BULLETIN DE LA S. M. F.

CAMILLE JORDAN

Questions de probabilités

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 256-258
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__256_1>

Questions de probabilités; par M. Camille Jordan.

(Séance du 28 mai 1873)

Problème. — *Une droite de longueur l est partagée en m segments. Quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une quantité donnée a ?*

Cherchons d'abord la probabilité X_n pour que les n premiers segments soient $> a$.

Elle sera évidemment nulle si $na > l$. Supposons au contraire $na < l$, et considérons un mode quelconque de section de la droite satisfaisant à la condition cherchée. Soient $a + \alpha_1, \ldots, a + \alpha_n, b, c, \ldots$, les m segments. A ce mode de section on pourra faire correspondre le suivant $na + \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b, c, \ldots$, où le premier segment est $> na$ et les autres quelconques. On pourra donc, sans altérer la probabilité cherchée, remplacer la condition à satisfaire par celle que le premier segment soit $> na$. Cette dernière condition suppose que chacun des $m - 1$ points de section se trouve dans la portion de la droite de longueur $l - na$ située vers son extrémité. La probabilité de cet événement sera $\frac{l - na}{l}$ pour chacun de ces points et la probabilité composée sera $X_n = \left(\frac{l - na}{l}\right)^{m-1}$. Nous répétons, comme on le voit, le raisonnement de M. Halphen.

Cherchons maintenant la probabilité C_n pour que n segments, fixés d'avance par une personne étrangère à l'insu de celui qui fait la section, soient tous $> a$.

Il est clair que la probabilité sera la même et égale à X_n quels que soient les segments choisis. Or ils peuvent avoir été choisis de $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}$ manières différentes. On aura donc $C_n = 0$, si $na > l$, $C_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(\frac{l - na}{l}\right)^{m-1}$, si $na < l$.

Cela posé, il résulte des formules générales que nous avons données dans les *Comptes rendus* (9 décembre 1867), que la probabilité B_r pour que r segments *au moins* soient $> a$ est donnée par la formule

$$B_r = C_r - \frac{r}{1} C_{r+1} + \frac{r(r+1)}{1.2} C_{r+2} - \ldots \pm \frac{r(r+1)\ldots m}{1.2\ldots(m-r+1)} C_m,$$

et que la probabilité A_r pour qu'on ait *juste* r segments satisfaisant à ces conditions sera

$$A_r = B_r - B_{r+1} = C_r - \frac{r+1}{1} C_{r+1} + \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} C_{r+2} - \dots$$

PROBLÈME. — *Trouver la probabilité pour que quatre points pris au hasard sur une sphère forment un quadrilatère sphérique convexe.*

Soient A B, C trois de ces points. Les arcs de grand cercle qui les joignent deux à deux découpent la sphère en huit triangles. Si l'on associe ensemble les triangles qui ne se touchent que par un sommet, on aura deux régions formées chacune de quatre triangles, et qui seront symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de la sphère.

Cela posé, soit D le quatrième point donné. On voit immédiatement que le quadrilatère ABCD sera convexe ou non, suivant que D sera contenu dans l'une ou l'autre région. Donc la probabilité pour qu'il soit convexe est égale à $\frac{1}{2}$, quelle que soit la position des points A, B, C.

PROBLÈME. — *On prend au hasard trois points* A, B, C *dans l'intérieur d'une courbe fermée* K *possédant un centre* O. *Quelle est la probabilité pour que* O *tombe dans l'intérieur du triangle* ABC?

Soit m un nombre très-grand. Par le point O nous mènerons m diamètres choisis de manière à diviser l'aire intérieure en $2m$ secteurs élémentaires équivalents. Numérotons-les dans l'ordre où les rencontre un observateur tournant autour du point O, et considérons comme premier secteur celui qui contient le point A. Supposons que le point B soit dans le $n+1^{\text{ième}}$ secteur. On peut admettre que $n < m$. En effet, si l'on avait $n > m$, il suffirait de changer le sens de la numérotation; le point B se trouverait alors dans le $n'+1^{\text{ième}}$ secteur, n' étant égal à $2m - n$ et par suite $< m$.

D'ailleurs la probabilité pour que B tombe dans le premier secteur ou dans le $m+1^{\text{ième}}$ peut être négligée comme infiniment petite. Nous admettrons donc que n peut prendre seulement les valeurs de 1 à $m-1$. Mais toutes ces valeurs sont également probables, les secteurs correspondants dans lesquels B peut tomber étant équivalents. La chance que B tombe dans le $n+1^{\text{ième}}$ secteur sera donc $\frac{1}{m-1}$.

Cela posé, pour que le point O tombe dans l'intérieur du triangle ABC, il faut et il suffit que C soit dans le secteur formé par la courbe et les prolongements OA′, OB′ des rayons vecteurs OA, OB. Soient s l'aire de ce secteur, S celle de la courbe entière; la probabilité pour que O tombe dans le triangle ABC sera $\frac{s}{S}$. Mais soit α l'aire d'un secteur élémentaire; on aura $S = 2m\alpha$. D'autre part, en vertu de la symétrie de la courbe, le secteur compris entre les rayons OA′ et OB′ sera égal au secteur compris entre les rayons OA et OB; ce dernier contient une portion du premier et du $n+1^{\text{ième}}$ secteur élémentaire et la totalité des $n-1$ secteurs intermédiaires; son aire s est donc sensiblement égale à $n\alpha$.

Donc la chance pour que B tombe dans le $n+1^{\text{ième}}$ secteur et que ABC contienne O dans son intérieur sera sensiblement égale à la probabilité composée $\frac{1}{m-1}\frac{n\alpha}{2m\alpha}=\frac{n}{2m(m-1)}$. Faisons la somme de ces probabilités élémentaires pour toutes les valeurs de n, de 1 à $m-1$; on aura, pour la probabilité totale que ABC contient O,

$$\frac{1}{2m(m-1)}[1+\ldots+(m-1)]=\frac{1}{4}.$$