BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 21-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__21_0>

Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est a réciproque de la surface de Steiner; par M. Laguerre.

(Séance du 4 décembre 1872)

1. On dit qu'une surface S peut être représentée sur un plan P, lorsqu'à chaque point M de la surface correspond un point unique et bien déterminé du plan, et réciproquement lorsqu'à chaque point du plan correspond un point unique et bien déterminé de la surface.

Lorsque le point M de la surface décrit une courbe, le point m, qui lui correspond sur le plan, décrit une autre courbe qui est, pour ainsi dire, l'image de la première, et l'on comprend que les propriétés des courbes tracées sur la surface puissent se déduire de celles des courbes qui sont leurs images.

La projection stéréographique, qui constitue un des moyens que l'on peut employer pour représenter, dans le sens que je viens d'indiquer, la sphère sur le plan, a déjà depuis longtemps familiarisé les géomètres avec ces considérations qui permettent non-seulement de transporter à la sphère les propriétés descriptives et métriques des figures planes, mais encore, en sortant de la sphère, d'établir des propriétés importantes des figures dans l'espace.

Le but de cette note est d'appliquer la même méthode à l'étude d'une surface remarquable du troisième ordre, que j'ai déjà étudiée analytiquement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*).

2. Il est facile de voir qu'une surface quelconque du troisième ordre peut être représentée sur un plan.

Une telle surface contient en général 27 droites; soient D et D′ deux de ces droites qui ne sont pas dans un même plan.

Par un point M de la surface, on peut mener une droite unique et bien déterminée qui s'appuie sur D et D′, cette droite rencontrera un plan P arbitrairement choisi en un point bien déterminé m; réciproquement le point m étant donné, on ne pourra mener par ce point qu'une droite s'appuyant sur D et D′; cette droite rencontrera la surface du troisième ordre en deux points situés respectivement sur D et D′, et en un troisième point M distinct de ces points èt parfaitement déterminé.

On obtient ainsi, on le voit, une représentation de la surface sur le plan P; on aurait évidemment pu, dans le même but, employer au lieu des droites D et D′ une cubique gauche quelconque tracée sur la surface, car une

(*) *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner;* t. XI, 2e série, 1872.

des propriétés caractéristiques de cette courbe consiste en ce que, par chaque point de l'espace, on ne peut mener qu'une seule droite qui la rencontre en deux points (*).

3. Dans ce qui suit, je m'occuperai spécialement de la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre S qui contient les six arêtes d'un tétraèdre T.

En prenant ce tétraèdre pour tétraèdre de référence, on voit que l'équation d'une pareille surface est de la forme

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{u}=0.$$

La surface qui lui est réciproque (c'est-à-dire la surface qui est, par rapport à une surface du second degré, le lieu des pôles des plans qui lui sont tangents) est une surface du quatrième ordre; et cette nouvelle surface jouit de la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents, c'est donc la *surface* dite *de Steiner*.

On en conclut que, si l'on considère un cône circonscrit à S, et ayant pour sommet un point de cette surface, ce cône se compose de deux cônes du second degré ; la courbe de contact se décompose aussi en deux courbes distinctes qui sont évidemment des cubiques gauches.

4. Quand on étudie la représentation sur un plan de la surface S, on voit facilement que l'on peut effectuer la représentation de telle sorte qu'à toute courbe plane de S corresponde, sur le plan, une cubique passant par six points fixes (π) qui sont les sommets d'un quadrilatère complet Q, et qui correspondent d'ailleurs aux six arêtes du tétraèdre situé sur S.

Cela posé, soient A et B deux points de S, et a, b les points qui leur correspondent sur le plan ; soient de plus C le troisième point où la droite AB rencontre S, et c le point correspondant.

Toutes les sections planes de S, qui passent par A et B, passent également par le point C; les cubiques qui sont leurs images passent donc aussi toutes par le point c, d'où il suit que ce point est le *neuvième point* commun aux cubiques qui passent par les points a et b, et les six sommets du qnadrilatère Q.

Pour déterminer facilement ce neuvième point, supposons, pour un instant, que les points a et b soient les ombilics du plan, c'est-à-dire les points de l'infini où se croisent tous les cercles de ce plan. Si l'on met de côté un

(*) Sur la représentation sur un plan d'une surface du troisième ordre, voir le beau mémoire de M. Cremona *Sur les surfaces du troisième ordre*, et la *Géométrie de situation* de M. Reye, p. 172 et 299.

M. Cremona a aussi publié (*Comptes rendus de l'Institut lombard*, 1867) un mémoire sur la représentation sur un plan de la surface de Steiner, mais je n'ai pu en prendre connaissance.

des côtés du quadrilatère Q, les trois autres côtés déterminent un triangle, et le cercle circonscrit à ce triangle constitue, avec le côté dont j'ai parlé, une cubique passant par les huit points a, b et (π); ce cercle passe donc par le neuvième point.

D'où cette proposition: « En prenant, trois à trois, les quatre côtés d'un quadrilatère complet, on détermine quatre triangles; les cercles circonscrits à ces triangles se coupent en un même point O, qui est le neuvième point commun aux cubiques qui passent par les ombilics du plan et les six sommets du quadrilatère. »

Imaginons la parabole inscrite dans ce quadrilatère, les quatre triangles dont je viens de parler lui sont circonscrits, et l'on sait que le cercle circonscrit à un triangle, circonscrit lui-même à une parabole, passe par le foyer de cette courbe.

Le point O est donc le foyer de cette parabole, ou encore le point de rencontre des tangentes qu'on peut lui mener par les ombilics.

5. Revenant maintenant au cas général, nous voyons que pour construire le neuvième point commun aux courbes du troisième ordre, qui passent par les six sommets d'un quadrilatère complet et deux points donnés a et b, il suffit d'inscrire dans le quadrilatère une conique tangente à ab, et par les points a et b de mener des tangentes à cette courbe; le point d'intersection de ces droites est le point cherché.

En d'autres termes, *si trois points* A, B *et* C *de la surface* S *sont en ligne droite, leurs images a, b et c sur le plan forment un triangle dans lequel on peut inscrire une conique inscrite dans le quadrilatère* Q.

Pour abréger, j'appellerai simplement *coniques du faisceau* les coniques inscrites dans le quadrilatère Q.

6. Considérons une droite tangente au point A à la suface S, ou, si l'on veut, passant par le point A et le point infiniment voisin A′; si l'on désigne par a et a' les images des points A et A′, on voit que, pour obtenir l'image du troisième point où la tangente rencontre la surface, il suffit de construire une conique du faisceau tangente à aa', et de mener par a la seconde tangente à cette conique, le point de contact b de cette tangente est l'image du point cherché.

D'où les conséquences suivantes :

1° *Le plan mené au point* A, *tangentiellement à* S, *coupe cette surface suivant une courbe du troisième ordre à point double, lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point a aux coniques du faisceau.*

2° *Les lignes asymptotiques de la surface* S *ont pour images les coniques du faisceau.*

En effet, soit t une tangente à l'une de ces coniques et touchant cette courbe au point a, le point de contact de la deuxième tangente, qu'on peut mener du point a à la conique se confond avec le point lui-même, la proposition est donc démontrée (*).

3° *Si l'on circonscrit à la surface les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* A *de cette surface, les deux cubiques de contact ont pour images les tangentes aux deux coniques du réseau qui se croisent au point* a.

7. Soit z une conique du réseau représentant l'asymptotique Z de la surface S et M un point de cette asymptotique; il est le sommet de deux cônes du second degré circonscrits à S et qui la touchent suivant deux cubiques gauches dont l'une est représentée par la tangente menée en m à la cubique z; je dirai que cette cubique *appartient* à l'asymptotique Z, en sorte que l'ensemble des cubiques appartenant à cette courbe sera représenté par l'ensemble des droites tangentes à z.

En se reportant au n° 7, on déduira facilement de cette définition la proposition suivante :

La surface développable, qui a pour arête de rebroussement une cubique appartenant à une asymptotique Z, *coupe la surface suivant cette asymptotique.*

D'où encore :

Si l'on circonscrit à S *les deux cônes du second degré qui ont pour sommet un point* M *de cette surface, les surfaces développables dont les courbes de contact sont les arêtes de rebroussement coupent* S *suivant les asymptotiques qui se croisent au point* M.

8. Soit une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z et A l'un de ses points; joignons A à un autre point quelconque B de la cubique, la droite ainsi obtenue rencontre S en un point C dont il est facile d'avoir l'image.

En effet, a et b étant les images des points A et B et c l'image du point C, il suffit (n° 5) pour construire le point c, de considérer la conique z qui est tangente à ab et de mener par les points a et b deux tangentes à cette courbe; le point d'intersection des ces deux droites, qui est le point c, est nécessairement sur la tangente menée par le point a; d'où cette conséquence importante :

Étant donnée une cubique quelconque appartenant à l'asymptotique Z, *si l'on imagine un cône quelconque du second degré contenant cette cubique, il coupe la surface* S *suivant une seconde cubique qui appartient également à l'asymptotique* Z;

(*) Clebsch a le premier trouvé les asymptotiques de la surface de Steiner dont on déduit, par réciprocité, les asymptotiques de la surface donnée.

M. Darboux (*Bulletin des sciences mathématiques*, t. I, p. 355) a, d'une façon plus générale, déterminé les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'équation

$$Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0.$$

Ou autrement :

Deux cubiques appartenant à la même asymptotique sont situées sur un même cône du second degré, ayant pour sommet le point d'intersection de ces courbes qui est distinct des sommets du tétraèdre fondamental T.

9. Lemme. — *Quand un tétraèdre est inscrit dans une cubique gauche, toute corde de la cubique coupe les faces du tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient maintenant deux cubiques quelconques appartenant à une asymptotique Z ; ces deux cubiques sont toutes deux circonscrites au tétraèdre T et sont situées sur un même cône du second degré, elles ont donc une infinité de cordes communes; on déduit, de là et du lemme précédent, la proposition suivante :

Les cordes de toutes les cubiques appartenant à l'asymptotique Z *coupent les faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Leur ensemble constitue ainsi le complexe remarquable du second ordre étudié par MM. Chasles, Reye, Lie, Darboux (*).

En particulier, les tangentes aux cubiques font partie du complexe ainsi que les tangentes à l'asymptotique Z qui est l'enveloppe de ces cubiques. Par suite :

Les tangentes à une asymptotique Z *rencontrent les quatre faces du tétraèdre* T *en quatre points dont le rapport anharmonique est une quantité constante* ζ, *et le complexe* (Z) *des droites, qui sont partagées dans le même rapport par les faces du tétraèdre, se compose des cordes des cubiques appartenant à cette asymptotique* (**).

On déduit encore de ce qui précède les propositions suivantes :

Étant données deux cubiques gauches situées sur un même cône du second ordre, ces deux cubiques se coupent en quatre points A, B, C *et* D *distincts du sommet du cône ; cela posé, les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, se coupent suivant une courbe du dixième ordre et une courbe* K *du sixième ordre et de quatrième classe ; cette courbe* K, *les deux cubiques gauches et les six arêtes du tétraèdre* ABCD *sont situées sur une même surface du troisième ordre dont* K *est une asymptotique.*

Le cône du complexe ayant pour sommet un point donné de la surface S *est le cône du second degré qui contient les deux cubiques appartenant à l'asymptotique* Z *et se croisant en ce point.*

Tous les cônes circonscrits à S *et ayant leur sommet sur* Z *sont des cônes du complexe.*

10. Une droite quelconque de l'espace, rencontrant la surface fondamen-

(*) Voir notamment Reye, *Geometrie der Lage*, t. II, p. 126 et 299.

(**) Cf. Sophus Lie, *Ueber Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen;* Math. Ann., t. V.

tale S aux points A, B et C, peut être représentée par le triangle *abc*, dont les sommets sont les images des points A, B et C.

Une droite de l'espace aura donc pour image un triangle circonscriptible à une conique du faisceau.

En particulier, toutes les droites du complexe (Z) ont pour images les divers triangles que l'on peut circonscrire à la conique z.

Soient *abc* l'un de ces triangles et α, β, γ les points où z est respectivement touchée par les côtés *bc*, *ca*, *ab*. Le plan mené par A tangentiellement à S coupe cette surface (n° 6, 1°) suivant une cubique à point double qui a pour image le lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener du point *a* aux coniques du faisceau; cette courbe, et par suite le plan tangent, passe donc par les points de l'asymptotique qui ont leur image en β et γ; on démontrerait de même que les plans menés en B et C, tangentiellement à S, passent respectivement par les points de l'asymptotique dont les images sont γ, α et α, β.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si on coupe la surface S *par une droite quelconque du complexe* (Z), *les plans tangents, menés à la surface aux trois points de rencontre, forment un trièdre dont les trois arêtes rencontrent* Z.

Autrement :

Si les trois faces d'un trièdre circonscrit à la surface S *la touchent en trois points situés en ligne droite, des neuf points d'intersection des arêtes du trièdre avec la surface, il y en a trois qui sont situés sur une même asymptotique.*

Réciproquement :

Un triangle quelconque étant inscrit dans une asymptotique Z, *on peut toujours construire un trièdre dont les faces passent par les côtés de ce triangle et qui touchent la surface en trois points situés en ligne droite. Cette droite appartient au complexe* (Z).

11. Soit K une conique quelconque située dans le plan sur lequel on fait l'image de la surface; on peut construire deux coniques du faisceau C et C′ telles qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire des triangles inscrits dans K.

L'ensemble des triangles circonscrits à C représente un système de droites s'appuyant sur K en trois points; K est donc l'intersection de S par une surface réglée V. Comme, d'ailleurs, la même courbe est l'intersection de S par les droites dont l'image est formée par les triangles circonscrits à C′, on voit que la surface V admet deux systèmes de génératrices rectilignes; c'est par conséquent une surface du second ordre qui, d'ailleurs, passe par les quatre sommets du tétraèdre T.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Toute conique du plan est l'image d'une courbe du sixième ordre, inter-

section de S *et d'une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T ;

Et réciproquement :

Si l'on coupe la surface S *par une surface du second ordre passant par les sommets du tétraèdre* T, *la courbe d'intersection a pour image une conique.*

12. En particulier une asymptotique Z de la surface est située sur une surface du second ordre qui admet deux systèmes de génératrices rectilignes (G) et (G′).

Si l'on applique aux points de rencontre de la courbe et de ces droites la dernière proposition du n° 10, on obtient les théorèmes suivants :

Par chaque génératrice G, *on peut mener quatre plans tangents à la surface ; des quatre points de contact trois sont sur une même ligne droite* D, *qui appartient au complexe* (Z) *et qui engendre une surface du second ordre* (A) *coupant* S *suivant une courbe* A ; *le quatrième point de contact décrit une courbe* A′.

Par chaque génératrice G′, *on peut mener quatre plans tangents à la surface; un des points de contact est situé sur la courbe* A, *les trois autres sont sur une ligne droite* D′ *qui engendre la surface du second ordre* (A′) *qui contient la courbe* A′.

On déduit de là que *la surface développable circonscrite à* S *et à la surface du second ordre qui contient l'asymptotique* Z *se décompose en deux surfaces du quatrième ordre touchant* S *le long des courbes* A *et* A′.

13. Les beaux théorèmes de Poncelet sur les polygones circonscrits à une conique, tandis que leurs sommets décrivent d'autres coniques, conduisent à plusieurs propriétés intéressantes de la surface S, relativement surtout aux diverses surfaces réglées que l'on peut faire passer par des courbes tracées sur ces surfaces ; je reviendrai plus tard sur ce sujet qui, pour être convenablement traité, exige une étude préalable du théorème de Poncelet lui-même.