BULLETIN DE LA S. M. F.

KOEHLER

Sur les réseaux de courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 124-129
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__124_1>

Sur les réseaux de courbes planes; par M. Kœhler.

(Séance du 5 mars 1873)

On sait par les travaux de Steiner et de M. Cremona que, dans un réseau d'ordre $n-1$, il y a en général $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ courbes à deux points doubles et $12(n-2)(n-3)$ courbes avec point de rebroussement. Mais ces nombres doivent être réduits lorsque les courbes du réseau ont en commun des points simples ou multiples. Je démontrerai à ce sujet le théorème suivant :

Tout point multiple commun, d'ordre p, diminue de $12p(p-1)$ *le nombre des courbes du réseau à point de rebroussement.*

M. Maximilien Curtze, professeur au gymnase de Thorn, a donné quelques indications sommaires sur cette question dans une des notes qui accompagnent sa traduction allemande de l'ouvrage de M. Cremona sur les courbes planes. Mais les résultats auxquels on arrive en suivant ses indications sont tout à fait en désaccord avec ceux que je vais présenter ici.

1. Je considère le réseau formé par les premières polaires de tous les points du plan relativement à une courbe fondamentale $U = 0$ d'ordre n. Les polaires à deux points doubles et les polaires à point de rebroussement correspondent respectivement aux points doubles et de rebroussement de la courbe de Steiner; cette courbe est, comme on sait, le lieu des points doubles de toutes les polaires coniques réductibles à un système de deux droites, ou encore le lieu des points dont les premières polaires ont un point double. Elle est de l'ordre $3(n-2)^2$ et de la classe $3(n-1)(n-2)$, lorsque U est dépourvue de points singuliers.

Si la courbe U possède un point multiple d'ordre p, son équation, mise sous la forme homogène, sera, en plaçant l'origine en ce point,

$$uz^{n-p} + vz^{n-p-1} + \ldots = 0,$$

les polynomes $u, v, \ldots$ étant homogènes en x et y, et des degrés $p, p+1, \ldots$; $u = 0$ donne le faisceau des p tangentes à l'origine. L'équation de la hessienne est, en désignant les dérivées secondes par des indices doubles,

$$H = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

et il est très-facile de voir que l'origine est un point multiple d'ordre $3p-4$, dont les tangentes sont représentées par

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ (n-p)u_1 & (n-p)u_2 & (n-p-1)u \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on retranche des éléments de la troisième colonne de ce déterminant ceux de la première multipliés par x et ceux de la seconde multipliés par y, on aura

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ (n-p)u_1 & (n-p)u_2 & -u \end{vmatrix} = 0,$$

et l'équation des $3p-4$ tangentes se réduit à $u(u_{12}^2 - u_{11}u_{22}) = 0$.

Le second facteur représente $2p-4$ tangentes qui ne sont pas communes aux courbes H et U; ce sont les rayons doubles de l'involution d'ordre $p-1$ formée par les faisceaux des tangentes à toutes les premières polaires de U.

Cela posé, les conditions pour qu'une courbe $F = 0$ ait un point de rebroussement sont

$$F_{23}^2 - F_{22}F_{33} = 0, \quad F_{13}^2 - F_{11}F_{33} = 0, \quad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0.$$

En calculant F_{23}, F_{22}, ..., pour la polaire $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = 0$ d'un point (x', y', z'), on obtient un groupe de trois équations dont j'écris la première, savoir :

$$(x'U_{123} + y'U_{223} + z'U_{233})^2 - (x'U_{122} + y'U_{222} + z'U_{223})(x'U_{133} + y'U_{233} + z'U_{333}) = 0.$$

L'élimination de (x', y', z') conduit à l'équation d'une courbe S d'ordre $4(n-3)$, dont les intersections avec la hessienne d'ordre $3(n-2)$ donnent les points de rebroussement des premières polaires. La fonction S est le covariant obtenu en remplaçant dans l'invariant S du quatrième ordre d'une forme cubique les coefficients de la forme par les troisièmes dérivées de U (Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung;* Crelle, t. 59) (*). L'expression de S peut s'écrire, en groupant convenablement les termes,

$$\begin{aligned}
S = {} & U_{123}^4 - 2U_{123}^2 U_{113} U_{223} + U_{113}^2 U_{223}^2 \\
& + U_{331}(3U_{123}U_{112}U_{223} - 2U_{221}U_{123}^2 + U_{123}U_{113}U_{222} - U_{113}U_{221}U_{223} - U_{111}U_{223}^2) \\
& + U_{332}(3U_{123}U_{221}U_{113} - 2U_{112}U_{123}^2 + U_{123}U_{223}U_{111} - U_{22}U_{112}U_{113} - U_{222}U_{113}^2) \\
& + U_{333}(U_{123}U_{221}U_{112} - U_{123}U_{111}U_{222} + U_{222}U_{112}U_{113} + U_{111}U_{221}U_{223} - U_{223}U_{112}^2 - U_{113}U_{221}^2) \\
& + U_{331}^2(U_{221}^2 - U_{112}U_{222}) + U_{332}^2(U_{112}^2 - U_{111}U_{221}) + U_{331}U_{332}(U_{111}U_{222} - U_{112}U_{221}).
\end{aligned}$$

Lorsque U est de la forme indiquée ci-dessus, on voit de suite que la plus haute puissance de z dans S est de l'ordre $4(n-p-1)$, de sorte que l'origine est un point multiple d'ordre $4(p-2)$ pour la courbe S. Pour obtenir l'équation des tangentes, il suffit de considérer les troisièmes dérivées du terme uz^{n-p}, c'est-à-dire de faire les substitutions suivantes

$$U_{111} = u_{111}z^{n-p}, \quad U_{112} = u_{112}z^{n-p}, \quad U_{113} = (n-p)u_{111}z^{n-p-1}, \ \ldots.$$

On obtient ainsi, abstraction faite du facteur $z^{4(n-p-1)}$,

$$\begin{aligned}
S = {} & (n-p)^4(u_{12}^2 - u_{11}u_{22})^2 \\
& + (n-p)^3(n-p-1)u_1(3u_{12}u_{22}u_{112} - 2u_{12}^2u_{221} + u_{11}u_{12}u_{222} - u_{11}u_{22}u_{221} - u_{22}^2u_{111}) \\
& + (n-p)^3(n-p-1)u_2(3u_{12}u_{11}u_{221} - 2u_{12}^2u_{112} + u_{22}u_{12}u_{111} - u_{22}u_{11}u_{112} - u_{11}^2u_{222}) \\
& + (n-p)^2(n-p-1)(n-p-2)u(u_{12}u_{112}u_{221} - u_{12}u_{111}u_{222} + u_{11}u_{112}u_{222} \\
& \qquad + u_{22}u_{221}u_{111} - u_{22}u_{112}^2 - u_{11}u_{221}^2) \\
& + (n-p)^2(n-p-1)^2[u_1^2(u_{221}^2 - u_{112}u_{222}) + u_2^2(u_{112}^2 - u_{221}u_{111}) \\
& \qquad + u_1u_2(u_{111}u_{222} - u_{112}u_{221})].
\end{aligned}$$

Si maintenant, dans la deuxième et la troisième ligne, on remplace u_1 par $xu_{11} + yu_{12}$, u_2 par $xu_{12} + yu_{22}$; si de plus on remarque que $u_{11} = xu_{111} + yu_{112}$, $u_{22} = xu_{221} + y_{222}$, $u_{12} = xu_{112} + yu_{22}$, on trouve, après quelques réductions

(*) Le moyen le plus simple de s'en assurer consiste à prendre la forme cubique sous sa forme canonique $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$; l'élimination de x, y, z entre $d^2x^2 - bcyz = 0$, $d^2y^2 - cazx = 0$, $d^2z^2 - abxy = 0$, conduit à l'invariant $S = dabc - d^4$.

faciles à apercevoir, l'expression $-2(n-p)^3(n-p-1)(u_{12}^2-u_{11}u_{22})^2$.

Le coefficient de u, dans la quatrième ligne, s'annule identiquement; enfin le dernier groupe de termes se réduit à

$$(n-p)^2(n-p-1)^2(u_{12}^2-u_{11}u_{22})^2.$$

Il résulte de là que les tangentes au point multiple de la courbe S sont comprises dans l'équation $(u_{12}^2-u_{11}u_{22})^2=0$. Ce sont précisément les tangentes de la hessienne qui ne sont pas communes à cette courbe et à la proposée, chacune d'elles étant comptée deux fois.

On conclut de là que le point multiple d'ordre p tient lieu de

$$12(p-1)(p-2)$$

points d'intersection des courbes H et S. Et, en effet, les $3p-4$ branches de H se subdivisent en deux groupes, l'un de p, l'autre de $2(p-2)$; le premier groupe donne $4p(p-2)$ points d'intersection à l'origine. Chacune des branches du second a 4 points infiniment voisins communs avec la branche correspondante de S, puisque la tangente de celle-ci est en réalité une tangente double dont les deux points de contact se sont réunis; de plus la branche de H doit être considérée comme coupant en un point chacune des $4(p-2)-2$ branches de S qui ne la touchent pas. On a, en définitive,

$$4p(p-2)+2(p-2)[4+4(p-2)-2]=12(p-1)(p-2).$$

En particulier, si U est une courbe du quatrième ordre avec un point triple à l'origine, la hessienne a un point quintuple; la courbe S se réduit à deux droites doubles, savoir : les rayons doubles de l'involution formée par les couples de tangentes des premières polaires, et elle rencontre la hessienne en 24 points confondus à l'origine.

Ainsi, lorsque la courbe U a un point multiple d'ordre p, le nombre des rebroussements de la courbe de Steiner se réduit à

$$12[(n-2)(n-3)-(p-1)(p-2)].$$

Comme on connaît l'ordre et la classe de cette courbe, on pourra déterminer par les formules de Plücker ses autres caractères, par exemple le nombre de ses points doubles, ou, ce qui revient au même, le nombre des polaires à deux points doubles.

Toutefois, il faut remarquer que le point multiple d'ordre p influe également sur l'ordre et sur la classe de la courbe de Steiner; l'ordre est diminué de $(p-2)(3p-2)$, et la classe de $(p-1)(3p-4)$ (*).

(*) Voir, à ce sujet, la traduction allemande de l'*Introduzione* de M. Cremona, addition à l'art. 88.

2. Si, au lieu de considérer un réseau de premières polaires, on considère un réseau général représenté par une équation de la forme

$$lA + mB + nC = 0,$$

A, B, C étant trois courbes d'ordre $n-1$, la recherche analytique de la courbe S est plus difficile; on a à éliminer l, m, n entre les trois équations suivantes du second degré :

$$(1) \begin{cases} (lA_{23} + mB_{23} + nC_{23})^2 = (lA_{22} + mB_{22} + nC_{22})(lA_{33} + mB_{33} + nC_{33}) \\ (lA_{31} + mB_{31} + nC_{31})^2 = (lA_{33} + mB_{33} + nC_{33})(lA_{11} + mB_{11} + nC_{11}) \\ (lA_{12} + mB_{12} + nC_{12})^2 = (lA_{11} + mB_{11} + nC_{11})(lA_{22} + mB_{22} + nC_{22}). \end{cases}$$

Le résultant de ce système n'est autre chose que l'invariant, désigné habituellement par Σ, du système suivant :

$$(2) \begin{cases} U = A_{11}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 + A_{33}\nu^2 + 2A_{23}\mu\nu + 2A_{31}\nu\lambda + 2A_{12}\lambda\mu = 0, \\ V = B_{11}\lambda^2 + B_{22}\mu^2 + B_{33}\nu^2 + 2B_{23}\mu\nu + 2B_{31}\nu\lambda + 2B_{12}\lambda\mu = 0, \\ W = C_{11}\lambda^2 + C_{22}\mu^2 + C_{33}\nu^2 + 2C_{23}\mu\nu + 2C_{31}\nu\lambda + 2C_{12}\lambda\mu = 0. \end{cases}$$

On sait, en effet, que $\Sigma = 0$ exprime la condition pour que la somme $lU + mV + nW$ soit un carré parfait; et, en formant les équations de condition, on trouve précisément le système (1). L'expression de Σ est si compliquée que son étude m'a paru impraticable ; l'extension à un réseau quelconque du théorème que j'ai donné plus haut n'est donc qu'une induction légitimée, il est vrai, par les analogies qui existent entre l'invariant Σ et l'invariant S de la forme cubique générale.

3. Applications à quelques cas particuliers.

1° Le réseau est du 4^me ordre ; les courbes ont 3 points doubles et 3 points simples communs.

La hessienne est alors du 9^me ordre ; elle se compose de 3 droites, côtés du triangle formé par les points doubles, et de 3 coniques passant respectivement par ces points et par 2 des points simples.

La courbe de Steiner est de l'ordre $3.3^2 - 3.7 = 6$, et de la classe $3(4.3) - 3.10 - 3.2 = 0$. Le nombre des points de rebroussement, qui est de 72 dans le cas du réseau le plus général, est diminué de 3.24 et se réduit à zéro, ce qui devait être. Les formules de Plücker montrent qu'il y a 15 points doubles ; ces 15 points ne correspondent pas seulement aux courbes du réseau à 3 points doubles, mais à celles qui ont un point double en un des points simples donnés.

Soient A, B, C les 3 points doubles communs, d, e, f les points simples. On a d'abord 3 courbes composées de 2 coniques, savoir : (ABCde)(ABCdf), (ABCed)(ABCef), (ABCfd)(ABCfe) ; puis 12 courbes à 3 points doubles, composées chacune d'une conique et de 2 droites, savoir : (ABCde, AB, Cf), (ABCde, AC, Bf), (ABCde, BC, Af), (ABCdf, AB, Ce), ...

Dans cet exemple, on pouvait prévoir *a priori* les résultats donnés par les formules générales ; il n'en est plus de même pour le suivant.

2° Le réseau est du 6^{me} ordre ; les courbes ont en commun 8 points doubles et un point simple.

La hessienne est du 15^{me} ordre.

Dans le cas général, la courbe de Steiner est du 75^{me} ordre, de la 90^{me} classe et a 240 rebroussements. Ici l'ordre se réduit à $75 - 7.8 = 19$; la classe se réduit à $90 - 8.10 - 2 = 8$. Le nombre des rebroussements est diminué de 8.24 et devient égal à 48. La formule de Plücker $m = n(n-1) - 2\delta - 3\rho$ donne, en faisant $m = 8$, $n = 19$ et $\rho = 48$, $\delta = 95$. Un de ces 95 points doubles répond à la courbe qui a un point double au point simple donné. Donc enfin, parmi les courbes du 6^{me} ordre passant par 8 points doubles et un point simple donné, il y en a 94 qui ont en tout 10 points doubles.

Remarque. — Dans ce qui précède, il faut entendre par courbe de Steiner du réseau le lieu des points qui *correspondent* à des courbes possédant un point double ; on sait qu'il est toujours possible d'établir d'une infinité de manières la correspondance entre les points du plan et les courbes d'un réseau.

Le problème que je viens de traiter se rattache à un sujet de recherches assez étendu sur lequel M. Salmon a le premier, je crois, appelé l'attention (*Higher plane Curves*, p. 33) ; c'est l'étude des relations géométriques existant entre les points doubles d'une courbe algébrique, lorsque le nombre de ces points (multiplié par 3) dépasse le nombre de conditions qui déterminent la courbe. La première et la plus simple des questions qui se présentent est relative à la courbe du 6^{me} ordre ; elle peut avoir jusqu'à 10 points doubles (exemple : l'enveloppe des cordes communes à une ellipse et son cercle osculateur), mais 9 de ces points suffisent à la déterminer. On est alors conduit à la question suivante, dont j'ai transmis dernièrement l'énoncé à M. Brisse :

Un système de courbes du 6^{me} ordre est assujetti à avoir 9 points doubles, 8 d'entre eux sont fixes ; quel lieu doit décrire le 9^{me} pour que la courbe ait un 10^{me} point double ?

J'ai trouvé que ce lieu était du 180^{me} ordre.

La nature de ce résultat peut faire prévoir quelle serait la difficulté du problème pour les courbes d'ordre supérieur au 6^{me}.