LAGUERRE

Sur quelques théorèmes d'arithmétique

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 77-81
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__77_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur quelques théorèmes d'arithmétique; par M. LAGUERRE.

(Séance du 22 janvier 1873)

1. On connaît la proposition suivante : « $\varphi(m)$ désignant combien il y a de nombres premiers à m et non supérieurs à m, on a

$$m = \varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots,$$

d, d', d'' désignant la suite des diviseurs de m, parmi lesquels figurent 1 et m lui-même (*). »

Cette proposition peut se généraliser ainsi qu'il suit :

Désignons en général par $\left(m, \frac{m}{k}\right)$, où m désigne un nombre entier et k une quantité réelle quelconque commensurable ou incommensurable, le nombre des entiers premiers avec m et non supérieurs à $\frac{m}{k}$; on voit que, si $k = 1$, on a $(m, m) = \varphi(m)$.

(*) Voy. SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 13.

Cela posé, je dis que l'on a, m désignant un nombre entier et $\left(\frac{m}{k}\right)$ la partie entière du quotient $\frac{m}{k}$,

$$(1) \qquad \left(\frac{m}{k}\right) = \left(1, \frac{1}{k}\right) + \left(d, \frac{d}{k}\right) + \left(d', \frac{d'}{k}\right) + \ldots + \left(m, \frac{m}{k}\right),$$

la somme contenue dans le second membre s'étendant à tous les diviseurs $1, d, d', \ldots, m$ du nombre m.

Pour le démontrer, je vais faire voir que si la proposition est vraie pour une valeur quelconque de k, elle est vraie pour toute autre valeur.

Soit k_0 la valeur de k pour laquelle la formule est supposée vérifiée; concevons, par exemple, que k_0 diminue d'une façon continue, le premier membre de la relation (1) ne pourra changer que si k passe par une valeur qui donne à $\frac{m}{k}$ une valeur entière; dans ce passage, $\left(\frac{m}{k}\right)$ augmentera d'une unité; le second membre ne peut changer que si l'une ou plusieurs des quantités $\frac{d}{k}$ acquièrent une valeur entière, et, comme alors $\frac{m}{k}$ a aussi une valeur entière, puisque m est un multiple de d, on voit que la solution de la question consiste à examiner ce qui se passe quand $\frac{m}{k}$ est un entier.

Or, quand $\frac{m}{k}$ est un entier, il peut se faire qu'un certain nombre d'expressions de la forme $\frac{d}{k}$ soient aussi des entiers; supposons-les rangées par ordre décroissant de grandeur, en sorte qu'elles forment la série

$$\frac{m}{k}, \frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \ldots, \frac{\mu}{k},$$

$\frac{\mu}{k}$ désignant la plus petite de ces fractions (il est clair d'ailleurs que μ peut être égal à m).

Cela posé, $\frac{\mu}{k}$ est nécessairement premier avec μ; car, si α désignait un diviseur commun, $\frac{\mu}{\alpha}$ et $\frac{\frac{\mu}{\alpha}}{k}$ seraient des nombres entiers et $\frac{\mu}{k}$ ne serait pas le dernier terme de la série. Il n'en est pas de même relativement aux termes précédents; en effet, si l'on pose $\frac{\mu}{k} = e$, μ et e étant premiers entre eux, on en déduit $\left(\frac{m'}{k}\right.$ désignant un quelconque des termes qui précèdent $\left(\mu, \frac{\mu}{k}\right)$ $e' = \frac{m'}{k} = \frac{m'e}{\mu}$, d'où $\frac{e'}{m'} = \frac{e}{\mu}$; et, comme la fraction $\frac{e}{\mu}$ est irréductible, on en conclut que e' et m' sont respectivement des multiples de e et de m et ont par conséquent un facteur commun.

2. Voyons maintenant quels changements subit le second membre quand $\frac{m}{k}$ prend une valeur entière.

Les différentes expressions telles que $\left(m', \frac{m'}{k}\right)$ ne changent pas de valeur; la série des nombres non supérieurs à $\frac{m'}{k}$ renferme en plus, il est vrai, le nombre e'; mais, comme il n'est pas premier avec m', la somme n'est pas changée; l'expression $\left(\mu, \frac{\mu}{k}\right)$ seule change, et augmente précisément d'une unité, puisque μ et $\frac{\mu}{k}$ sont premiers entre eux.

La proposition est donc vraie, si elle est vraie pour une valeur quelconque de k; et comme elle l'est évidemment pour une valeur de k supérieure à m, puisque les deux termes de la relation (1) se réduisent à zéro, elle est démontrée.

3. Je veux maintenant tirer de la relation $m = \Sigma\varphi(d)$, que j'ai rappelée au commencement de cette note, et dont je viens de donner une nouvelle démonstration indépendante de la formule qui exprime $\varphi(m)$ au moyen de ses facteurs premiers (*), une démonstration de cette formule elle-même.

M. Dedekind (*Théorie des nombres* de Dirichlet, p. 394) a, il est vrai, donné un théorème remarquable qui permet de résoudre cette question.

Ce théorème s'énonce ainsi qu'il suit : « $\lambda(n)$ désignant un nombre égal à 0, si n est divisible par un carré, dans le cas contraire, égal à ± 1 suivant que le nombre des facteurs de n est pair ou impair, si deux fonctions $f(m)$ et $\varphi(m)$ sont liées par la relation suivante

$$f(m) = \Sigma\psi(d), \tag{2}$$

où, dans le second membre, la sommation s'étend à tous les diviseurs du nombre entier m, on a réciproquement

$$\psi(m) = \Sigma\lambda\left(\frac{m}{d}\right)f(d), \tag{3}$$

la sommation s'étendant également à tous les diviseurs de m. »

De la formule (3), on déduit facilement l'expression connue de $\varphi(m)$,

(*) On connaît d'autres démonstrations indépendantes également de cette formule; voir, notamment, Dirichlet, *Théorie des nombres*, p. 25.

mais il est à remarquer que la démonstration de cette formule indiquée par M. Dedekind s'appuie précisement sur cette expression; pour éviter un cercle vicieux, il faudrait donc établir directement la relation (3), ce qui serait du reste facile en développant les considérations qui suivent.

4. Pour obtenir l'expression de $\varphi(m)$, je considérerai une série de la forme

$$f(1)\frac{x}{1-x}+f(2)\frac{x^2}{1-x^2}+f(3)\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots.$$

Soit

$$\theta(1)x+\theta(2)x^2+\theta(3)x^3+\ldots$$

son développement effectué suivant les puissances croissantes de x; il est clair que les coefficients d'une des séries déterminent ceux de l'autre, en particulier on a évidemment

$$\theta(m)=\Sigma f(d),$$

la sommation s'étendant à tous les diviseurs du nombre entier m.

Supposons en particulier la fonction f tellement choisie que, m étant décomposé en facteurs premiers, en sorte que $m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$, on ait $f(m)=f(a^\alpha)f(b^\beta)\ldots$. La fonction f reste du reste arbitraire; ainsi $f(a^\alpha)$ et $f(a^{\alpha'})$ peuvent n'avoir aucune relation entre elles, si α et α' sont différents ; il en est de même de $f(a^\alpha)$ et $f(b^\alpha)$, si les facteurs a et b ne sont pas les mêmes.

Cela posé, dans ces hypothèses, les différents diviseurs du nombre $m=a^\alpha b^\beta\ldots$ étant les différents termes du produit

$$(1+a+\ldots+a^{\alpha-1})(1+b+\ldots+b^{\beta-1})\ldots,$$

il est clair que l'on aura

$$(4)\qquad \theta(m)=[1+f(a)+\ldots+f(a^{\alpha-1})][1+f(b)+\ldots+f(b^{\beta-1})]\ldots.$$

5. Cette formule offre un grand nombre d'applications.

Supposons, par exemple, que l'on ait $f(a)=f(b)=\ldots=-1$, et $f(a^\mu)=f(b^\mu)=\ldots=0$, pour toutes les valeurs de μ supérieures à l'unité. On déduira évidemment de la formule (4), pour toute valeur de m supérieure à l'unité, $\theta(m)=0$; on a d'ailleurs $\theta(1)=1$, et il est facile de voir que $f(m)=\lambda(m)$, λ désignant la même fonction numérique dont j'ai parlé ci-dessus (n° 3) (*); on a donc l'expression suivante, due à Mœbius (*loc. cit.*) :

$$(5)\qquad x=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}-\frac{x^5}{1-x^5}+\frac{x^6}{1-x^6}+\ldots.$$

(*) Cette remarquable fonction numérique, qui se présente dans la formule de M. Dedekind, a aussi été étudiée par Mœbius (*Sur un nouveau mode de réversion des séries*; Crelle, t. IX), et par M. Tchebichef (*Note sur différentes séries;* Liouville, 1re série, t. XVI).

6. Supposons maintenant que l'on fasse, n désignant un entier quelconque,

$$\theta(a)=\theta(b)=\ldots=-1,\ \theta(a^n)=\theta(b^n)=\ldots=1,\ \theta(a^{n+1})=\theta(b^{n+1})=\ldots=-1,$$

en sorte que $\theta(a^n)$ soit, quel que soit le facteur a, égal à $+1$ si n est divisible par n, égal à -1 si n est congru à $+1$ suivant le module n, et dans tous les autres cas égal à zéro.

De la formule (4) il résulte que $\theta(m)$ est nul, à moins que m ne soit une puissance $n^{ième}$ exacte, auquel cas $\theta(m)=1$; d'ailleurs $f(m)$ est toujours égal à -1, 0 ou $+1$; on déduit de là que, quel que soit l'entier n, la série

$$x+x^{2^n}+x^{3^n}+x^{4^n}+\ldots$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{1-x}+\varepsilon_2\frac{x^2}{1-x^2}+\varepsilon_3\frac{x^3}{1-x^3}+\varepsilon_4\frac{x^4}{1-x^4}+\ldots,$$

les coefficients ε étant toujours égaux à -1, 0 ou $+1$, et se déterminant d'ailleurs facilement d'après ce qui précède.

Pour $n=2$, on a en particulier la formule suivante, donnée par M. Liouville (*Journal de math.*, 2e série, t. II),

$$(6)\qquad x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots=\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}\cdot$$

7. Pour revenir à l'objet principal de cette note, je ferai remarquer que, de la propriété fondamentale de la fonction φ

$$(7)\qquad m=\Sigma\varphi(d),$$

résulte le développement suivant :

$$(8)\qquad \varphi(1)\frac{x}{1-x}+\varphi(2)\frac{x^2}{1-x^2}+\varphi(3)\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots=x+2x^2+3x^3+\ldots.$$

Posons maintenant, quel que soit le nombre premier a, $f(a^n)=a^{n-1}(a-1)$, il est clair que, d'après la formule (4), on aura

$$\theta(m)=a^\alpha b^\beta\ldots=m,\quad\text{et}\quad f(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots(a-1)(b-1).$$

D'où, en se reportant à la formule (7),

$$\varphi(m)=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots(\alpha-1)(\beta-1).$$

Telle est l'expression que je voulais déduire de la relation (7) (*).

(*) Depuis que cette note a été écrite, j'ai reconnu que la proposition attribuée à M. Dedekind appartenait en réalité à M. Liouville. (Voy. *Journal de math.*, 2e série, t. II, p. 110.