qui se compose d'une droite et d'une ligne du troisième ordre.*