BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 122-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__122_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques; par M. FOURET.

(Séance du 5 mars 1873)

En s'aidant du principe de correspondance qu'il a imaginé, et qui l'a conduit à des résultats si merveilleux, M. Chasles est parvenu à démontrer géométriquement d'une manière fort simple ce théorème fondamental dans le théorie des courbes, à savoir que :

Deux courbes d'ordres p et p' ont toujours pp' points communs réels ou imaginaires.

Une première démonstration de ce théorème a fait l'objet d'une communication de M. Chasles à la séance de l'Académie des sciences du 30 septembre 1872 (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 736). Une seconde démonstration du même théorème a été donnée par l'illustre géomètre dans la séance du 20 janvier 1873 (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 126).

M'étant proposé d'appliquer les mêmes procédés de démonstration au théorème analogue relatif aux surfaces, je suis parvenu, en ce qui concerne la première démonstration de M. Chasles, à un résultat satisfaisant que je vais exposer ici en quelques mots.

THÉORÈME. — *Trois surfaces algébriques d'ordres p, p', p'' ont $pp'p''$ points communs réels ou imaginaires.*

Désignons par (S_p), $(S_{p'})$, $(S_{p''})$ ces trois surfaces, et soient I une droite et O un point situés d'une manière quelconque par rapport à ces surfaces.

Par la droite I, faisons passer un plan (A) quelconque. Ce plan coupe les surfaces (S_p), $(S_{p'})$ suivant deux courbes d'ordres p et p' qui ont pp' points communs, d'après le théorème rappelé ci-dessus et démontré par M. Chasles. En joignant le point O à chacun des points a, on obtient pp' droites qui coupent chacune $(S_{p''})$ en p'' points; de sorte que ces pp' droites déterminent $pp'p''$ points b sur $(S_{p''})$.

Par la droite I et chacun des points b, faisons passer un plan; nous obtenons de la sorte $pp'p''$ plans (B), qui correspondent au plan (A).

Inversement, par I menons un plan (B) quelconque. Il coupe $(S_{p''})$ suivant une courbe d'ordre p''. Prenons cette courbe pour directrice d'un cône ayant pour sommet le point O; puis considérons un second cône ayant également son sommet en O et s'appuyant sur la courbe d'intersection des surfaces (S_p), $(S_{p'})$. Ce second cône d'ordre pp' coupe le premier, qui est d'ordre p'', suivant $pp'p''$ arêtes : cela résulte immédiatement de ce que les sections de ces deux cônes par un même plan sont deux courbes respectivement d'ordres pp' et p'' qui ont $pp'p''$ points communs, ainsi qu'il a été dit précédemment.

Or les $pp'p''$ arêtes communes aux deux cônes déterminent, sur les surfaces (S_p), $(S_{p'})$, $pp'p''$ points communs à ces deux surfaces, et, en faisant passer un plan par la droite I et par chacun de ces points, on obtient $pp'p''$ plans (A) qui correspondent au plan (B).

Donc à un plan (B) correspondent $pp'p''$ plans (A), de même qu'à un plan (A) correspondent $pp'p''$ plans (B); par suite, il existe $2pp'p''$ plans (A) qui coïncident chacun avec un de leurs correspondants (B). Mais $pp'p''$ de ces plans se confondent avec le plan passant par la droite I et le point O, et n'appartiennent pas à des points communs aux trois surfaces; tandis que chacun des $pp'p''$ autres plans détermine sur l'intersection de (S_p) avec $(S_{p'})$ un point a et sur $(S_{p''})$ un point b qui, situés en ligne droite avec O, doivent nécessairement coïncider. Ce qui démontre le théorème.

Corollaire I. — *Un système de trois équations algébriques à trois inconnues de degrés p, p', p'', admet en général et au plus $pp'p''$ solutions.*

Ce théorème, qui est une extension toute naturelle de celui de Bezout relatif à un système de deux équations, résulte immédiatement du théorème que nous venons de démontrer, en faisant abstraction des points communs aux trois surfaces qui sont situés à l'infini et auxquels ne correspondent pas de solutions dans les équations.

Ce premier corollaire se complète d'ailleurs par le suivant :

Corollaire II. — *Considérons un système de trois équations à trois inconnues x, y, z, respectivement de degrés p, p', p'',*

$$(x^m, y^n, z^r)^p = 0, \quad (x^{m'}, y^{n'}, z^{r'})^{p'} = 0, \quad (x^{m''}, y^{n''}, z^{r''})^{p''} = 0,$$

dans lequel les degrés des puissances les plus élevées sont respectivement : pour x, m, m', m''; pour y, n, n', n''; pour z, r, r' r''. Un pareil système d'équations a un nombre de solutions égal à

$$pp'p'' - (p-m)(p'-m')(p''-m'') - (p-n)(p'-n')(p''-n'') \\ - (p-r)(p'-r')(p''-r'') - \omega,$$

ω désignant le nombre des points à l'infini communs aux trois surfaces représentées par les trois équations, et situés en dehors des axes de coordonnées.

Cela résulte de ce que, par suite de la forme des équations, les surfaces correspondantes ont respectivement $mm'm''$ nappes qui se croisent en un point situé à l'infini sur l'axe des x, $nn'n''$ nappes qui se croisent à l'infini sur l'axe des y, $rr'r''$ nappes qui se croisent à l'infini sur l'axe des z.

Remarques. — 1° Le théorème précédent n'est qu'une extension d'un théorème analogue relatif à un système de deux équations à deux inconnues et que M. Chasles a énoncé dans sa communication à l'Académie des sciences du 30 septembre 1872.

2° En suivant un procédé de démonstration analogue à celui que nous avons exposé dans cette note, et en nous appuyant sur quelques considérations que l'on peut qualifier d'hypergéométriques, nous sommes parvenu à démontrer par le raisonnement, et sans l'aide du calcul, le théorème de Bezout étendu à un nombre quelconque d'équations contenant un pareil nombre d'inconnues. Cette démonstration fera l'objet d'une communication subséquente.